Technische Universität Dresden

Skript:

Analysis I & II

Version vom 2018-08-21

Verfasser Franziska Kühn
überarbeitet durch Benedikt Bartsch

Daten Prof. Dr. Jürgen Voigt
Wintersemester 2008/09 + Sommersemester 2009
Grundstudium

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis I

1

Natürliche Zahlen + Induktion

1.1 Peano-Axiome(1889)

Peano (1858-1932)/Dedekind (1831-1916)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist genau ein $n' \in \mathbb{N}$ zugeordnet, genannt der Nachfolger von n.
2. Es gibt ein Element in $\mathbb{N}$ - von uns bezeichnet mit 1 -, das nicht Nachfolger ist.
3. Sind $m, n \in \mathbb{N}(m \neq n)$, dann gilt $n' \neq m'$.
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$ und für alle $n \in M$ gilt $n' \in M$, dann ist $M = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)

Es gilt: Zwei Mengen mit den Eigenschaften 1-4 sind im wesentlichen gleich.

1.1.1 Addition

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren (für $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} k+1 &:= k' \\ k+n' &:= (k+n)' \\ \Rightarrow k+2 &= (k+1)' = (k')' \\ k+3 &= (k+2)' = ((k')')' \end{aligned}$$

(rekursive Definition)

1.1.2 Satz: Assoziativität der Addition

Für alle k, m, n $\in \mathbb{N}$ gilt: $(k+m)+n = k+(m+n)$

Beweis:

- Sei k, m $\in \mathbb{N}$. Sei
  $$M := \{n \in \mathbb{N}; (k+m)+n = k+(m+n)\}$$
  Dann gilt $1 \in M$, da:
  $$\begin{aligned} (k+m)+1 &= (k+m)' \\ &= k+m' \\ &= k+(m+1) \end{aligned}$$
- Aus $n \in M$ folgt $n' \in M$, da: lt. Voraussetzung bedeutet $n \in M$: $(k+m)+n = k+(m+n)$. Daher:
  $$\begin{aligned} (k+m)+n' &= ((k+m)+n)' \\ &= (k+(m+n))' \\ &= k+(m+n)' \\ &= k+(m+n') \end{aligned}$$

Also $n' \in M$ und damit nach Axiom 4: $M = \mathbb{N}$.

1.1.3 Kommutativität der Addition

ähnlich wie Addition zu beweisen (siehe Übung 1)

Für alle m, n $\in \mathbb{N}$: m + n = n + m

1.1.4 Multiplikation

Definition: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} k \cdot 1 &:= k \\ k \cdot n' &:= k \cdot n + k \end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Daraus folgen die üblichen Rechenregeln, z.B. Distributivgesetz:
$k \cdot (n+m) = k \cdot n + m \cdot k$

1.1.5 Relation

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir definieren: $m \leq n$ wenn $m = n$ oder wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $m + k = n$ (auch $n \geq m$).

1.2 Prinzip der vollständigen Induktion

außer $\mathbb{N} : \mathbb{N}_0 := 0, 1, 2, ...$

Um eine Aussage A(n) (von n abhängig) für alle $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) zu beweisen, genügt es zu zeigen:

1. $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)
2. Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig (Induktionsvoraussetzung), so ist auch $A(n+1)$ richtig. (Induktionsschritt)

Beweis mit Hilfe des Induktionsaxioms: Setze $M := \{n \in \mathbb{N}_0; A(n_0 + n)\,\text{richtig}\}$
$\longrightarrow$ Dann $M = \mathbb{N}_0$ nach Induktionsaxiom

1.2.1 Satz: Gauß'sche Summenformel

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} k &:= 1 + 2 + ... + n \\ &:= 0 \qquad (n = 0) \\ \sum_{k=1}^{n'} k &:= \sum_{k=1}^{n} k + n' \end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 0$ l.S. $= 0$ r.S. $= 0 \cdot 1 = 0$

- Induktionsschritt: $n \longrightarrow n'(= n+1)$

  Induktionsvoraussetzung:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1)$$

  dann:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + 2 \cdot (n+1) \\ &= n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \end{aligned}$$

1.3 Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert (rekursive Definition):

$$\begin{aligned} n! &:= \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \\ (n+1)! &:= n! \cdot (n+1) \\ 0! &:= 1 \end{aligned}$$

1.3.1 Satz: Permutationen

Die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen) einer n-elementigen Menge ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 1$ - logischerweise 1 Anordnung
- Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: n-elementige Mengen haben $n!$ Anordnungen

  Anordnungen einer $(n+1)$-elementigen Menge $1, 2, \ldots, n+1$ zerfallen in $(n+1)$ disjunkte Teilmengen K_1, $K_2, \ldots, K_{n+1}$:
  $K_k :=$ Menge der Permutationen mit dem Element k an 1. Stelle

  In K_k liegen n! Elemente (nach Induktionsvoraussetzung)

  Also Gesamtzahl: $n! \cdot (n+1) \overset{\text{Def.}}{=} (n+1)!$

1.4 Binomialkoeffizient

Für n, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \\ &:= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ \binom{n}{0} &:= 1 \end{aligned}$$

Wir setzen dabei voraus, dass wir mit reellen Zahlen rechnen können. Dass alle $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ sind, folgt aus Hilfssatz 1.4.1.

1.4.1 Hilfssatz

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis siehe Übung 2

1.5 Satz: Binomischer Lehrsatz

Seien x, y reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\ 0^0 &:= 1\end{aligned}$$

für x reell: $x^0 := 1$ für $n \in \mathbb{N}$: $x^{n+1} := x^n \cdot x$

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 0$, $(x+y)^0 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$
- Induktionsschritt:
  - Induktionsvoraussetzung:

    $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

  - Induktionsbeweis:

    $$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k\right) \cdot (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n-l+1} \cdot y^l \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k\end{aligned}$$

Bemerkung:

- $(x+y)^0 = 1$
- $(x+y)^1 = x + y$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
- usw. (Faktoren zu finden im Pascal'schen Zahlendreieck)

$\longrightarrow$ Folgerungen aus dem bin. Lehrsatz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

1.6 Mengen

Seien A, B, C Mengen:

- $A \subseteq B$: A Teilmenge von B; auch $B \supseteq A$: B Obermenge von A
- $A \cup B$: Vereinigung
- $A \cap B$: Schnittmenge
- $A \backslash B$: $\{x \in A; x \notin B\}$ Differenzmenge

Regeln:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributivgesetz I
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distributivgesetz II

Nachweis von Distributivgesetz I:

- Zeige „$\subseteq$“: Sei $x \in A \cap (B \cup C)$, dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$
  - Fall 1: $x \in B$: $x \in (A \cap B) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Fall 2: $x \in C$: $x \in (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Zeige „$\supseteq$“: $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap B$ und $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap C$, daraus folgt: $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Aus „$\subseteq$“ und „$\supseteq$“ folgt „$=$“.

1.7 Abbildungen

- $f \colon A \to B$ bedeutet: Jedem Element von A ist genau ein Element $f(A)$ in B zugeordnet. Elementweise: $a \mapsto f(a)$. f heißt Abbildung (Funktion) von A nach B
- Bezeichnungen: A... Definitionsmenge (Definitionsbereich), B... Zielmenge (Wertevorrat), $f(A)$... Wertebereich
- für $M \subseteq A$: $f(M) := \{f(a); a \in M\}$ ... Bild von M
- für $N \subseteq B$: $f^{-1}(N) := \{a \in A; f(a) \in N\}$ ... Urbild von N
- f injektiv: Aus a_1, $a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$ folgt $f(a_1) \neq f(a_2)$
- f surjektiv: $f(A) = B$
- f bijektiv: f injektiv und surjektiv
  $\longrightarrow$ Umkehrabbildung: $f^{-1} : B \longrightarrow A \qquad f^{-1}(b) = a$, falls $b = f(a)$

Beispiele:

1. - Sei $\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, also $n \longrightarrow n'$ (Nachfolgerabbildung, Peano-Axiom 1)

- $1 \notin \varphi(\mathbb{N})$ (Peano-Axiom 2)
- φ ist injektiv (Peano-Axiom 3)
- Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$, $\varphi(M) \subseteq M$, dann $M = \mathbb{N}$. (Peano-Axiom 4)
- Damit genauer: Natürliche Zahlen sind ($\mathbb{N}$, 1, φ) [Eigenbemerkung (Grundbereich M, Konstante, Abbildung) = Peano-Struktur)]

2. Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$:
$$\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$$
sind bijektiv.

3. Eine Menge M hat n Elemente: Es gibt $\varphi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M$ ist bijektiv

1.8 Satz: Wohlordnungssatz

Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum (d.h. $m \in M$ mit: $m \leq n$ für alle $n \in M$).

Beweis durch Widerspruch:

- Vorbemerkung:
  Sind $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $k \neq m$, dann gilt $k + 1 \leq m$.

  Beweis dazu:
  - Es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $k + n = m$ (lt. Definition). Ist n=1, so folgt $k + 1 = m \leq m$. Ist $n \neq 1$, so gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $n = l + 1$, daher $k + l + 1 = m$, also $k + 1 \leq m$.
- Beweis:
  Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Annahme: M hat kein Minimum. Definiere $L := \{k \in \mathbb{N}$; für alle $m \in M$ gilt $k \leq m\}$.
  Dann $L \cap M = \emptyset$, denn $m \in L \cap M$ wäre ein Minimum von M. Wir zeigen nun, dass $L = \mathbb{N}$ (Axiom 4):
  - $1 \in L$ (siehe Aufgabe 4 Übung 1): $1 \leq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$
  - Sei $k \in L$, sei $m \in M$. Dann $k \neq m$ und $k \leq m$, damit $k + 1 \leq m$ (s. Vorbemerkung). Somit $k + 1 \in L$.

  Aus $L = \mathbb{N}$ und $L \cap M = \emptyset$ folgt, dass $M = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist obige Annahme nicht zutreffend.

Bemerkung zur Logik des Widerspruchbeweises:

- Seien A, B Aussagen. Man will zeigen: Aus A folgt B.
- Dazu äquivalent: Aus non B folgt non A. Oder gleichzeitiges Gelten von A und non B nicht möglich. („tertium non datur“)

Bemerkung: Aus $\mathbb{N}$ kann man durch mehrmalige Erweiterungen die reellen Zahlen konstruieren: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

2

Körperaxiome der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ bezeichne die Menge der reellen Zahlen. (Genauer: Sei $\mathbb{R}$ eine Menge, die den Axiomen §2-4 genügt- Dann ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.)

2.1 Axiome der Addition

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Summe $x + y \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Addition) 1: Assoziativgesetz (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$)
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
- Körperaxiom (Addition) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$)
$$x + y = y + x$$
- Körperaxiom (Addition) 3: Existenz der Null - Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Körperaxiom (Addition) 4: Existenz des Negativen - Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreibt man
$$x - y := x + (-y)$$

2.1.1 Folgerungen

1. 0 ist eindeutig

   Beweis: Aus $0' \in \mathbb{R}$ und $0 + 0' = 0$ folgt:
$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 = 0 + 0' \\ &= 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. Negatives ist eindeutig.

   Beweis: Aus x+y=0 folgt:
$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + (-x)) \\ &= (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) \\ &= 0 + (-x) = -x \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ (eindeutig) mit $a + x = b$ und zwar $x = b - a$.

   Beweis: $x = b - a$ erfüllt Behauptung:

$$\begin{aligned} a + (b-a) &= a + (b + (-a)) = (a+b) + (-a) \\ &= (b+a) + (-a) = b + 0 = b \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

   Eindeutigkeit: Aus $a + y = b$ folgt:

$$\begin{aligned} y &= y + (a + (-a)) = (y+a) + (-a) \\ &= (a+y) + (-a) = b + (-a) = b - a \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

4. -0 = 0

   Beweis:

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$$

5. Für alle $x \in \mathbb{R}$: -(-x) = x

   Beweis:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

   Damit ist x das Negative zu -x.

6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $-(x+y) = -x - y$

   Beweis:

$$\begin{aligned} (x+y) + (-x-y) &= (x+y) + ((-x) + (-y)) \\ &= (x + (-x)) + (y + (-y)) \\ &= 0 + 0 = 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2.2 Axiome der Multiplikation

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist das Produkt $x \cdot y := xy \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Multiplikation) 1: Assoziativgesetz (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$):

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$):

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 3: Existenz der Eins: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, sodass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Körperaxiom (Multiplikation) 4: Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit: $x \cdot x^{-1} = 1$.

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, setzt man

$$\frac{x}{y} (= x : y = x/y) := x \cdot y^{-1}$$

2.2.1 Folgerungen

Beweise entsprechend Folgerungen 2.1

1. 1 ist eindeutig.
2. Inverses ist eindeutig.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt, mit $a \cdot x = b$ und zwar $x = \frac{b}{a}$.
4. $1^{-1} = 1$
5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$ ist x Inverses zu x^{-1}.
6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ ist das Produkt $x^{-1} \cdot y^{-1}$ Inverses zu $x \cdot y$.

2.3 Axiom der Distributivität

Körperaxiom (Distributivität): Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

2.3.1 Folgerungen

1. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
   Klar durch Kommutativität der Multiplikation...
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 0 = 0$ (Insbesondere: 0 besitzt kein Inverses.)

   Beweis: mit Folgerung 2.1.1.3 (Schritt 3-4)
   $$\begin{aligned} x \cdot 0 + x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) \\ &= x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
3. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt:
   $$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$
   Beweis: Sei $y = 0$. Ist $x \neq 0$, dann
   $$\begin{aligned} y &= (x^{-1} \cdot x) \cdot y \\ &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) \\ &= x^{-1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
   Entsprechend: $y \neq 0$ impliziert x=0

   $\longrightarrow$ Ist $x = 0$ oder $y = 0$, dann $x \cdot y = 0$ nach 2.3.1.2
4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
   $$(-x) \cdot y = -x \cdot y (:= -(x \cdot y))$$
   Insbesondere gilt: $(-1) \cdot x = -x$

   Beweis:
   $$\begin{aligned} x \cdot y + (-x) \cdot y &= (x + (-x)) \cdot y \\ &= 0 \cdot y = 0 \end{aligned}$$
   Aus Folgerung 2.3.1.2: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$

5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

Bemerkungen:

1. Allgemeines Assoziativgesetz:
   Sind $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ so definiert man:
   $$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n := (...((x_1 + x_2) + x_3) + ... + x_n)$$
   rekursive Definition:
   $$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n$$
   Aus Assoziativgesetz folgt: Jede andere Klammerung führt zum gleichen Ergebnis.

   Entsprechend:
   $$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

2. Allgemeines Kommutativgesetz:
   In Summen kann man Summanden umordnen ohne das Ergebnis zu ändern.

   Beispiel:
   $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$
   Entsprechend für Produkte

3. Allgemeines Distributitätsgesetz:
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j$$

Eine Menge mit zwei Verknüpfungen +, ·, die den Axiomen (KA 1-4), (KM 1-4) sowie (KD) genügt, nennt man einen Körper. Genauer: (K, +, ·). Bisher bewiesene Eigenschaften gelten in jedem Körper.

3 Ordnungsaxiome

3.1 Ordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als positiv - geschrieben als $x > 0$ - ausgezeichnet, sodass gilt:

- (O.1): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen: $x > 0$, $x = 0$ oder $-x > 0$.
- (O.2): Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x + y > 0$.
- (O.3): Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x \cdot y > 0$.

