Aufgabe 1 Variationsprinzip und Plateau-Problem

geg: $\Omega$ Gebiet, $C^1$-Rand

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}\, dx$$

Sei $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $u$ Minimizer von $I$, d.h. $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ und

$$I(u) \leq I(v) \qquad \forall v \in C^2(\overline{\Omega}),\ v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Zeige: $u$ löst Minimalflächengleichung

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}} = 0 \text{ in } \Omega \text{ ; } u = u_0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Lsg $\Omega$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ~~sei~~ $I$ wie oben,

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Richtung, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $u + t\varphi$ im Def. bereich von $I$ und es gilt

$$\frac{d}{dt} I(u + t\varphi)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} I(u + t\varphi) = \frac{d}{dt} \int_\Omega \sqrt{|\nabla(u + tv)(x)|^2 + 1}\, dx$$

$= \dots$ Magie — Schritte ausgelassen

$= \dots$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} I(u + t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \frac{\nabla v(x) \cdot \nabla u(x)}{\sqrt{|\nabla(u(x))|^2 + 1}}\, dx$$

Notation & Gradient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $u: \Omega \to \mathbb{R}$. Def. Gradient $\nabla u$ mit

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(x) \\ \vdots \\ \partial_d u(x) \end{pmatrix}$$

~~und bz~~ $\cdot$ bezeichnet das Standardskalarprodukt:

$$\nabla v \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i v\, \partial_i u$$

Gleichmäßige Konvergenz: $\lim_{n \to \infty} u_n = u_0$ glm.