Bezeichnungen:

- $x > y :\Leftrightarrow x - y > 0$
- $x \geq y :\Leftrightarrow x > y \vee x = y$
- $x < y :\Leftrightarrow y > x$
- $x \leq y :\Leftrightarrow y \geq x$

Bezeichnungen: Für $a, b \in \mathbb{R}(a \leq b)$:

- abgeschlossenes Intervall:
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$
- offenes Intervall:
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$
- halboffenes Intervall:
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$
- uneigentliche Intervalle:
$$\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\
(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R}; a \geq x\} \\
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R}; a > x\} \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3.1.1 Folgerungen

1. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

   Beweis:

$$\begin{aligned} x < 0 &\Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow 0 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow -x > 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)

   Beweis:

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x > 0 \qquad y < z \Leftrightarrow z - y > 0 \\ \Rightarrow (y-x) + (z-y) &\overset{O.2}{>} 0 \\ \Leftrightarrow z - x &> 0 \\ x &< z \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

3. $x, y, a \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow x + a < y + a$

   Beweis:
$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow (y+a) - (x+a) > 0 \qquad \backslash\backslash$$

4. $x < y, x_1 < y_1 \Rightarrow x + x_1 < y + y_1$

   Beweis: mit b) und c)

$$x < y \Leftrightarrow x + x_1 < y + x_1 < y + y_1 \qquad \backslash\backslash$$

5. $x < y, a > 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

   Beweis:
$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \overset{O.3}{\Rightarrow} a \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x < a \cdot y \qquad \backslash\backslash$$

6. $x < y, a < 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$

   Beweis:
$$y - x > 0, -a > 0 \overset{O.3}{\Rightarrow} (-a) \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x > a \cdot y \qquad \backslash\backslash$$

7. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ Insbesondere: $1 = 1^2 > 0$

8. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0 \qquad x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

   Beweis: $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2$. Dann (0.3) bzw. 3.1.1.6

9. $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

   Beweis: $x \cdot y > 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y)^{-1} > 0$. Dann $0 < x < y$ mit $x^{-1} \cdot y^{-1}$ durchmultiplizieren und 3.1.1.5 benutzen. $\backslash\backslash$

10. Gelten $x \geq 0$ und $x \leq 0$, dann x=0.

    Beweis: Nach (O.1) gilt genau eine der Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$. Wegen $x \geq 0$ ist $x < 0$ ausgeschlossen und wegen $x \leq 0$ ist $x > 0$ ausgeschlossen. Also x = 0. $\backslash\backslash$

11. $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

Beweis:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \qquad y \leq x \Leftrightarrow x - y \geq 0$$
$$\overset{3.1.1.10}{\Rightarrow} y - x = 0 \qquad \backslash\backslash$$

12. Ist $x \in \mathbb{R}$ so, dass $x \leq y$ für alle $y > 0$, so gilt $x \leq 0$.

Beweis durch Kontraposition ($A \Rightarrow B$ beweist man durch „non $B \Rightarrow$ non A):
Angenommen $x > 0$. Dann $\frac{x}{1+1} > 0$ nach 3.1.1.8 bzw (O.3), daher $x \leq \frac{x}{1+1}$ (Voraussetzung).
Also $(1+1) \cdot x \leq x$ (e), $x \leq 0$ (c) - im Widerspruch zu $x > 0$. $\backslash\backslash$

3.2 Satz: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

- Nachfolgerabbildung $\approx$ Addition von 1
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn gilt: $\forall x \in M : x + 1 \in M$.
- Sei $\mathcal{M} := \{M \subseteq \mathbb{R}; 1 \in M, M \text{induktiv}\}$. Dann erfüllt

$$N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{m \in \mathbb{R}; \forall M \in \mathcal{M} : m \in M\}$$

die Peano-Axiome mit Nachfolgerabbildung $\varphi(n) = n + 1$.

- Beweis:
  - $\mathcal{M} \neq \emptyset$, denn $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$. Sei $n \in N$. Für $M \in \mathcal{M}$ ist dann $n \in M$, daher auch $n + 1 \in M$ (M induktiv). Damit $n + 1 \in N$.
    Wegen $1 \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ gilt $1 \in N$. Da die Menge $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\} \in \mathcal{M}$ ist, folgt $0 \notin N$. Also ist 1 nicht Nachfolger. Sind $m, n \in N (m \neq n)$, so folgt $m + 1 \neq n + 1$.
  - Sei $M \subseteq N$, $1 \in M$, für alle $n \in M$ sei $n+1 \in M$ (also M induktiv). Aus der Definition von N folgt $N \subseteq M$. Also $M = N$.
- Bemerkungen:
  - Im Folgenden: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Satz 3.2. Dazu:

    $$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} \qquad \mathbb{Q} := \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

  - Ein Körper mit Teilmenge positiver Elemente mit (O1-3) heißt ein geordneter Körper.

    Bsp.: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

    ohne Ordnung: $\mathbb{F}_2, \mathbb{C}$ (denn $i^2 = -1$)

3.3 Absolutbetrag

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls}\, x \geq 0 \\ -x & \text{falls}\, x < 0 \end{cases}$$

der Betrag (Absolutbetrag) von x.

3.3.1 Folgerungen

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ (falls $y \neq 0$)

   Beweis: Aus $x = \frac{x}{y} \cdot y$ folgt mit c): $|x| = |\frac{x}{y}| \cdot |y|$.

3.4 Satz: Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Damit auch $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$ \\

Folgerung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |x| = |(x + y) - y| &\leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ \text{Ebenso: } |y| - |x| &\leq |y - x|(= |x - y|) \\ \longrightarrow ||x| - |y|| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

3.5 Archimedisches Axiom

- (O.4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $n \cdot x \geq y$. (Archimedisches Axiom)
- Bemerkung: Archimedisch geordneter Körper: geordneter Körper mit (O.4)
- Folgerungen:
  1. $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$
  2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

     Beweis: Nach 1. existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

4 Folgen und Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{Q}$ erfüllt bisherige Axiome. Daher ist die Existenz von $a > 0$ mit $a^2 = 2$ nicht beweisbar mit bisherigen Axiomen.

$\longrightarrow$ Es gibt nicht $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Beweis durch Widerspruch:

- Annahme: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Dabei kann man annehmen, dass eine der beiden Zahlen p oder q ungerade ist. Dann ist $p^2 = 2 \cdot q^2$, also p gerade. p lässt sich als $p = 2 \cdot p'$ darstellen. Also $4p'^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$. Damit ist auch q gerade.

4.1 Folgen und Konvergenz

4.1.1 Folge

Folge reeller Zahlen (Folge in $\mathbb{R}$)

- Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. a ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, aber statt $a(n)$ schreibt man a_n.
- Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, ..., a_n)$, (a_n), $(a_n; n \in \mathbb{N})$
- Allgemeiner: $(a_n)_{n\geq n_0}$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ (oder $\mathbb{Z}$)
- Beispiele:
  1. $a \in \mathbb{R}$, $a_n := a$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  2. $a_n := (-1)^n$
  3. $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ (rekursiv), $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$

     Folge der Fibonacci-Zahlen (Fibonacci = Leonardo de Pisa (1170-1250))

4.1.2 Konvergenz

- Sei a_n eine Folge in $\mathbb{R}$. Sie heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Bezeichnungen:
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
  - $a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty)$
  - a heißt Grenzwert (Limes) der Folge

- Andere Formulierung: In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Terme der Folge. (ε-Umgebung: $\{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \varepsilon\}$; fast alle: alle außer endlich vielen)
- (a_n) heißt Nullfolge, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- (a_n) heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty)$
- (a_n) heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Sie heißt divergent (oder uneigentlich konvergent) gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn:

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \,(\text{bzw. } \ a_n \leq K)$$

für alle $n \geq N$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \,(\text{bzw. } \ -\infty) \qquad (\pm\infty \notin \mathbb{R})$$

- Beispiele:
  1. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

     Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$: $|a_n - a| = |0| < \varepsilon$ für alle $n \geq 1$.
  2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

     Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 3.6.1.2 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt:

     $$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$
  3. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

     Beweis: Annahme: konvergent. Sei a Grenzwert.
     Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
     $$|a_{n+1} - a_n| = |-(-1)^n - (-1)^n| = 2$$
     Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$. Damit für $n \geq N$:

     $$|a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 2$$
  4. Fibonacci-Zahl a_n. Mit Induktion: $a_n \geq n$. Damit (a_n) bestimmt divergent gegen ∞.

4.1.3 Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei a_n konvergent: $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = a'$. Dann $a = a'$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.
  Es gibt $N' \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq \max\{N, N'\}$ folgt:

  $$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Also $|a - a'| < \varepsilon$. Aus Folgerung 3.1.1.10 folgt: $|a - a'| = 0$, $a = a'$.

4.2 Folgerungen

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{R}$: $a_n \longrightarrow a \qquad b_n \longrightarrow b$.

Dann:

1. $a_n + b_n \longrightarrow a + b \ (n \to \infty)$

   Beweis:

   - Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt $N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N' : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   - Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

   $$\begin{aligned} |(a+b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |(a - a_n)| + |(b - b_n)| \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b \ (n \to \infty)$

   Beweis:

   $$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \end{aligned}$$

   - Sei $\varepsilon > 0$.

   $$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |b_n - b| < \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon$$

   $$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon$$

   Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

   $$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &< |a_n| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\ &\leq (|a_n - a| + |a|) \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

3. $a_n - b_n \longrightarrow a - b \ (n \to \infty)$

   Beweis: $a_n + (-1) \cdot b_n \longrightarrow a + (-1) \cdot b$ nach 1. und 2. $\quad \backslash\backslash$

4. Ist $b \neq 0$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Es gilt:

   $$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b} \qquad \left(\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0} \right)$$

   Beweis:

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{1}{2} \cdot |b|$$

   Für $n \geq n_0$ folgt:

   $$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{1}{2} \cdot |b| > 0$$

   Genügt zu zeigen: $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$ (wegen 2.) Für $n \geq n_0$:

   $$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b \cdot b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \longrightarrow 0$$

   Daraus folgt: $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \longrightarrow 0$. (Vgl. Folgerung 4.2.8) $\backslash\backslash$

5. Aus $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $a \leq 0$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für $n \geq N$ folgt:

   $$a = (a - a_n) + a_n < \varepsilon + 0$$

   d.h. $a < \varepsilon$. Daher $a \leq 0$ (Folg. 3.1.1.11)

6. Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \leq b$.

   Beweis: $a_n - b_n \leq 0$. Dann 5. \\

7. Sind $A, B \in \mathbb{R}$, $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $A \leq a \leq B$.

   Beweis: mit 6. mit konst. Folgen $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B)_{n\in\mathbb{N}}$ \\

8. Sei (a_n) Nullfolge, (c_n) in $\mathbb{R}$ mit $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann (c_n) Nullfolge.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt: $|c_n - 0| \leq a_n < \varepsilon$. \\

- Beispiel:

  $$a_n = \frac{n^2 - 13}{5 \cdot n^2 + n} \longrightarrow \frac{1}{5}$$

  Nämlich:

  $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 - \frac{13}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} \\ b_n &:= 1 - \frac{13}{n^2} \longrightarrow 1 \qquad \text{4.2.1,4.2.2.} \\ c_n &:= 5 + \frac{1}{n} \longrightarrow 5 \qquad \text{4.2.1} \end{aligned}$$

  Dann 4.2.4:

  $$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{5}$$

4.3 Cauchy-Folge

Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(A.L. Cauchy (1789-1837))

4.3.1 Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy-Folge

Sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < 0{,}5 \cdot \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ folgt:

  $$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.3.2 Vollständigkeitsaxiom

Vollständigkeitsaxiom: (V) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Bemerkungen:

- Damit alle Axiome für $\mathbb{R}$ formuliert. In $\mathbb{Q}$ ist nicht jede Cauchy-Folge konvergent.
- Axiome für $\mathbb{R}$ (Zusammenfassung): Körperaxiome, Ordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom. Ein Körper mit diesen Axiomen heißt vollständiger archimedisch geordneter Körper. Je zwei solche Strukturen sind isomorph (ohne Beweis). Also $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

4.4 Beschränktheit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

- M nach oben beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq K$$
K heißt obere Schranke von M.
- M nach unten beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \geq K$$
K heißt untere Schranke von M.
- M beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : |x| \leq K$$
(M nach oben und nach unten beschränkt)
- Eine Folge (a_n) heißt beschränkt (nach oben/unten), wenn dies für die Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ gilt.

Bemerkungen:

1. Jede endliche Menge ist beschränkt.
2. Sind M_1, M_2 beschränkt, dann auch $M_1 \cup M_2$.

4.4.1 Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

- Die Folge (a_n) sei konvergent: $a_n \to a (n \to \infty)$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < 1$. Für $n \geq N$:
$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$
(Also beschränkt)
- $\{a_n; n < N\}$ endlich, also beschränkt.
- Damit $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{a_n; n < N\} \cup \{a_n; n \geq N\}$ beschränkt nach Bemerkung 2.

Bemerkung: Umkehrung ist falsch! (z.B. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Beispiel: $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $b \in \mathbb{R}$.

1. $b > 1$: Dann $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   Beweis: Sei $K > 0$. Nach bin. Lehrsatz:

   $$b^n = (1 + (b-1))^n \geq 1 + n \cdot (b-1)$$

   Nach (O.4) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 \cdot (b-1) \geq K$. Damit für $n \geq n_0$:

   $$b^n \geq 1 + n \cdot (b-1) \geq n_0 \cdot (b-1) \geq K$$

2. $0 < b < 1$: Dann $\lim b^n = 0$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 1. gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

   $$\left(\frac{1}{b}\right)^n \geq \frac{1}{\varepsilon} (\Leftrightarrow \varepsilon \geq b^n = |b^n - 0|$$

   für alle $n \geq n_0$.

3. Sei $|b| < 1$. Dann $\lim b_n = 0$.

   Beweis: Klar für $b = 0$. Sonst $|b^n| = |b|^n \to 0 (n \to \infty)$. Daraus $b^n \to 0$. (Folg. 4.2.8)

4. b=1: $\lim b_n = 1$

5. b=-1: (b_n) divergent.

6. $b < -1$: (b_n) divergent, da unbeschränkt (nicht bestimmt divergent).

5 Supremum von Mengen, Satz von Bolzano-Weierstraß

5.1 Supremum & Infimum

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, nach oben beschränkt.
- $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M :⇔ s ist die kleinste obere Schranke (⇔ s obere Schranke und für jede obere Schranke K gilt: $s \leq K$.)
- Bezeichnung: s = sup M
- Falls M nicht nach oben beschränkt ist: sup $M := \infty$
- Ist s = sup M $\in M$ so heißt s auch Maximum: s = max M
- Entsprechend: Infimum (inf M), inf M = $-\infty$, min M (Minimum)
- Beispiel: sup $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\} = 1$ (nicht Maximum!)

5.1.1 Satz: Existenz des Supremums

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, M nach oben beschränkt. Dann existiert sup M.

Beweis:

1. rekursive Definition von Folgen (u_n) und (K_n), wobei u_n keine oberen Schranken und K_n obere Schranken sind und $u_o \leq u_1 \leq \ldots \leq K_1 \leq K_0$. Es soll gelten:

   $$K_n - u_n = 2^{-n} \cdot (K_o - u_o)$$

   für $n \in \mathbb{N}$.

   Anfang: u_0 nicht obere Schranke, K_0 obere Schranke.

   Rekurssionschritt: Seien $u_0, ..., u_n$ und $K_0, ..., K_n$ gewählt.

   Ist $0{,}5 \cdot (K_n + u_n)$ obere Schranke, dann $K_{n+1} = 0{,}5 \cdot (K_n + u_n)$ und $u_{n+1} = u_n$. Sonst: $u_{n+1} = 0{,}5 \cdot (K_n + u_n)$ und $K_{n+1} = K_n$.

   Damit $u_n \leq u_{n+1} \leq K_{n+1} \leq K_n$. Es gilt:

   $$K_{n+1} - u_{n+1} = 0{,}5 \cdot (K_n - u_n) = 2^{-(n+1)} \cdot (K_0 - u_0)$$

2. (u_n) ist Cauchyfolge:
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} \cdot (K_o - u_o) < \varepsilon$.

- Für $m \geq n \geq N$ folgt:

$$|u_m - u_n| = u_m - u_n \leq K_N - u_N = 2^{-N} \cdot (K_0 - u_o) < \varepsilon$$

- Daraus folgt:

$$\exists s := \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} (K_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} K_n$$

3. s ist Supremum von M:
   (a) s ist obere Schranke: Sei $x \in M$. Dann $x \leq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$: $x \leq s$.
   (b) s kleinste obere Schranke: Sei K obere Schranke. Dann $u_n < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst u_n obere Schranke). Für $n \to \infty$: $s \leq K$.

Bemerkung: Archimedisches Axiom + Vollständigkeitsaxiom $\Leftrightarrow$ Existenz von sup M für alle nach oben beschränkten Mengen

5.2 Folgerung: Eindeutigkeit der Wurzel

Seien $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eindeutig bestimmbares b mit $b \geq 0$ mit $b^n = a$.

Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beweis: Klar für a= 0

1. Seien $x, y \geq 0$. Dann
$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$$
(Beweis siehe Übung 4). Daraus folgt Eindeutigkeit.
2. Existenz: $b := \sup\{x \geq 0; x^n \leq a\}$ (existiert, denn $\max\{a, 1\}$ obere Schranke).

   Für $k \in \mathbb{N}$ ist $b + \frac{1}{k} \notin \{x \geq 0; x^n \leq a\}$ (da b obere Schranke ist). Daher
$$a < \left(b + \frac{1}{k}\right)^n \to b^n \,(k \to \infty)$$
   Also $a \leq b^n$. Insbesondere $b > 0$.

   Ist $0 < x < b$, so gibt es $y \in \{x \geq 0; x^n \leq a\}$ mit $x < y$, also gilt $x^n < y^n \leq a$. Damit:
$$a > \left(b \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^n \to b^n \,(k \to \infty)$$
   Also $a \geq b^n$. \\

5.3 Monotonie

(a_n) in $\mathbb{R}$ heißt...

- monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- streng monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- (streng) monoton fallend: $(-a_n)$ (streng) monoton wachsend

5.3.1 Satz: Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend) und beschränkt, dann ist (a_n) konvergent.

Beweis:

- Nach Satz 5.1 besitzt $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum a.
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $a - \varepsilon < a_N$ (sonst $a - \varepsilon$ obere Schranke).
- Für $n \geq N$ folgt:
$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon$$
Also gilt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. \\

5.4 Hilfssatz: Monotone Teilfolge

Ist (a_n) in $\mathbb{R}$ und $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt die Folge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hilfssatz 5.4: Jede Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis:

- Ein Index n heiße „Gipfelstelle“, wenn $a_n \geq a_m$ für alle m mit $n \leq m$.
- Gibt es unendlich viele Gipfelstellen, so gibt es Gipfelstellen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Damit ist (a_{n_j}) monoton fallend $((a_{n_{j+1}}) \leq (a_{n_j}))$.
- Gibt es endlich viele Gipfelstellen, so gibt es n_1 größer als alle Gipfelstellen. Dann gibt es $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$ (da n_1 nicht Gipfelstelle), $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}$,... . Damit (a_{n_j}) (streng) monoton wachsend.

5.5 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach HS 5.4: Es gibt eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt, nach Satz 5.3 folgt konvergent.

5.6 Häufungswert

Ist (a_n) in $\mathbb{R}$ so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungswert (auch Häufungspunkt), wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N > \mathbb{N}\, \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

In jeder ε-Umgebung von a liegen Folgeterme mit beliebig großem Index, also unendlich viele.

Beispiele:

1. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, ...)$
Menge der Häufungswerte $= [0, 1]$
2. (a_n) konvergent, dann $\lim_{n\to\infty} a_n$ einziger Häufungswert
3. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ...)$
0 als einziger Häufungswert (aber nicht konvergent!)

5.6.1 Satz: Häufungswert & konvergente Teilfolge

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$. Dann a Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge (a_{n_k}) mit $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. (Beweis siehe Übung 5)

5.7 Limes superior/inferior

Für (a_n) in $\mathbb{R}$:

1. limes superior (auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k; k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

2. limes inferior (auch $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\{a_k; k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Sind $\emptyset \neq M' \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$, dann $\inf M \leq \inf M' \leq \sup M' \leq \sup M$
- $\sup\{a_k; k \geq n\} \geq \sup\{a_k; k \geq n+1\}$, also $(\sup\{a_k; k \geq n\})_n$ monoton fallend
- $\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \leq \lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n \leq \sup\{a_n; n \geq 1\}$

Beispiele:

1. $\lim\sup(-1)^n = 1 \qquad \lim\inf(-1)^n = -1$
2. $(\frac{1}{1}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, ...) \qquad \lim\sup = \infty \qquad \lim\inf = 0$

6 Reihen

- Sei (a_n) in $\mathbb{R}$, $s_n := \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$ für $n \geq n_0$.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := (s_n)_{n \geq n_0}$$

  heißt (unendliche) Reihe, s_n Partialsummen.

- Reihe ist also die Folge, z.B. für $n_0 = 1$: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ...$
- Ist $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, d.h. (s_n) konvergent, dann auch Summe der Reihe:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

  $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen.

- Beispiel:
  - Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1}$
  - Umformung durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k-1} \\
\Rightarrow 1 &= A \cdot (2k-1) + B \cdot (2k+1) = (A+B) \cdot 2k + (B-A) \\
\Rightarrow A + B &= 0 \qquad B - A = 1 \\
\Rightarrow A &= -0{,}5 \qquad B = 0{,}5
\end{aligned}$$

  - Umformung der Reihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= 0{,}5 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6.1 Geometrische Reihe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, n \in \mathbb{N}_0$:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. Für $|x| < 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
Für $|x| \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ nicht konvergent}$$

Beweis:

1. $(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$
2. Klar mit 1).

6.2 Satz: Linearkombination

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \qquad \text{konvergent}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{konvergent}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \\ &\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

Entsprechend 2. Behauptung.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe):

1. Variante 1: $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ...$ Geklammerte Ausdrücke sind alle jeweils $> 0{,}5$.
2. Variante 2: Annahme, dass harmonische Reihe konvergent. Dann:
$$\begin{aligned} s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\ &> \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\ &= 2 \cdot \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} = s \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann:
$$a_n = s_n - s_{n-1} \longrightarrow 0$$
(Umkehrung falsch!)

- Sei $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Reihe, $n_1 \geq n_0$. Dann:
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n \text{ konvergent?}$$
$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{n} a_k$$

6.3 Konvergenzkriterien

6.3.1 Satz: Allgemeines Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$. Dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq N : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis:

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = s_n - s_{m-1}$.
- (s_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (s_n) Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ rechte Seite

6.3.2 Satz: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$, monoton fallend, $a_n \longrightarrow 0 (n \to \infty)$. Dann gilt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{konvergent}$$

Beweis: s. Übung 6

Beispiele:

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ konvergent. (Summe ist $\ln 2$)
2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ konvergent. (Summe: $\frac{\pi}{4}$)

6.3.3 Satz: Reihen mit positiven Gliedern

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \geq 0$. Dann:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} (a_n) \right)_m \text{ beschränkt} :\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Beweis:

- $\Rightarrow$: Konvergente Folgen sind beschränkt.
- $\Leftarrow$: Monotone beschränkte Folgen sind konvergent.

6.3.4 Satz: Majoranten-Kriterium

(a_n), (b_n) in $\mathbb{R}$, $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Beweis:

- Sei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \qquad t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq m \geq N$ gilt: $|t_n - t_m| < \varepsilon$. ($(t_n)$ Cauchy-Folge)
- Wegen:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = t_n - t_m \\ &< \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

Also (s_n) Cauchy-Folge, konvergent. Aus $|s_n| \leq t_n$ folgt letzte Ungleichung für $n \to \infty$.

Beispiel:

- Für $k \geq 2$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty$
- Beweis: Wie bereits bewiesen ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ konvergent.

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{4n^2-1}$$

Nach Satz 6.3.4 \\.

Bemerkung:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ konvergent?
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

6.4 Absolute Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent

$$:\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

(Hier ist bei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Erste Bedeutung gemeint.)

6.4.1 Folgerung: Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Es gilt:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Beweis mit Satz 6.3.4

6.4.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Es gebe $N \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta < 1$, außerdem $a_n \neq 0$ sodass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \vartheta \qquad \text{für alle } n \geq N$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Für $n \geq N$: $|a_n| \leq \vartheta^{n-N} \cdot |a_N|$, da:

$$\begin{array}{rcl} |a_{N+1}| & \leq & \vartheta \cdot |a_N| \\ |a_{N+2}| & \leq & \vartheta \cdot |a_{N+1}| \leq \vartheta^2 \cdot |a_N| \\ |a_{N+n}| & \leq & \vartheta^n \cdot |a_N| \qquad \text{Induktion nach } n \end{array}$$

- Dann gilt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_N| \cdot \vartheta^{n-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k < \infty \qquad \text{geom. Reihe}$$

  Dann Satz 6.3.4 (Majorantenkriterium)

Beispiele:

1. $e := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent:

$$\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent:

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ mit Quotientenkriterium nicht entscheidbar:

$$\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \longrightarrow 1$$

6.4.3 Satz: Wurzelkriterium

Sei (a_n) in $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Wähle $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < \vartheta < 1$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$: $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \vartheta$ für alle $n \geq N$, d.h. $|a_n| \leq \vartheta^n$.
  Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \vartheta^n < \infty$ (geom. Reihe), folgt die Behauptung aus Satz 6.3.4.

Beispiele:

1. $1 + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + ...$ Quotientenkriterium nicht anwendbar, aber Wurzelkriterium liefert Konvergenz.

2. $\sum \frac{1}{n^k}$ mit Wurzelkriterium nicht entscheidbar:

$$\left(\frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k$$

   Sicher nicht $\limsup < 1$, sonst $\sum \frac{1}{n}$ konvergent. (Übung: $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$)

6.5 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen

Ein Dezimalbruch ist eine Reihe

$$\pm \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq a_n \leq 9$.

6.5.1 Satz: Konvergenz von Dezimalbrüchen

Jeder Dezimalbruch ist absolut konvergent, also konvergent gegen eine reelle Zahl.

Beweis: Es gilt: $|a_n \cdot 10^{-n}| \leq 9 \cdot 10^{-n}$. Daraus folgt:

$$9 \sum_{n=k}^{\infty} 10^{-n} = 9 \cdot 10^k \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k} < \infty \qquad \text{geom. Reihe}$$

Dann Satz 6.3.4. \\

6.5.2 Satz: Reihenentwicklung einer reellen Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $(b_n)_{n \geq 0}$ Folge in $(0, \infty)$, $b_n \to 0 (n \to \infty)$, $x < b_0$. Dann gibt es $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}_0$: $a_n \cdot b_n < b_{n-1}$ für alle n, sodass:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Beweis:

- Folge (a_n) rekursiv definieren:
  - $a_1 := \max\{k \in \mathbb{N}; k \cdot b_1 \leq x\}$, also $x_1 := a_1 \cdot b_1$. Dann $a_1 \cdot b_1 < b_0$.
  - Seien $a_1, ...a_n$ schon bestimmt mit:

$$a_n := \max\{k \in \mathbb{N}_0; \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot k_j + k \cdot b_n \leq x\}$$

  - Wir definieren:

$$a_{n+1} := \max\{k \in \mathbb{N}_0; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot k_j + k \cdot b_{n+1} \leq x\}$$

    Dann $a_{n+1} \cdot b_{n+1} < b_n$, sonst Widerspruch zur Definition von a_n.

- (x_n) monoton wachsend und aus $x_n + b_n > x$ folgt $b_n > x - x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x_n \to x (n \to \infty)$.

6.5.3 Folgerung: Dezimalbruchentwicklung

Jede reelle Zahl lässt sich in einem Dezimalbruch entwickeln.

Beweis:

- ohne Einschränkung: $x \geq 0$
- Es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < 10^{-k}$. Anwendung von Satz 6.5.2 mit $(b_n) = (10^{-n})_{n \geq k}$ ergibt Behauptung, da (b_n) die geforderten Voraussetzungen erfüllt:

$$\begin{array}{rcl} 10^{-n} & \longrightarrow & 0 \\ a & < & \dfrac{10^{-(n-1)}}{10^{-n}} = 10 \qquad \backslash\backslash \end{array}$$

Bemerkungen:

- Satz 6.5.1, Folgerung 6.5.3: Bekannte Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen gesichert.
- Statt Basis 10 beliebige Zahl $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$: b-adische Brüche:
  - b=2: duale Brüche
  - b=8: Oktalzahlen
  - b=16: Hexadezimalzahlen (Ziffern: 0,...,9,A,...,F)
  - b=60: sexagesimale Zahlen (Babylonier/Uhrzeit)

7 Überabzählbarkeit von Mengen

Seien M, N Mengen.

- M heißt endlich :$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f : \{0, ..., n\} \to M$ (bijektiv)
  ($\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f : \{0, ..., n\} \to M$ surjektiv)
- M heißt unendlich :$\Leftrightarrow$ wenn M nicht endlich ist
- M heißt abzählbar unendlich :$\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to M$ bijektiv
  ($\Leftrightarrow$ M ist unendlich, $\exists f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv)
- M heißt abzählbar :$\Leftrightarrow$ M endlich oder abzählbar unendlich
- M heißt überabzählbar :$\Leftrightarrow$ M nicht abzählbar
- M und N haben die gleiche Mächtigkeit :$\Leftrightarrow \exists f : M \to N$ bijektiv

Bemerkungen:

- M abzählbar, $N \subseteq M \Rightarrow$ N abzählbar
- $\exists f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv $\Rightarrow$ M abzählbar

Beispiele:

1. $\mathbb{N}$ ist abzählbar
2. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: (0,1,-1,2,-2,...)

7.1 Satz: Vereinigung von abzählbaren Mengen

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis:

- Für $m \in \mathbb{N}$: $M_m := \{x_{mn}; n \leftarrow \mathbb{N}\}$
- Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens (G. Cantor, 1845-1918)

  $$(y_1, y_2, ...) = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, ...)$$

  Dann:

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$$

- Genauer: $\exists \varphi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. Zum Beispiel:

  $$(m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m$$

7.2 Satz: Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}\}$ abzählbar. Also ist $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar nach Satz 7.1. \\

7.3 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist $[a, b]$ überabzählbar. Also auch $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Beweis:

- Sei $(x_n)_n$ Folge in $[a, b]$. Wir zeigen, dass es $x \in [a, b] \backslash \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ gibt. (Daher gibt es keine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to [a, b]$.)
- Es gibt $a \le a_1 < b_1 \le b$, $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b - a)$, sodass $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Dann gibt es $a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{3}(b_1 - a_1)$, sodass $x_2 \notin [a_2, b_2]$.

  Allgemein:

$$\exists a_n < b_n, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a) : x_1, ..., x_n \notin [a_n, b_n]$$

- Dann $(a_n)_n$ Cauchy-Folge. Für $m \ge n$:

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \le b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a)$$

  $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.
- Es folgt $x \ne x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ als Obermenge von $[a, b]$ ist auch überabzählbar. (Bemerkung 1) \\

Bemerkung:

1. Für eine Menge M sei $\wp := \{N; N \subseteq M\}$ die Potenzmenge.
2. (0,1) bzw. $\mathbb{R}$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\wp(\mathbb{N})$.
3. $M \ne \emptyset$. Dann $\nexists \varphi : M \to \wp(M)$ surjektiv.

7.3.1 Folgerung: Abzählbarkeit irrationaler Zahlen

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) ist überabzählbar.

Beweis: Anderenfalls $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ abzählbar. \\

Bemerkung:

- $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z} : a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_0 = 0$
- $\mathbb{A}$: Menge der algebraischen Zahlen
- $\mathbb{A}$ ist ein Körper, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{A}\backslash\mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}$ ist abzählbar.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt transzedent $:\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$ konkrete transzedente Zahlen schwer zu finden
- $\mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$ ist überabzählbar (also $\ne \emptyset$)
- e, π sind transzedent. (Für π 1882 durch Lindemann. Quadratur des Kreises ist nicht möglich)

8 Umordnung von Reihen

Darf man konvergente Reihen umordnen? Im Allgemeinen nicht möglich!

8.1 Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Für eine Reihe $\sum a_n$ in $\mathbb{R}$ und eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ Umordnung. Sei $\sum a_n$ absolut konvergent, Grenzwert a. Dann konvergiert jede Umordnung ebenfalls gegen a.

Beweis:

- Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- Es gibt $N' \in \mathbb{N}$ mit $\tau(n) > N$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq N'$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - a \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=1}^{N} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} a_k - a \right| \\ &\leq 2 \cdot \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\sum a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent, so gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$ und es gibt divergente Umordnungen. (Riemannscher Umordnungssatz)

Hinweise:

1. Es gibt zwei Teilfolgen (a_{n_j}), (a_{m_j}), sodass $a_{n_j} \geq 0$ und $a_{m_j} < 0$. Also $\sum_j a_{n_j} = \infty$ und $\sum_j a_{m_j} = -\infty$.
2. Sei $c \in \mathbb{R}$. Summiere 1. Reihe bis erstmals $> c$. Dann summiere 2. Reihe bis erstmals $< c$. Dann summiere 1. Reihe bis erneut erstmals $> c$, ... Aus (a_n) Nullfolge folgt: Grenzwert $= c$.

8.2 Satz: Großer Umordnungssatz

Für $i, j \in \mathbb{N}_0$ sei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$M := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \,; m \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty$$

Dann:

1. Ist $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ injektiv, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent. Insbesondere sind $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ ($i \in \mathbb{N}_0$) und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ ($j \in \mathbb{N}_0$) absolut konvergent.

2. Die Reihen $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right)$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{l=0}^{k} a_{k-l,l} \right)$ sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert.

Beweis:

1. Sei $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine injektive Abbildung. Bezeichnung: $\tau(n) := (\tau_1(n), \tau_2(n))$ Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \leq p \leq n\}$. Dann:
$$\sum_{p=0}^{n} |a_{\tau(p)}| \leq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq M$$
Damit $\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)}$ absolut konvergent.

2. Es genügt dies für die erste und die dritte Reihe zu zeigen (Symmetrie). Für $m \leq n$ gilt:
$$\sum_{i=0}^{m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \leq M$$
Für $n \to \infty$ folgt:
$$\sum_{i=0}^{m} \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| \leq M$$
Damit 1. Reihe absolut konvergent.

   Sei $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ bijektiv, z.B. durch das 1. Cantorsche Diagonalverfahren, gegeben.
   Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}_0$, sodass $\sum\limits_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \leq \varepsilon$.
   Sei $n \geq N, m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \leq p \leq n\}$. Für $k, l \geq m$ folgt:
$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} - \sum_{p=0}^{n} a_{\tau(p)} \right| &\leq \sum_{p>n} |a_{\tau(p)}| \\ &\leq \sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$
Grenzübergänge: $l \to \infty, k \to \infty, n \to \infty$ liefern:
$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - \sum_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)} \right| \leq \varepsilon$$
Damit $= 0$. Also Reihensumme gleich.

   Die 3. Reihe entspricht dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren.

8.3 Folgerung: Cauchy-Produkt

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ absolut konvergente Reihen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} b_{k-l} \cdot c_l$$

wobei die letzte Reihe absolut konvergent ist.

Beweis: Satz 8.2 benutzen mit $a_{ij} := b_i \cdot c_j$:

$$\begin{aligned}
l.S. = \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i \sum_{j=0}^{\infty} c_j\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_i \cdot c_j\right) \\
\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |b_i \cdot c_j| &= \sum_{i=0}^{m} |b_i| \cdot \sum_{j=0}^{m} |c_j| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \\
&= M < \infty
\end{aligned}$$

9 Exponentialreihe

9.1 Satz: Konvergenz

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis: mit Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \to 0 \, (n \to \infty)$$

Eulersche Zahl e:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) \qquad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

9.2 Satz: Funktionalgleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis: mit Cauchy-Produkt (Satz 8.3)

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \cdot k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x+y)^k \\
&= \exp(x+y)
\end{aligned}$$

9.3 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = (\exp(x))^{-1} =: \exp(x)^{-1} \qquad (\exp(x) \neq 0)$

   Beweis:
   $$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

2. Für alle $x > 0$: $\exp(x) > 1$

   Beweis:
$$\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{>0} + ...$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$

   Beweis: Für $x > 0$ siehe 2. Für $x < 0$:
$$\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$$

4. $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$

   Beweis:
$$1 < \exp(y - x) = \exp(y) \cdot \exp(x)^{-1}$$

5. $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$

   Beweis:

   - Induktion für $\mathbb{N}_0$:
     - I.A.: $\exp(0) = 1 = e^0$
     - I.S.: $\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$
   - Für $n < 0$:
$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$$

10

Metrische Räume

Ziel: Abstrakte Struktur, für die Konvergenz erklärt werden kann.

Für Mengen X, Y definiert man das kartesische Produkt:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \wedge y \in Y\} \qquad \text{Menge der geordneten Paare}$$

10.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit:

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
3. $\forall x \in X : d(x, x) = 0$
4. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Trennungseigenschaft)

Metrischer Raum ist Paar (X,d). (ohne 4.: d Halbmetrik)

Beispiele:

- $(\mathbb{R}, d), d(x, y) = |x - y|$ (mit Dreieckungleichung des Betrages)
- X Menge (d: diskrete Metrik)

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls}\, x = y \\ 1 & \text{falls}\, x \neq y \end{cases}$$

- Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $d_A : A \times A \to [0, \infty)$, $d_A(x, y) := d(x, y)(x, y \in A)$. Dann (A, d_A) metrischer Raum. d_A: auf A induzierte Metrik

  z.B.: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

10.1.1 Hilfssatz

Sei (X,d) metrischer Raum. Dann:

$$\forall x, y, z \in X : |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

10.1.2 Komplexe Zahlen

- Ziel: $\mathbb{R}$ vergrößern, sodass es i gibt mit $i^2 = -1$: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit Nullelement (0,0) und Einselement (1,0).
- Ist $(x, y) \neq (0, 0)$, d.h. mindestens eine der Zahlen x,y $\neq 0$, dann:

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$, Abbildung erhält Addition und Multiplikation. In diesem Sinne $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Setzt man $i := (0, 1)$, so erhält man

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y$$

  Es gilt $i^2 = (0, 1)^2 = -1$.
- Für $z = x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$:
  - Re(z) := x [Realteil von z]
  $$Re(z) = 0{,}5 \cdot (z + \overline{z})$$
  - Im(z) := y [Imaginärteil von z]
  $$Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})$$
  - $\overline{z} := x - i \cdot y$ [konjugiert komplexe Zahl]
  - $\overline{z} = z$, wenn z reell
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $z \cdot \overline{z} \geq 0$
- Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$
- Betrag einer komplexen Zahl:
$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$$
  Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich der schon bekannte Betrag.

  Eigenschaften des Betrages: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
  1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  2. $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$
  $$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ &= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) \end{aligned}$$
  3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
  $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ (Beweis wie in $\mathbb{R}$)

- Aus dem Betrag: Metrik d
$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$
- Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \imath \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$
- Sind $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ so ergibt sich als Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:
$$z_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$
Ist $b^2 - 4ac < 0$, dann $z_{1/2}$ komplex:
$$z_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \cdot \frac{\imath}{2a} \cdot \sqrt{4ac - b^2}$$
- Auch Gleichungen $a_n \cdot z_n + ... + a_0 = 0$ (wobei sogar $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{C}$) besitzen immer (n) Lösungen (Fundamentalsatz der Algebra). $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

10.1.3 Beispiel: Die metrischen Räume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$

- Im Folgenden: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Sei $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &:= \{(x_1, ..., x_n) | x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x | x : \{1, ..., n\} \to \mathbb{K}\} \qquad \text{dabei}\, x_j := x(j) \end{aligned}$$
- $\mathbb{K}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{K}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ definieren wir den (euklidischen) Betrag (euklidische Norm):
$$|x|_2 := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
(entspricht dem „Abstand" des Vektors x zur 0)
- Wir zeigen, dass dann die Dreiecksungleichung
$$|x + y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2$$
erfüllt ist für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.
- Dazu wird zunächst die **Schwarzsche Ungleichung**
$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq |x|_2 \cdot |y|_2$$
bewiesen. Für Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j, y_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, sonst betrachte $|x_j|, |y_j|$.
  1. Klar, falls x= 0 oder y=0.
  2. $|x|_2 = |y|_2 = 1$. Dann:
$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= 2 \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \right) \end{aligned}$$

3. $x \neq 0, y \neq 0$. Dann:

$$\left| \frac{1}{|x|_2} \cdot x \right|_2 = \left| \frac{1}{|y|_2} \cdot y \right|_2 = 1$$

Nach 2:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j \cdot y_j}{|x|_2 \cdot |y|_2} \leq 1 \qquad \backslash\backslash$$

- Beweis der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x+y|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} ||x_j| + |y_j||^2 \qquad \text{Dreieckungl. in } \mathbb{K} \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \\ &\leq |x|_2^2 + 2 \cdot |x|_2 \cdot |y|_2 + |y|_2^2 \\ &= (|x|_2 + |y|_2)^2 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

- Durch $d(x,y) := |x-y|_2$ ist auf $\mathbb{K}^n$ eine Metrik erklärt.
- $\mathbb{K}^n$ metrischer Raum immer mit obiger Metrik, falls nicht anders gesagt. Statt $|x|_2$ auch $|x|$.

10.2 Konvergenz

- Sei (X,d) ein metrischer Raum. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X (d.h. $x : \mathbb{N} \to X$), $x \in X$. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ (oder $x = \lim_{n\to\infty} x_n$)

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0 \, (n \to \infty))$$

  Also (x_n) konvergent gegen x.

- (x_n) Cauchyfolge

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

- Bemerkung: (x_n) konvergent $\Rightarrow$ (x_n) Cauchy-Folge

  Beweis: $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \geq N$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \qquad \backslash\backslash$$

- (X,d) heißt vollständig :$\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge ist in X konvergent.

10.2.1 Satz: Konvergenz im $\mathbb{K}^n$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

$$x_k \to y \Leftrightarrow x_{kj} \to y_j \, (k \to \infty) \forall j = 1, ..., n$$

Beweis:

- „$\Rightarrow$“ Für j=1,...,n gilt:

$$|x_{kj} - y_j| \leq |x_k - y|_2 = d(x_k, y) \to 0 \, (n \to \infty)$$

- „$\Leftarrow$“ mit (1)

$$|x_k - y|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - y_j|^2 \to 0 \, (k \to \infty)$$

10.3 Satz: Vollständigkeit des $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ ist vollständig.

Beweis:

- Sei (x_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{kj} - x_{lj}| \leq |x_k - x_l|_2$ ist auch $(x_{kj})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent. Nach Satz 10.2 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. \\

Bemerkung: Insbesondere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vollständig und $\mathbb{C}^n$ vollständig.

10.4 Kugeln

- Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X, r > 0\,(r \in \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} B(x,r) & := & \{y \in X; d(y,x) < r\} & \text{offene Kugel} \\ B[x,r] & := & \{y \in X, d(y,x) \leq r\} & \text{abgeschlossene Kugel} \end{array}$$

- $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x

$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

  Insbesondere: $B(x,\varepsilon)$ Umgebung von x genannt ε-Umgebung.

- $U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in U$ ist U Umgebung von x. Bzw. $\Leftrightarrow \forall x \in U\, \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq U$
- $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ offen
- Beispiele:
  1. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
     (a) (a,b) offen

     Sei $x \in (a,b)$. Dann $B(x, \min\{b-x, x-a\}) \subseteq (a,b)$

     (b) (a,∞) offen
     (c) $[a,b)$ nicht offen
     (d) $[a,b] = \mathbb{R}\backslash((-\infty,a) \cup (b,\infty))$ also $[a,b]$ geschlossen.
  2. (X,d) metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann B(a,r) offen.

     Sei $x \in B(a,r)$. Dann $\varepsilon := r - d(a,x) > 0$. Es gilt $B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$. Für $y \in B(x,\varepsilon)$ (d.h. $d(y,x) < \varepsilon$) ist:

$$\begin{array}{rcl} d(y,a) & \leq & d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) \\ & = & (r - d(a,x)) + d(x,a) = r \qquad \backslash\backslash \end{array}$$

  3. $U := \{z \in \mathbb{C}; Re(z) > 0\}$ ist offen

10.4.1 Satz: Abgeschlossenheit & Konvergenz

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann: A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Ist (x_n) in A, $x_n \to x$ (in X), dann $x \in A$.

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“
   Sei (x_n) in A, $x_n \to x$ (in X). Annahme: $x \notin A$. Da $X \backslash A$ Umgebung von x ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in X \backslash A$ für alle $n \geq N$.

   Bemerkung: (x_n) in X, $x \in X$: $x_n \to x \Leftrightarrow \forall U \subseteq X$, U Umgebung von x $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$: $x_n \subseteq U$

2. „$\Leftarrow$“
   Annahme: A nicht abgeschlossen, d.h. $X \backslash A$ nicht offen. Dann gibt es $x \in X \backslash A$, sodass $X \backslash A$ nicht Umgebung von x ist. Daher $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \backslash A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ($\Leftrightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$).
   Wähle $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann (x_n) in A, $x_n \to x (\notin A)$. D.h. rechte Seite von Satz 10.4 nicht erfüllt.

11 Stetigkeit

11.1 Definition

11.1.1 Grundbegriffe

1. Funktionen:
   - Sei D eine Menge.
     - $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion
     - $f : D \to \mathbb{C}$ komplexe Funktion
     - $f : D \to \mathbb{R}^n$ vektorwertige Funktion
   - Graph von f mit $f\colon D \to Y$.
   $$gr(f) := \{(x, f(x)) \in D \times Y | x \in D\}$$
   - Beispiele:
     (a) abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
     (b) entier: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\operatorname{entier}(x) := \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$.
     Auch $\lfloor x \rfloor := \operatorname{entier}(x)$ (Gauß-Klammer)
     (c) Exponentialfunktion
     (d) Dirichlet-Funktion:
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls}\, x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls}\, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
2. Rationale Operatoren auf reellen Funktionen:
   - Sei $f, g : D \to \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann für alle $x \in D$:
   $$f + g : D \to \mathbb{R} : (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
   $$\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$
   - Damit $\mathbb{R}^D$ - die Menge der Abbildungen $D \to \mathbb{R}$- ein Vektorraum.
   $$\begin{aligned} f \cdot g \quad &: \quad D \to \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} \quad &: \quad D' \to \mathbb{R} : \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$
   für $D' := \{x \in D; g(x) \neq 0\}$
3. Komposition von Abbildungen
   - Seien D, E, F Mengen, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to F$. Dann
   $$g \circ f\colon D \to F\colon (g \circ f)(x) := g(f(x))$$
   - Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$. Also abs $=$ sqrt $\circ$ sq, wobei $\operatorname{sq}(x) := x^2$ und $\operatorname{sqrt}(x) := \sqrt{x}$ ($[0, \infty) \to \mathbb{R}$)

11.1.2 Stetigkeit

- Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume, $f : X \to Y$, $a \in X$. f stetig in a

$$
\begin{aligned}
&:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x,a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)
\end{aligned}
$$

(„f(x) nahe bei f(a), wenn x nahe bei a ist.“)

- f stetig (auf) X :⇔ f in jedem Punkt von x stetig.
- Beispiele:
  1. Konstante Abbildung:
  $$f : X \to Y; x \mapsto c$$
  ist stetig ($c \in Y$). Dabei δ beliebig wählbar.
  2. Identische Abbildung:
  $$id_x : X \to X; x \mapsto x$$
  ist stetig. ($\delta := \varepsilon$)
  3. $$\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|$$
  ist stetig.

     Beweis: $a \in \mathbb{R}$. $||x| - |a|| \leq |x - a|$. ($\delta := \varepsilon$)
  4. Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

     Beweis:
     (a) Stetigkeit in a=0
       - Für $|x| \leq 1$ gilt:
       $$
       \begin{aligned}
       |\exp(x) - \exp(0)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\
       &\leq |x| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e
       \end{aligned}
       $$
       - Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{e}\right\}$ folgt: Aus $|x| = |x - 0| < \delta$ folgt $|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$.

     (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
     $$
     \begin{aligned}
     |\exp(x) - \exp(a)| &= |\exp(a) \cdot \exp(x-a) - \exp(a)| \\
     &= \exp(a) \cdot |\exp(x-a) - 1|
     \end{aligned}
     $$
     Sei $\varepsilon > 0$. Nach (a) existiert $\delta > 0$: Für $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$ gilt $|\exp(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{\exp(a)}$.
     Für $|x - a| < \delta$ folgt:
     $$|\exp(x) - \exp(a)| < \exp(a) \cdot \frac{\varepsilon}{\exp(a)} = \varepsilon$$

11.1.3 Satz: Folgenstetigkeit

Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume, $a \in X$, $f : X \to Y$. Dann äquivalent:

1. f stetig in a
2. Für jede Folge (a_n) in X mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ (d.h. f ist folgenstetig in a).

Beweis:

1. „$\Rightarrow$"
   - Sei (a_n) in X, $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $f(B_x(a,\delta)) \subseteq B_y(f(a),\varepsilon)$.
   - Es gibt $N \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N : a_n \in B_x(a,\delta)$. Also für alle $n \geq N$:

$$f(a_n) \in B_x(f(a),\varepsilon) \ \ (\Leftrightarrow e(f(a_n), f(a)) < \varepsilon)$$

2. „$\Leftarrow$" (Kontraposition)
   - Annahme: f nicht stetig in a, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in B_x(a,\delta) \,\mathrm{mit}\, f(x) \notin B_y(f(a),\varepsilon)$$

   insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in X \,\mathrm{mit}\, d(x_n, x) < \frac{1}{n} (= \delta) \wedge e(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

   Dann (x_n) in X, $x_n \to a$, $f(x_n) \not\to f(a)$. Also b) nicht erfüllt. \\

11.2 Satz: Addition + Multiplikation von stetigen Funktionen

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ in a stetig. Ist $g(a) \neq = 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : X' \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $X' = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$.

Beweis:

- Sei (a_n) in X, $a_n \to a$. Dann $f(a_n) \to f(a)$ und $g(a_n) \to g(a)$ nach Satz 11.1. Aus Folgerung 4.2 folgt:

$$\begin{array}{rcl} f(a_n) + g(a_n) & \to & f(a) + g(a) \\ (f+g)(a_n) & \to & (f+g)(a) \end{array}$$

  Nach Satz 11.1: f+g in a stetig. Rest: entsprechend. \\

Beispiele:

1. Polynomfunktion:
   Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_n \cdot x^n + ... + a_0 \cdot x^0$$

   p ist stetig.
2. Rationale Funktionen:
   Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. $\frac{p}{q} : D \to \mathbb{R}$ mit $D := \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$ ist stetig.

11.3 Satz: Stetigkeit der Komposition

Seien (X_j, d_j) mit $j = 1, 2, 3$ metrische Räume, $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$, $a \in X_1$. f sei stetig in a, g in $f(a)$ stetig. Dann $g \circ f : X_1 \to X_3$ in a stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Da g in f(a) stetig:

  $$\exists \delta > 0 : g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon)$$

  Da f stetig in a:

  $$\exists \alpha > 0 : f(B_{X_1}(a, \alpha)) \subseteq B_{X_2}(f(a), \delta)$$

  Dann:

  $$\begin{aligned} (g \circ f)(B_{X_1}(a, \alpha)) &= g(f(B_{X_1}(a, \alpha))) \subseteq g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \\ &\subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon) = B_{X_3}((g \circ f)(a), \varepsilon) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, X metrischer Raum. Dann ist $|f| : X \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ stetig.

   $$|f| = \mathrm{abs} \circ f$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x^2)$ stetig.

Bemerkung: Noch nicht gezeigt, dass $f : [0, \infty) \to [0, \infty) : x \to \sqrt{x}$ stetig.

12
Sätze über stetige Funktionen

12.1 Satz: Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $A \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < A < f(b)$ (oder $f(a) > A > f(b)$). Dann gibt es $p \in [a, b]$ mit $f(p) = A$.
(Anschaulich klar. Falsch für $f : [0, 2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, A=0, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: A=0, $f(a) < 0 < f(b)$. Jetzt „Löwenjagd“: Intervallfolge $([a_n, b_n])$ mit $[a_0, b_0] = [a, b]$. Es sei $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b - a)$, $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$.
- Für $p := \lim a_n = \lim b_n$ folgt:
$$0 \geq f(a_n) \to f(p) \qquad \wedge \qquad 0 \leq f(b_n) \to f(p)$$
Also $f(p) = 0$. \\

Beispiel:

- Jedes Polynom $f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_0$, n ungerade, besitzt mindestens eine (reelle) Nullstelle:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
Also existiert eine Nullstelle.
- Aber: $g(x) = x^2 + 2$ besitzt keine reelle Nullstelle (n gerade).
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = c :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \overset{n \to \infty}{\to} \infty$ gilt $f(x_n) \to c$

12.2 Folgerung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(D)$ ein Intervall.
(D Intervall $\Leftrightarrow \forall a, b \in D, a < b : [a, b] \subseteq D$)

Beweis:

- Sind $A, B \in f(D)$, $A \leq B$. Dann gibt es $a, b \in D$ mit $A = f(a)$ und $B = f(b)$. Aus Zwischenwertsatz: $[A, B] \subseteq f(D)$. \\

Definition: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ beschränkt.

12.3 Satz vom Maximum

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und besitzt ein Maximum und Minimum, d.h. es gibt $p, q \in [a, b]$ mit $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.
(Falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, dann i.A. nicht richtig.)

Beweis:

- Sei $A := \sup\{f(x), a \leq x \leq b\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann $\exists (x_n)$ in $[a, b] : f(x_n) \to A$, (x_n) beschränkt.
- Nach Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $p = \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in [a, b]$.
- Dann $f(p) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = A$ (da f stetig). Daher f beschränkt $(A < \infty)$ und $f(x) \leq A = f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.
- Für nach unten beschränkt und q betrachte -f.

12.4 Folgenkompaktheit

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Definitionsgemäß muss der Grenzwert $\in X$ sein.)
- Bemerkung: Beweis von Satz 12.3 liefert: (X,d) folgenkompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f beschränkt und besitzt Maximum und Minimum.
- Beispiel: Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann X folgenkompakt $\Leftrightarrow$ X beschränkt und abgeschlossen.

12.4.1 Satz: Beschränktheit & Abgeschlossenheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann äquivalent:

1. X ist folgenkompakt.
2. X ist beschränkt und abgeschlossen. (beschränkt $\Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subseteq B[0, R]$)

Beweis:

1. „1 $\Rightarrow$ 2“
   - Annahme: X nicht beschränkt. Dann existiert $(x^k)_k$ in X mit $|x^k| \to \infty$, also ohne konvergente Teilfolge. (Ist $(x^{kj})_j$ konvergent, dann $|x^{kj}|$ konvergent, also beschränkt in $\mathbb{R}$. Widerspruch!) Also X nicht folgenkompakt. Widerspruch! Also: folgenkompakt $\Rightarrow$ beschränkt.
   - Sei (x^k) in X, $x^k \to x$ in $\mathbb{R}^n$. Es gibt in X konvergente Teilfolge (x^{kj}). Es folgt: $x = \lim_{j\to\infty} x^{kj} \in X$. Also X abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
2. „2 $\Rightarrow$ 1“
   - Sei (x^k) eine Folge in X. Die Folge $(x_1^k)_k$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt ($|x_1^k| \leq |x^k|$) und besitzt daher nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_1^{k^1 j})_j$.
   - $(x_2^{k^1 j})_j$ in $\mathbb{R}$ beschränkt, also existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_2^{k^2 j})_j$. (Bleibt: $(x_1^{k^2 j})_j$ konvergent)
   - Es gibt also (x^{kj}), sodass $(x_l^{kj})_j$ konvergent in $\mathbb{R}$ für alle l=1,...,n.
   - Aus Satz 10.2 folgt: $(x^{kj})_j$ konvergent in $\mathbb{R}^n$. Aus Abgeschlossenheit von X: $x = \lim_{j\to\infty} x^{kj} \in X$, also (x^{kj}) konvergent in X.

12.5 Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

- Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume, $f : X \to Y$. Dann heißt f
  - gleichmäßig stetig

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

– Lipschitz-stetig (dehnungsbeschränkt)

$$:\Leftrightarrow \exists L \geq 0 \forall x, x' \in X : e(f(x), f(x')) \leq L \cdot d(x, x')$$

- Beispiele:
  1. $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig
  2. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ nicht Lipschitz-stetig, aber gleichmäßig stetig
  3. $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, nicht gleichmäßig stetig
- Bemerkung: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gleichmäßg stetig $\Rightarrow$ stetig

12.5.1 Satz: Folgenkompaktheit + gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig, X folgenkompakt. Dann f gleichmäßig stetig.

Beweis:

- Annahme: f nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in X \,\text{mit}\, d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

- Insbesondere:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x_n' \in X \,\text{mit}\, d(x_n, x_n') < \frac{1}{n} : e(f(x_n), f(x_n')) \geq \varepsilon$$

  Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$, $x_{n_j} \to x$.
- Aus $d(x'_{n_j}, x) \leq d(x'_{n_j}, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \to 0 \,(j \to \infty)$ folgt $x'_{n_j} \to x$.
- Daher:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq e(f(x_{n_j}), f(x'_{n_j})) \leq e(f(x_{n_j}), f(x)) + e(f(x), f(x'_{n_j})) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

  Widerspruch!

13 Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen, Potenz, Logarithmus

Monotonie: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

- monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
- streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
- monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
- streng monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

13.1 Satz: Monotonie & Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend), f(D) ein Intervall. Dann ist f stetig.

Beweis: (nur für „wachsend“,sonst betrachte -f)

- Sei $a \in D$. Sei $\varepsilon > 0$. Gilt $f(x) \geq f(a) - \varepsilon$ für alle $x < a$, so wähle $\delta_1 = 1$.
- Anderenfalls gibt es $x < a$ mit $f(x) < f(a) - \varepsilon$, dann auch $x' < a$ mit $f(x') = f(a) - \varepsilon$, da f(D) ein Intervall ist und daher $[f(x), f(a)] \subseteq f(D)$. Wir setzen $\delta_1 = a - x'$. Es folgt:
$$\forall x \in D \cap (a - \delta_1, a) : f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a)$$
- Entsprechend:
$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap (a, a + \delta_2) : f(a) \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon$$
- Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt:
$$\forall x \in B_D(a, \delta) : |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

13.2 Satz: Injektivität & Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend). Dann ist f injektiv. Mit $D := f(I)$ ist $f^{-1} : D \to I$ streng monoton wachsend (fallend) und stetig. (Ist f stetig, so ist D ein Intervall. (Folgerung 12.2))

Beweis: (nur für „wachsend“)

- f ist injektiv: Es seien $x, x' \in I$, dann o.B.d.A. $x < x'$, also $f(x) < f(x')$.
- $f^{-1} : D \to I$ streng monoton wachsend:
  - Seien $y, y' \in D$, $y < y'$, y=f(x), y'=f(x').
  - Annahme: $x \geq x'$. Dann $y = f(x) \geq f(x') = y'$.
  - Somit folgt: $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$
- f^{-1} stetig: Da $f^{-1}(D) = I$ ein Intervall ist, ist f^{-1} stetig nach Satz 13.1.

13.2.1 Wurzelfunktion

- Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k$ ist stetig, streng monoton wachsend, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv.
- Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist stetig und streng monoton wachsend.

$$f^{-1}(y) := \sqrt[k]{y} \qquad k\text{-te Wurzel}$$

- Beweis:
  - f stetig, da ein Polynom.
  - f streng monoton wachsend (klar).
  - f(0)=0, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $f([0,\infty))$ ein Intervall, damit $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Rest Satz 13.2

13.2.2 Natürlicher Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig, $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv.
- $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
- Eigenschaften:
  1. $\ln 1 = 0$
  2. $\ln e = 1$
  3. Für $x, x' > 0$:

$$\ln(x \cdot x') = \ln x + \ln x' \qquad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

- Beweis:
  - $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$, also $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ (da exp stetig)
  - Nach Satz 13.2 ln stetig und streng monoton wachsend
  - Eigenschaften:
    1. $\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$
    2. $\exp(1) = e \Rightarrow \ln e = 1$
    3. Seien $x, x' > 0$, $y = \ln x$, $y' = \ln x'$. Also $\exp(y) = x$ und $\exp(y') = x'$.

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= \exp(y) \cdot \exp(y') = \exp(y + y') \\ \ln(x \cdot x') &= y + y' = \ln x + \ln x' \end{aligned}$$

Außerdem:

$$0 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$$

13.2.3 Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$: a^x

- Sei $a > 0$. Dann:

$$\begin{aligned} a &= \exp(\ln a) \\ \Rightarrow a^n &= \exp(\ln a))^n \\ &= \exp(n \cdot \ln a) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.

- Für $q \in \mathbb{N}$:
$$\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln a\right)^q = \exp(\ln a) = a$$
d.h.
$$\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln a\right) = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$$

- Für $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln a\right) &= \exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(a^p)\right)\\ &= \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}\\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln a\right)\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p\end{aligned}$$

- Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$:
$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a)$$
Offenbar $\exp_a$ stetig.

- Schreibweise: $a^x := \exp_a(x) = e^{x\cdot\ln a}$. Insbesondere $\exp(x) = e^x$.

- Klar:
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

- Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis a: $\forall a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}$

  1. $\ln a^x = x \cdot \ln a$

     Folgt aus $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.
  2. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

     Beweis:
$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln a^x) = \exp(x \cdot y \cdot \ln a) = a^{x\cdot y}$$
  3. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

     Beweis:
$$\begin{aligned}a^x \cdot b^x &= \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(x \cdot \ln b)\\ &= \exp(x \cdot (\ln a + \ln b))\\ &= \exp(x \cdot \ln(a \cdot b))\\ &= a^x \cdot b^x\end{aligned}$$
  4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

     Beweis:
$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln\frac{1}{a}\right) = \exp(-x \cdot \ln a) = a^{-x}$$

- Logarithmus zur Basis a: $\log_a$ ist Umkehrfunktion von $\exp_a$ für $a \neq 1$.
$$\ln = \log_e \qquad \log = \log_{10}$$

13.3 Satz: Funktionalgleichung

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:

$$F(x + y) = F(x) \cdot F(y)$$

Dann entweder F(x)=0 für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $a = F(1) > 0$ und $F(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- $F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow F(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- 1. Fall: F(1)=0. Dann:
$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x-1) \cdot F(1) = 0$$
- 2. Fall:
  - $F(1) \neq 0$, also $a = F(1) > 0$.
  $$F(1) \cdot F(0) = F(1) \Rightarrow F(0) = 1$$
  - Für $n \in \mathbb{N}$:
  $$F(n) = F(1)^n = a^n$$
  - Für $n \in -\mathbb{N}$:
  $$F(n) = \frac{1}{F(-n)} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$
  - Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{aligned} F\left(\frac{p}{q}\right)^q &= F(p) = a^p \\ F\left(\frac{p}{q}\right) &= \sqrt[q]{a^p} = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) \end{aligned}$$
  Damit $F(x) = \exp_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.
  - Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$. Da exp_a und F stetig:
  $$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} \exp_a(x_n) = exp_a(x)$$

13.4 Abschluss

Sei X ein metrischer Raum, $D \subseteq X$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \bar{D} &:= \{x \in X; \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X; \exists (x_n) \text{ in } D : x_n \to x (n \to \infty)\} \end{aligned}$$

der Abschluss von D.

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}, D = (0, 1), \bar{D} = [0, 1]$
2. $X = [0, 1] \cup (2, 3), D = (0, 1) \cup (2, 3)$, dann $\bar{D} = X$.

13.5 Grenzwert

Seien (X,d),(Y,e) metrische Räume, $D \subseteq X$, $f : D \to Y$, $a \in \bar{D}, b \in Y$.

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \to a} f(x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(a, \delta) \cap D : f(x) \in B(b, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_n \in D, x_n \to a \, (n \to \infty) : f(x_n) \to b \, (n \to \infty) \end{aligned}$$

Bezeichnungsweise: rechtsseitiger Grenzwert

$$c = \lim_{x \to a+} f(x) :\Leftrightarrow c = \lim_{x \to a, x \in (a, \infty)} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert Bemerkungen zu Grenzwerten:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

   Beweis:

$$\begin{aligned} e^x &\geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{für } x \geq 0 \\ \frac{e^x}{x^n} &\geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty \, (x \to \infty) \end{aligned}$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^n \cdot e^{-x} &= 0 \\ \lim_{x \to 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \infty \\ \lim_{x \to 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= 0 \end{aligned}$$

   Beweis:

$$\begin{aligned} x^n \cdot e^{-x} &= \left(\frac{e^x}{x^n} \right)^{-1} \to 0 \, (x \to \infty) \\ \lim_{x \to 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y \to \infty} \left(\frac{1}{y} \right)^n \cdot e^y = \infty \\ \lim_{x \to 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{y \to \infty} y^n \cdot e^{-y} = 0 \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

   Beweis: Sei $K \in \mathbb{R}$. Dann $\ln e^K = K$. Da ln monoton wachsend: $\ln x \geq K$ für $x \geq e^K$.

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = \lim_{y \to \infty} \ln \frac{1}{y} = - \lim_{y \to \infty} \ln y = -\infty$$

14 Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen

- Seien (c_n), (d_n) in $\mathbb{C}$ konvergent, $c_n \to c$, $d_n \to d$. Dann:

$$\begin{array}{rcll} |c_n| & \to & c & (||c_n| - |c|| \leq |c_n - c|) \\ Re(c_n) & \to & Re(c) & \\ Im(c_n) & \to & Im(c) & \\ c_n + d_n & \to & c + d & \\ c_n \cdot d_n & \to & c \cdot d & \\ \dfrac{c_n}{d_n} & \to & \dfrac{c}{d} & (d \neq 0) \end{array}$$

- Sei (c_n) in $\mathbb{C}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$. Dann:

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n \text{ konvergent} & \Leftrightarrow & (s_n)_n \text{ konvergent} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n \text{ absolut konvergent} & \Leftrightarrow & \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \end{array}$$

14.1 Satz: Majorantenkriterium

Sei (a_n) in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, c_n in $\mathbb{C}$, $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, $|\sum c_n| \leq \sum a_n$.

14.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei (c_n) in $\mathbb{C}$, $c_n \neq 0\,(n \geq n_0)$, $\limsup |\frac{c_{n+1}}{c_n}| < 1$. Dann $\sum c_n$ absolut konvergent.

Ebenso Wurzelkriterium. Beweise analog zum reellen Fall.

14.2.1 Beispiel: Exponentialfunktion

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
absolut konvergent.

   Beweis:
$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0\,(n \to \infty)$$

2. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$
Beweis wie in $\mathbb{R}$, Cauchy-Produkt auch in $\mathbb{C}$ gültig.

3. $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

   Beweis:
$$1 = \exp(0) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

4. Für alle $z \in \mathbb{C}$:
$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$
   Beweis:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} &= \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right)} \\ \Rightarrow \exp(\bar{z}) &= \overline{\exp(z)} \end{aligned}$$

5. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

   Beweis: (wie in $\mathbb{R}$)

   (a) Stetigkeit in $z = 0$
$$|\exp(z) - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq e \cdot |z| \qquad \text{für } |z| \leq 1$$
   (b) sonst mit Funktionalgleichung

14.2.2 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos x := Re(e^{\imath \cdot x}) \qquad \sin x := Im(e^{\imath \cdot x})$$
Somit:
$$e^{\imath \cdot x} = \cos x + \imath \cdot \sin x \qquad \text{(Eulersche Form)}$$
Geometrische Deutung:

1. Für $x \in \mathbb{R}$:
$$|e^{\imath x}|^2 = e^{\imath \cdot x} \cdot \overline{e^{\imath \cdot x}} = e^{\imath \cdot x} \cdot e^{-\imath \cdot x} = 1$$

Bemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \cdot (e^{\imath \cdot x} + e^{-\imath \cdot x}) \\ \sin x &= \frac{1}{2\imath} \cdot (e^{\imath \cdot x} - e^{-\imath \cdot x}) \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 (= |e^{\imath \cdot x}|^2) \end{aligned}$$

14.3 Satz: Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen

$\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis:

- Sei (x_n) in $\mathbb{R}$, $x_n \to x$. Dann $\imath \cdot x_n \to \imath \cdot x$, $e^{\imath \cdot x_n} \to e^{\imath \cdot x}$, also $Re(e^{\imath \cdot x_n}) \to Re(e^{\imath \cdot x})$ und $Im(e^{\imath \cdot x_n}) \to Im(e^{\imath \cdot x})$. \\

14.4 Satz: Additionstheoreme

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
  1. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
  2. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- Beweis: Aus $e^{\imath(x+y)} = e^{\imath \cdot x} \cdot e^{\imath \cdot y}$:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \imath \cdot \sin(x+y) &= (\cos x + \imath \cdot \sin x) \cdot (\cos y + \imath \cdot \sin y) \\ &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + \imath(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y)\end{aligned}$$

14.5 Satz: Reihenentwicklung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\end{aligned}$$

Die Reihen sind absolut konvergent.

Beweis:

$$\begin{aligned}e^{\imath \cdot x} &= 1 + \frac{\imath \cdot x}{1!} + \frac{(\imath \cdot x)^2}{2!} + \frac{(\imath \cdot x)^3}{3!} + ... \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \imath \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)\end{aligned}$$

14.6 Satz: Nullstelle von $\cos$

Die Funktion cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

14.7 Hilfssatz: $\cos 2$

$$\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + ... \\ &\leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

... unter Verwendung des Leibniz-Kriteriums, da die Reihe alternierend ist und die Beträge der einzelnen Summanden abnehmen.

14.8 Hilfssatz: $\sin x > 0$ in $(0,2]$

$$\forall x \in (0,2] : \sin x > 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x \cdot \underbrace{(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...)}_{\text{Leibniz}} \\
&\geq x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \\
&\geq x \cdot \left(1 - \frac{4}{3!}\right) = \frac{1}{3} \cdot x
\end{aligned}$$

14.9 Hilfssatz: Monotonie von $\cos$ in $[0,2]$

cos ist in $[0,2]$ streng monoton fallend.

Beweis:

- Für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:
$$x' = \frac{x'+x}{2} + \frac{x'-x}{2} \qquad x = \frac{x'+x}{2} - \frac{x'-x}{2}$$
- Für $0 \leq x < x' \leq 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\cos x' - \cos x &= \cos \frac{x'+x}{2} \cdot \cos \frac{x'-x}{2} - \sin \frac{x'+x}{2} \cdot \sin \frac{x'-x}{2} \\
&\quad - \cos \frac{x'+x}{2} \cdot \cos \left(-\frac{x'-x}{2}\right) + \sin \frac{x'+x}{2} \cdot \sin \left(-\frac{x'-x}{2}\right) \\
&= \cos \frac{x'+x}{2} \cdot \cos \frac{x'-x}{2} - \sin \frac{x'+x}{2} \cdot \sin \frac{x'-x}{2} \\
&\quad - \cos \frac{x'+x}{2} \cdot \cos \frac{x'-x}{2} - \sin \frac{x'+x}{2} \cdot \sin \frac{x'-x}{2} \\
&= -2 \sin \frac{x'+x}{2} \cdot \sin \frac{x'-x}{2} \\
&< 0 \qquad \text{HS 14.8}
\end{aligned}$$

14.9.1 Beweis Satz 14.6 & Pi

- Existenz:
  - $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$ (HS 14.7)
  - cos stetig, also Zwischenwertsatz gültig
- Eindeutigkeit: Hilfssatz 14.9
- $\frac{\pi}{2}$ ist die Nullstelle von cos in $[0,2]$.

14.10 Satz: spezielle Werte der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i \cdot \pi} = -1 \qquad e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

Beweis:

- Aus $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ folgt nach Hilfssatz 14.8:

  $$\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

  Damit:

  $$e^{\imath\cdot\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \imath\cdot\sin\frac{\pi}{2} = i$$

- Aus der Funktionalgleichung folgt:

  $$\begin{aligned} e^{\imath\cdot\pi} &= e^{\imath\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{\imath\cdot\frac{\pi}{2}} = -1 \\ e^{\imath\cdot 2\pi} &= e^{\imath\cdot\pi}\cdot e^{\imath\cdot\pi} = 1 \end{aligned}$$

14.11 Folgerung: Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ (cos, sin haben Periode 2π)
2. $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$
3. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Beweis: Additionstheoreme

14.12 Folgerung: Nullstellen von $\sin$ und $\cos$

1. $\{x \in \mathbb{R}; \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}; \sin x = 0\} = \{k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}; e^{\imath x} = 1\} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

1. „$\subseteq$“
   - $\cos x > 0$ für $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos x = \cos(-x) > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x \le 0$
   - Für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$: $\cos x < 0$ mit Folgerung 14.11.2
   - Mit Folgerung 14.11.1:

     $$\cos x \neq 0 \,\text{für}\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

   „$\supseteq$“ Klar mir $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und Folgerung 14.11.1, 14.11.2
2. Aus a und Folgerung 14.11.c
3. $$\begin{aligned} 1 = e^{ix} &\Leftrightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \,\text{für}\, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

14.12.1 (Co)Tangens

- Tangens:
$$\tan : \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} : \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$
- Cotangens:
$$\cot : \mathbb{R}\backslash\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} : \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$
- tan streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$, da:
  - sin streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$
  - cos streng monoton fallend auf $[0, \frac{\pi}{2})$ mit Folgerung 14.11.3
  - beide > 0 auf $[0, \frac{\pi}{2})$
- Außerdem:
$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$$

14.12.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

- Arcus cosinus: Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
- Arcus sinus: Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
- Arcus tangens: Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

14.13 Satz: Polardarstellung

Jede komplexe Zahl z lässt sich eindeutig schreiben als $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ mit $r = |z| \in [0, \infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. (Polardarstellung von z, φ Argument von z)

Beweis:

1. $z = 0$: Klar.
2. $z \neq 0$
   - Es sei $r := |z|$, $\zeta := \frac{z}{r}$. Dann $|\zeta| = 1$. Es sei $\xi := Re\,\zeta$, $\eta := Im\,\zeta$. Dann gilt $\xi^2 + \eta^2 = 1$.
   - Es sei $\alpha := \arccos \xi$ (also $\alpha \in [0, \pi]$). Aus $\cos \alpha = \xi$ folgt:
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \eta$$
     Man definiert nun:
$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \sin \alpha = \eta \\ -\alpha & \text{falls } \sin \alpha = -\eta \end{cases}$$
   - Dann gilt $\sin \varphi = \eta$, $e^{\imath\varphi} = \cos \varphi + \imath \cdot \sin \varphi = \zeta$, $z = r \cdot e^{\imath\varphi}$.

- Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} e^{\imath\varphi_1} &= e^{\imath\varphi_2} \\ \Rightarrow e^{\imath(\varphi_1-\varphi_2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \varphi_1-\varphi_2 &= 2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Produkt von $z_1 = r_1 \cdot e^{\imath\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{\imath\varphi_2}$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\imath(\varphi_1+\varphi_2)}$$
2. (Existenz n-ter Wurzeln)
Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gibt es eine Lösung w der Gleichung $w^n = z$. Für $z = r \cdot e^{\imath\varphi}$ definiere
$$w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}$$
3. (n-te Einheitswurzeln)
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen.
$$\zeta_k = e^{\imath\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

14.14 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p(z) = z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + c_0$ mit $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_n) = 0$.

Beweis:

- Aus
$$p(z) = z^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + ... + \frac{c_0}{z^n}\right)}_{\to 1\ (|z|\to\infty)}$$
folgt $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Damit gibt es $R > 0$, sodass $|p(z)| > |p(0)|$ für alle $|z| > R$. Auf $B[0, R]$ ist $z \mapsto |p(z)|$ stetig und besitzt daher ein Minimum: Es gibt $z_n \in B[0, R]$ mit $|p(z_n)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in B[0, R]$, daher für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Angenommen $p(z_0) \neq 0$. Setze $\tilde{p}(z) := \frac{1}{p(z_0)} p(z + z_0)$ Dann nimmt $\tilde{p}$ sein Minimum in 0 an und $\tilde{p}(0) = 1$. Daraus folgt
- Ohne Einschränkung: $z_n = 0$ (Betrachte dazu $p(z + z_n)$). Angenommen $p(0) \neq 0$. Dann o.E. $p(0) = 1$ (Ersetze p durch $\frac{1}{c_0} \cdot p$), $p(0) \leq |p(z)| (z \in \mathbb{C})$.
Dann
$$p(z) = 1 + c \cdot z^m + q(z) \cdot z^{m+1}$$
mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$, q Polynom. Es gibt $b \in \mathbb{C}$, sodass $b^m = -\frac{1}{c}$. Für $0 < t \ll 1$ hinreichend klein folgt:
$$\begin{aligned} |p(b\cdot t)| &\leq |1 + c \cdot b^m \cdot t^m| + |t^{m+1} \cdot b^{m+1} \cdot q(b\cdot t)| \\ &= (1 - t^m) + t^m \cdot t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)| \\ &= 1 - t^m \cdot (1 - t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b\cdot t)|) \\ &= 1 - t^m \cdot \left(1 - t \cdot \sum_{i=0}^{n} t^i \cdot |b^{m+1} \cdot q(b)|\right) \\ &< 1 \end{aligned}$$
Widerspruch zu $p(0) \neq 0$.

Bemerkungen:

- Beweisansatz von J. D'Alembert, 1746; vollständige Ausführung von J.R. Argand, 1806. Gauß 1799, Dissertation (4 Beweise)
- In Satz 14.14 folgt, dass es $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $p(z) = (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n)$.

15
Differentiation

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \in \overline{D\backslash\{x\}}$. (Abschluss in D, siehe 22.2 später) f heißt in x differenzierbar
$$:\Leftrightarrow \exists f'(x) = \lim_{\xi\to x, \xi\in D\backslash\{x\}} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$$
- $f'(x)$ Ableitung von f in x, auch $f'(x) = \lim_{h\to 0, x+h\in D\backslash\{x\}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ mit $x+h \in D, h \neq 0$.
- f differenzierbar (in D) $:\Leftrightarrow$ f in jedem Punkt von D differenzierbar
- Bemerkungen:
  1. $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$ Steigung der Geraden durch $(x, f(x))(\xi, f(\xi))$ (Sekante)
     $f'(x)$ Steigung der „Tangente“ an graph(f) in $(x, f(x))$, falls existiert.
  2. Bezeichnungen:
$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$
  3. $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig
- Beispiele:
  1. Konstante Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c$
$$f'(x) = \lim_{\xi\to x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = 0$$
  2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c \cdot x$
$$f'(x) = \lim_{\xi\to x} \frac{c\cdot\xi - c\cdot x}{\xi - x} = c$$
  3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

15.1 Satz: Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion

Für alle $z \in \mathbb{C}$:
$$\lim_{\xi\to z, \xi\neq z} \frac{\exp(\xi) - \exp(z)}{\xi - z} = \exp(z)$$
(„komplex differenzierbar“)

Beweis:

1. $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi}(\exp(\xi) - 1) &= \frac{1}{\xi} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n!} \\
&= 1 + \xi \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n!} \\
&\leq 1 + |\xi| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{für } |\xi| \leq 1 \\
&\leq 1 + |\xi| \to 1 \, (|\xi| \to 0)
\end{aligned}$$

2. allgemeines z:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi) - \exp(z)) &= \frac{\exp(z)}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi - z) - 1) \\
&\to \exp(z) \, (\xi \to z)
\end{aligned}$$

15.2 Folgerung: Differenzierbarkeit von cos, sin

Die Funktionen exp, cos, sin sind differenzierbar:

1. $\exp' = \exp$
2. $\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$

Beweis:

1. Klar mit Satz 15.1
2. Für $x, \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x$:
$$\frac{e^{\imath\xi} - e^{\imath x}}{\xi - x} = \imath \frac{e^{\imath\xi} - e^{\imath x}}{\imath \cdot \xi - \imath \cdot x} \to \imath \cdot e^{\imath x} \, (\xi \to x)$$
nach Satz 15.1. Dann:
$$\begin{aligned}
\frac{\cos\xi + \imath \cdot \sin\xi - \cos x - \imath \cdot \sin x}{\xi - x} &= \frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x} + \imath \cdot \frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x} \\
&\to \imath \cdot (\cos x + \imath \cdot \sin x) \\
(&= -\sin x + \imath \cdot \cos x)
\end{aligned}$$
Also cos in x differenzierbar, $\cos' x = -\sin x$, und sin in x differenzierbar, $\sin' x = \cos x$.

15.3 Satz: Weierstraßsche Zerlegungsformel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. f in a differenzierbar, $f'(a) = c$
2. Die durch
$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + |x - a| \cdot \varphi(x)$$
für $x \neq a$ definierte Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) := 0$ erfüllt:
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$
(Weierstraßsche Zerlegungsformel)
f wird durch eine affin-lineare Funktion $f(a) + c \cdot (x - a)$ approximiert

Beweis:

1. 1. ⇒ 2.

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \frac{1}{|x-a|} \cdot |f(x) - f(a) - c \cdot (x-a)| \\ &= \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c \right| \to 0\,(x \to a) \end{aligned}$$

2. 2. ⇒ 1.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \frac{|x-a|}{x-a} \cdot \varphi(x) \to c\,(x \to a)$$

15.4 Satz: Produkt-/Quotienten-/Summenregel

Seien $D \subseteq \mathbb{R}, f, g : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ sind in x differenzierbar.

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\lambda \cdot f)'(x) &= \lambda \cdot f'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

2. Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$

Beweis:

1. 1. und 2. Rechenregel klar. Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi) \cdot g(\xi) - f(x) \cdot g(x)}{\xi - x} &= f(\xi) \cdot \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} + \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \cdot g(x) \\ &\to f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)\,(\xi \to x) \end{aligned}$$

2. Quotientenregel: Spezialfall $f = 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(\xi)} - \frac{1}{g(x)}\right) \cdot \frac{1}{\xi - x} &= \frac{1}{g(\xi) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{\xi - x} \\ &\to -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\,(\xi \to x) \end{aligned}$$

   Rest mit Produktregel

Beispiele:

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

   Beweis: Induktion (für n=0,1,2 schon bekannt)

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} \cdot f_1 \\ \Rightarrow f_n' &= (f_{n-1} \cdot f_1)' = f_{n-1}' \cdot f_1 + f_{n-1} \cdot f_1' \\ &= (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

2. Für $n \in \mathbb{Z}, n < 0, f_n : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

   Beweis: mit Quotientenregel

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{x^{-n}}\right) \\ &= \frac{-n \cdot x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

15.5 Satz: Kettenregel

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, f\colon D \to \mathbb{R}, g\colon E \to \mathbb{R}$, f in $x \in D$ differenzierbar, g in $y := f(x)$ differenzierbar. Dann $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Beweis:

- Es sei $g^*\colon E \to \mathbb{R}$ mit

$$g^*(\eta) := \begin{cases} \dfrac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & \text{für } \eta \neq y \\ g'(y) & \text{für } \eta = y \end{cases}$$

  Dann g^*in y stetig und für alle $\eta \in E$:

$$g(\eta) - g(y) = g^*(\eta) \cdot (\eta - y)$$

  Damit:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} &= g^*(f(\xi)) \cdot \frac{(f(\xi) - f(x))}{\xi - x} \\ &\to g^*(f(x)) \cdot f'(x)\,(\xi \to x) \\ (&= g'(f(x)) \cdot f'(x)) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x$
2. $\frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}$

15.6 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $D := f(I), \varphi = f^{-1} : D \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Sei f in $x \in I$ differenzierbar, $f'(x) \neq 0$. Dann φ in $y := f(x)$ differenzierbar.

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Beweis:

- Sei (η_n) in $D\backslash\{y\}$, $\eta_n \to y$. Setze $\xi_n := \varphi(\eta_n)$. Dann $\xi_n \to x$ (φ stetig nach Satz 13.1), $\xi_n \neq x$, da φ injektiv.

$$\frac{\varphi(\eta_n) - \varphi(y)}{\eta_n - y} = \frac{\xi_n - x}{f(\xi_n) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)}\,(n \to \infty)$$

Beispiele:

1. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

$$\ln = \exp^{-1} \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{\frac{1}{n}}\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln 1\right) \to \ln' 1 = 1\\
\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \frac{1}{-\frac{1}{n}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln 1\right) \to \ln' 1 = 1
\end{aligned}$$

2. $\alpha \in \mathbb{R}, f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$. Dann $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Beweis: mit Kettenregel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x)\\
f'(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x)\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

3. arcsin ist differenzierbar auf $(-1,1)$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis:

- arcsin ist Umkehrfunktion von $sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$. $\sin' x = \cos x \neq 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
- Für $-1 < y < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)}\\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

4. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

Beweis: siehe Übung 12 (Aufgabe 89)

15.7 Ableitungen höherer Ordnungen

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$. Es gebe $\varepsilon > 0$, sodass f in $D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ differenzierbar ist. Ist f' in x differenzierbar so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) = (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x.

- Rekursiv: f k-mal differenzierbar in $x \in D$, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, sodass f in $D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x differenzierbar ist.

- Bezeichnungen:
$$f^{(k)}(x) := \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = \frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x)$$

- f k-mal differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f k-mal differenzierbar in jedem $x \in D$.

- f k-mal stetig differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig.

- 0-te Ableitung: $f^{(0)} := f$

16 Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Sei D ein metrischer Raum, $f : D \to \mathbb{R}, x \in D$. f hat in x ...

- lokales Maximum
$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(\xi) \leq f(x) \,\text{für alle}\, \xi \in B(x, \varepsilon)$$
- (globales) Maximum:
$$:\Leftrightarrow f(\xi) \leq f(x) \,\text{für alle}\, \xi \in D$$
- (globales) Minimum:
$$:\Leftrightarrow f(\xi) \geq f(x) \,\text{für alle}\, \xi \in D$$
- striktes Minimum/Maximum: $f(\xi) \neq f(x)$ für $\xi \neq x$
- Extremum: Minimum oder Maximum

16.1 Satz: Ableitung an der Stelle des Extremums

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum, f sei differenzierbar in x. Dann $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ohne Einschränkung: „Maximum“, $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in (a, b)$
- Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \\ f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \geq 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

16.2 Satz von Rolle

Sei $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b) = 0$, f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ist $f = 0$ (Nullfunktion!), dann klar.
- Sei $f \neq 0$. Dann gibt es $y \in (a, b)$ mit $f(y) \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $f(y) > 0$.
Nach Satz 12.3 hat f eine Maximumstelle $x \in [a, b]$ (also $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in [a, b]$) und $f(x) > 0$, also insbesondere $x \neq a, b$. Also $x \in (a, b)$. Aus Satz 16.1 folgt $f'(x) = 0$.

16.3 Folgerung: Mittelwertsatz

Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis:

- Es sei $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Dann $F(a) = F(b) = 0$.
- Aus Satz 16.2 folgt:

$$\exists x \in (a,b) : 0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

16.4 Folgerung: Monotonie

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f in (a,b) differenzierbar.

1. Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann f konstant.
2. Sei $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f (streng) monoton wachsend.

Beweis:

- Sei $a \leq x < y \leq b$. Folgerung 16.3 auf $[x,y]$ angewendet ergibt:

$$\exists \xi \in (x,y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x)$$

  1. Es folgt: $f(x) = f(y)$.
  2. Es folgt:

$$f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

16.5 Folgerung: striktes Extrema

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$, f zweimal differenzierbar in x. Es gelte:

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) > 0$$

Dann besitzt f in x ein striktes lokales Minimum. (Es folgt: Hat f in x lokales Maximum, dann $f'(x) = 0$ und $f''(x) \leq 0$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: f differenzierbar auf (a,b).
- Aus $f''(x) > 0$ folgt:

$$\exists \varepsilon > 0 \,\text{mit}\, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a,b), \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0 \,\text{für}\, 0 < |\xi - x| < \varepsilon$$

- Damit $f'(\xi) < 0$ für $x - \varepsilon < \xi < x$ und $f'(\xi) > 0$ für $x < \xi < x + \varepsilon$. Aus Folgerung 16.4.b): f streng monoton fallend auf $(x - \varepsilon, x]$ und f streng monoton steigend auf $[x, x + \varepsilon)$.

16.6 Folgerung: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit
$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Beweis:

- Betrachte
$$F(y) := [f(b) - f(a)] \cdot [g(y) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(y) - f(a)]$$
- Dann Satz 16.2 ($F(b) = F(a) = 0$) mit
$$F'(y) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(y) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(y)$$

16.7 Folgerung: Regel von de l'Hôpital

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Außerdem $f(a) = g(a) = 0$. Es existiere $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gilt:
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis:

- Sei (x_n) in (a,b), $x_n \to a$. Nach Folgerung 16.6 gilt:
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi_n \in (a, x_n) \text{ mit } (f(x_n) - f(a)) \cdot g'(\xi_n) = (g(x_n) - g(a)) \cdot f'(\xi_n)$$
  Es folgt:
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ (n \to \infty)$$

Beispiele:

1. $$\lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$$
2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$
3. $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{-x + \sin x}{x \cdot \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \cos x}{x \cdot \cos x + \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-x \cdot \sin x + 2\cos x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Regel gilt auch für $\lim_{x \to \infty}$ ... und für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ (Übung)

Beispiele:

1. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$
2. $\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \cdot \ln x}$
$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$$
   Also: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$.

17 Das Riemann-Integral

Integral einer positiven Funktion $\widehat{=}$Fläche unter dem Graphen von f

17.1 Definition

17.1.1 Treppenfunktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ gibt, sodass φ auf (x_{k-1}, x_k) konstant ist für $k = 1, ..., n$. ($T[a, b]$ = Menge der Treppenfunktionen)

- Behauptung: $T[a, b]$ ist ein Vektorraum. (Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a, b]$)
- Beweis: Dazu zu zeigen:
  1. $0 \in T[a, b]$ (Nullfunktion) Klar.
  2. $\varphi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \varphi \in T[a, b]$ Klar.
  3. $\varphi, \psi \in T[a, b] \Rightarrow \varphi + \psi \in T[a, b]$
     - Unterteilung für $\varphi : a = x'_0 < x'_1 < ... < x'_{n'} = b$
     - Unterteilung für $\psi : a = x''_0 < x''_1 < ... < x''_{n''} = b$
     - Seien $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ so, dass $\{x_0, ..., x_n\} = \{x'_0, x'_1, ..., x'_{n'}\} \cup \{x''_0, x''_1, ..., x''_{n''}\}$. Dann sind φ, ψ konstant auf (x_{k-1}, x_k) für alle $k = 1, ..., n$, damit auch $\varphi + \psi$.

17.1.2 Integral

Sei $\varphi \in T[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\varphi(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir definieren

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

als das Integral von a nach b über die Treppenfunktion φ. Es ist Noch zu zeigen, dass die Definition „wohldefiniert“ ist, d.h. rechte Seite unabhängig von Unterteilung.

- Seien dazu $a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_{n'} = b$ so, dass $\varphi(x) = c'_k$ für $x'_{k-1} < x < x'_k$ für $k = 1, ..., n'$.

- Fall 1: Zweite Unterteilung ist feiner als erste, d.h. $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \{x'_0, ..., x'_{n'}\}$. Dann gibt es $0 = j_0 < j_1 < ... < j_n = n'$ mit $x_k = x'_{j_k}$ (k=1,...,n). Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n'} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (x'_j - x'_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

- Fall 2: allgemein
  Wähle Unterteilung, die feiner als $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und als $a = x'_0 < ... < x'_{n'} = b$. Dann mit 1. Schritt:

$$\sum_{\text{1. Unterteilung}} = \sum_{\text{Verfeinerung}} = \sum_{\text{2. Unterteilung}}$$

17.1.3 Satz: Linearität

Es seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$. $A\colon X \to Y$ heißt linear

$$\begin{aligned}
:\Leftrightarrow \quad & \forall x, y \in X : A(x + y) = A(x) + A(y) \\
& \forall x \in X, \lambda \in K : A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x)
\end{aligned}$$

Seien $\varphi, \psi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

1. $$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

2. $$\int_a^b (\lambda \cdot \psi)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$$

   d.h. die Abbildung $\delta : T[a, b] \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$ ist linear.

3. Aus $\varphi \geq 0$ (d.h. $\forall x : \varphi(x) \geq 0$) folgt $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$

4. Außerdem

   $$\int_a^b |\varphi(x)|dx \geq \left| \int_a^b \varphi(x)dx \right|$$

Beweis:

- Einfach, für a) Unterteilung verwenden, die für φ und ψ gilt:

  $$\varphi(x) = c_k \qquad \psi(x) = d_k \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \quad k = 1, ..., n$$

  Dann:

  $$\sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Bemerkung: Letzte Eigenschaft impliziert Monotonie: $\varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq \psi$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int (\psi - \varphi)(x)dx = \int \psi(x)dx - \int \varphi(x)dx &\geq 0 \\
\Rightarrow \int \varphi(x)dx &\leq \int \psi(x)dx
\end{aligned}$$

17.1.4 Riemann-Integrierbarkeit

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann

$$\overline{\int} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx; \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\}$$

das Oberintegral von f.

$$\underline{\int} f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \psi(x)dx; \psi \in T[a, b], \psi \leq f \right\}$$

das Unterintegral von f. Offenbar: (Monotonie des Treppenintegrals)

$$-\infty < \underline{\int} f(x)dx < \overline{\int} f(x)dx < \infty$$

- f heißt Riemann-Integrierbar, wenn

$$\underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

- $[a, b]$: Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen
- Beispiele:
  1. Für $\varphi \in T[a, b]$ gilt:
  $$\overline{\int} \varphi(x)dx = \underline{\int} \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$
  (vorher definiertes Integral auf den Treppenfunktionen)
  Also: $T[a, b] \subseteq R[a, b]$
  2. Dirichlet-Funktion: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
  $$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \\ \overline{\int} f(x)dx &= 1 \\ \underline{\int} f(x)dx &= 0 \end{aligned}$$
  Also $f \notin R[0, 1]$
- Bemerkung: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (Übung)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq f \leq \psi, \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \varepsilon$$

17.2 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f \in R[a, b]$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen:

$$\exists \varphi, \psi \in T[a,b], \varphi \leq f \leq \psi, \max_{a \leq x \leq b}(\psi(x) - \varphi(x)) \leq \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \int (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b \max_{a \leq x \leq b}(\psi(x) - \phi(x))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \varepsilon'\,\mathrm{d}x \\ &= \varepsilon' \cdot (b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- f stetig auf $[a,b]$, also f gleichmäßig stetig. Also gibt es $\delta > 0$: Für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon'$.
- Seien $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $x_j - x_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \inf\{f(y) | x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \psi(x) &:= \sup\{f(y) | x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon'$ für alle $x \in [a,b]$.

17.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f \in R[a,b]$

Beweis: (nur für monoton wachsend)

- Sei $n \in \mathbb{N}$,

$$x_j := a + \frac{(b-a)}{n} \cdot j \qquad j \in \{0, ..., n\}$$

- Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{j-1}) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j,\ j = 1, ..., n \\ \psi(x) &:= f(x_j) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j,\ j = 1, ..., n \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$ (f monoton).

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &\to 0\,(n \to \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\int_0^a x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &:= \begin{cases} a \cdot j \cdot \frac{1}{n} & \text{für}\, a \cdot \frac{j-1}{n} \leq x \leq a \cdot \frac{j}{n}, j =, 1..., n \\ a & \text{für}\, x = a \end{cases} \\
\Rightarrow \int_0^a \varphi_n(x) dx &= \sum_{j=1}^{n} a \cdot j \cdot \frac{1}{n} \cdot a \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \to \frac{a^2}{2} \\
\Rightarrow \int_0^a x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} a^2
\end{aligned}$$

17.4 Satz: Riemann-Summen

Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass für jede δ-feine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ („Feinheit“: $\max_{j=1,..,n}(x_j - x_{j-1}) \leq \delta$) und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, ..., n)$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_n) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ Es gibt $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$. Es gibt $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$, sodass φ und ψ konstant auf $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, .., n)$

- Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{m}$. Sei nun $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $\max(x_j - x_{j-1}) < \delta$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ (j=1,..,n)

$$F(x) := \begin{cases} f(\xi_j) & \text{für}\, x \in (x_{j-1}, x_j)\, (j = 1, \ldots, n) \\ f(x_j) & \text{für}\, x = x_j\, (j = 0, \ldots, n) \end{cases}$$

  Dann $F \in T[a,b]$ und

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

- Sei

$$\begin{aligned}
A &:= \bigcup_{\substack{k \in \{0, \ldots, m\} \\ t_k \in [x_{j-1}, x_j]}} \{(x_{j-1}, x_j)\} \\
M &:= \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} (< \infty) \\
\chi(x) &:= \begin{cases} 2M & \text{für}\, x \in A \\ 0 & \text{für}\, x \in [a,b] \backslash A \end{cases}
\end{aligned}$$

  A ist die Vereinigung von max. 2m Intervallen.

- Dann $\chi \in T[a,b]$, $\varphi - \chi \leq F \leq \psi + \chi$, $\varphi - \chi \leq f \leq \psi + \chi$. sowieso:

$$\begin{aligned}
\int (\varphi - \chi) &\leq \int F \leq \int \psi + \chi \\
\int (\varphi - \chi) &\leq \int f \leq \int \psi + \chi \\
\Rightarrow \int ((\psi + \chi) - (\varphi - \chi)) &= \int (\psi - \varphi) + 2 \cdot \int \chi \\
&\leq \varepsilon + 2 \cdot 2m \cdot \delta \cdot M \\
&= \varepsilon \cdot (1 + 4M) \\
\Rightarrow \left| \int f - \sum_{j=1}^{f} (\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| &\leq \varepsilon \cdot (1 + 4M)
\end{aligned}$$

17.5 Hilfssatz: Rechenregeln für Ober-/Unterintegrale

Seien $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \cdot \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } \lambda \geq 0 \\
\overline{\int} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &\leq \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int} g(x)\,\mathrm{d}x \\
\underline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\overline{\int} (-f(x))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beweis:

1. - Klar für $\lambda = 0$
   - Sei $\lambda > 0$. Ist $\varphi \in T[a,b]$, $\varphi \geq f$, dann $\lambda \cdot \varphi \geq \lambda \cdot f$. Daher:

   $$\begin{aligned}
   \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int \lambda \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
   &= \lambda \cdot \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x
   \end{aligned}$$

   Daraus:

   $$\begin{aligned}
   \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \lambda \cdot \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x \\
   &= \lambda \cdot \overline{\int} \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
   &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
   &= \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x
   \end{aligned}$$

   Also alle „=“.

2. - Seien $\varphi, \psi \in T[a,b]$, $f \leq \varphi$, $g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \psi + \varphi (\in T[a,b])$. Damit:

   $$\begin{aligned}
   \overline{\int} f + g &\leq \int \varphi + \psi \\
   &= \int \varphi + \int \psi \\
   \Rightarrow \overline{\int} (f + g) - \int \psi &\leq \int \varphi
   \end{aligned}$$

- Infimum über φ:

$$\begin{aligned}\overline{\int}(f+g)-\int\psi &\leq \overline{\int} f\\ \Rightarrow \overline{\int}(f+g)-\overline{\int} f &\leq \int\psi\end{aligned}$$

- Infimum über ψ:

$$\overline{\int}(f+g)-\overline{\int} f \leq \overline{\int} g$$

3. $\psi \in T[a,b]$:

$$\psi \leq f \Leftrightarrow -f \leq -\psi$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\underline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \leq f, \varphi \in T[a,b]\right\}\\ &= \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, -\varphi \geq -f, \varphi \in T[a,b]\right\}\\ &= \sup\left\{\int -\psi \,\middle|\, \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\}\\ &\overset{17.1}{=} \sup\left\{-\int \psi \,\middle|\, \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\}\\ &= -\inf\left\{\int \psi \,\middle|\, \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\}\\ &= -\overline{\int}(-f)(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

17.6 Satz: Linearität des Integrals

Seien $f, g \in R[a,b]$. Dann sind $f+g, \lambda \cdot f \in R[a,b]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ und es gilt:

1. $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. $$\int_a^b (\lambda \cdot f(x))dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

3. Monotonie des Integrals:

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Beweis:

- Mit Hilfssatz 17.5 folgt:

$$\begin{aligned}\underline{\int} f + \underline{\int} g &= -\left(\overline{\int}(-f)+\overline{\int}(-g)\right)\\ &\leq -\overline{\int}(-f-g)\\ &= \underline{\int} f+g \leq \overline{\int}(f+g)\\ &\leq \overline{\int} f + \overline{\int} g\end{aligned}$$

- Aus $\overline{\int} f = \int f = \underline{\int} f$ und $\overline{\int} g = \int g = \underline{\int} g$ folgt Gleichheit, also $(f+g) \in R[a,b]$.
- Rest einfach mit Hilfssatz 17.5
- $\Rightarrow R[a,b]$ ist ein Vektorraum

17.7 Folgerung: Positiv-/Negativteil

Sei $f \in R[a,b]$. Dann gilt f^+, f^-, $|f| \in R[a,b]$ wobei:

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\{f(x), 0\} \qquad \text{Positivteil von } f \\ f^-(x) &:= (-f)^+ \qquad \text{Negativteil von } f \\ |f| &:= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)|dx \\ &\leq (b-a) \cdot \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T[a,b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gilt $\varphi^+, \psi^+ \in T[a,b]$, $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$, $0 \leq \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$. Somit gilt:

  $$\int (\psi^+ - \varphi^+) \leq \int (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$$

  Aus Riemannschen Integrierbarkeitskriterium: $f^+ \in R[a,b]$.
- Damit auch $f^- = -(f - f^+)$ und $|f| \in R[a,b]$ nach Satz 17.6.
- Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

  $$\pm \int f(x)dx \leq \int |f(x)|dx$$

  damit erste Ungleichung. Für die 2. Ungleichung $|f| \leq \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\}$

17.8 Satz: „Aufsplitten“ von Integralen

Sei $a < b < c$, $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$. Dann $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar genau dann, wenn $f \in R[a,c]$. Dann gilt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Beweis: einfach

Man setzt:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)dx &:= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &:= -\int_b^a f(x)dx \qquad \text{für } b < a \end{aligned}$$

18

Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, F, $f\colon I \to \mathbb{R}$. F heißt Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar und $F' = f$.
- Sind F, G Stammfunktionen von f, so folgt:

$$F' - G' = 0 \Rightarrow (F-G)' = 0 \Rightarrow F - G = \text{ const} \Rightarrow F = G + \text{const}$$

  wegen Folgerung 16.4a), d.h. verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

18.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar, F Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F|_a^b$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gibt $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, sodass φ, ψ auf (x_{k-1}, x_k) konstant für k=1,...,n. Dann:

$$F(b) - F(a) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} F(x_j) - F(x_{j-1})$$

  Nach Mittelwertsatz: $\exists \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)(j = 1, ..., n)$ mit:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n} F'(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

- Aus $\varphi(\xi_j) \leq f(\xi_j) \leq \psi(\xi_j)$ für j=1,...,n folgt:

$$\int \varphi \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})}_{F(b)-F(a)} \leq \int \psi$$

- Aber auch $\int \varphi \leq \int f \leq \psi$. $(\int \varphi, \int \psi)$ Intervall mit Länge $\leq \varepsilon$. Also $|\int f - (F(b) - F(a))| \leq \varepsilon$.

Beispiele:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Dann:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}|_a^b$$

Hierbei:

- Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$: $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig
- Für $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq -2$: $a, b > 0$ oder $a, b < 0$
- Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}\}$: $a, b > 0$

2. $$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x \,|_a^b & \text{für}\, a, b > 0 \\ \ln(-x) \,|_a^b & \text{für} a, b < 0 \end{cases}$$

18.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \qquad \text{für}\, x \in I$$

Dann F differenzierbar und $F' = f$.

Beweis:

- Sei $x \in I$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0, x+h \in I$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot (F(x+h) - F(x)) - f(x) &\overset{18.1}{=} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy\right) - f(x) \\ &\overset{17.8}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy \end{aligned}$$

- Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy \right| &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup\{|f(y) - f(x)|; |y-x| \leq |h|\} \\ &\to 0\,(h \to 0) \end{aligned}$$

... da f in x stetig.

Bemerkung:

- Besitzt $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F, so ist das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ die Menge aller Stammfunktionen.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \{F \mid F' = f\}$$

- Schreibweisen:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x =: F + c \qquad \left(\text{für ein } F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$f + \int g(x)\,\mathrm{d}x := \{f + G \mid G' = g\}$$

Beispiele

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ für $x \neq 0$

2. Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \int \sin x dx &= -\cos x \\ \int \cos x dx &= \sin x \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x|_0^\pi = 2$$

3. Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \int \exp x \, \mathrm{d}x &= \exp x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x &= \arcsin x = -\arccos x \qquad \text{für} |x| < 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x &= \operatorname{arcosh} x \qquad \text{für } |x| > 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x &= \operatorname{arsinh} x \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \arctan x \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x &= \tan x \end{aligned}$$

Letzteres nur auf Intervallen ohne Nullstellen des cos.

4. $\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$ auf Intervallen $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$. Partialbruchzerlegung:

$$(1-x^2) = (1-x) \cdot (1+x)$$

Gesucht sind α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

Lösung: $\alpha = \beta = 0{,}5$. Damit:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) \\ &\overset{13.2.2.3}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\ &= \begin{cases} \operatorname{artanh} x & \text{für } |x| > 1 \\ \operatorname{arcoth} x & \text{für } |x| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

18.3 Satz: Substitutionsregel (Kettenregel rückwärts)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([a, b]) \subseteq I$. Dann:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Rechenmethode: $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) \cdot dt$

Beweis:

- Sei $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f. Für $F \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

- Aus Satz 18.1:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt &= (F \circ \varphi)(t)\,|_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(x)\,|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Beispiele:

1.
$$\int_a^b f(t+c)\, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad x = t + c = \varphi(t)$$

2.
$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(b)} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_u^v \cos^2 t\, dt$$

mit $x = \sin t, dx = \cos t \cdot dt, u = \arcsin a, v = \arcsin b$. Fortsetzung Lösungsweg siehe Beispiele partielle Integration.

18.4 Satz: Partielle Integration

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, Stammfunktion G. Dann:

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f \cdot G - \int f'(x) \cdot G(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Ableitung eines Elements aus der rechten Menge $x \in [a,b]$: ($\subseteq$ ähnlich)

$$f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot G'(x) - f'(x) \cdot G(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot 1\,\mathrm{d}x &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot (\ln x - 1)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int \arctan x \cdot 1\,\mathrm{d}x &= (\arctan x) \cdot x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{später}}{=} x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Dabei wird die Substitutionsregel genutzt mit $y = 1 + x^2, dy = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} 2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2y}\, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \,\mathrm{d}x &= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \cos^2 dt \\ \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels für Substitutionsregel:

$$\int_u^v \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\arcsin|_a^b + \sqrt{1-x^2} \cdot x|_a^b)$$

Insbesondere für $a = -1, b = 1$:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

19 Uneigentliche Integrale

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oder $b = \infty$. Sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,r]$ mit $a < r < b$ integrierbar. Falls

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to b-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, heißt f auf $[a,b)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar. ($\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.)
Analog für $-\infty \le a < b < \infty$, $f : (a,b] \to \mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent für $\alpha > 1$, nicht konvergent für $\alpha \le 1$

   Beweis: Für $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^r \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^r \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\cdot (r^{1-\alpha}-1) \\ &\to \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

   Für $\alpha = 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x|_1^r \to \infty\,(r\to\infty)$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergent für $\alpha < 1$, nicht konvergent für $\alpha \ge 1$.

3. $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x := \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ nicht konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$

4.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &:= \lim_{r\to-\infty}\int_r^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to-\infty}(-\arctan r) + \lim_{r\to\infty}\arctan r \\ &= \pi\end{aligned}$$

5. $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x = ?$. Es existiert zwar $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^r \sin x\,\mathrm{d}x = 0$, aber

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{r\to\infty}\cos r$$

   nicht. Damit ist auch $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ nicht definiert.

19.1 Satz: Integralvergleichskriterium für Reihen

Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \,\text{konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \,\text{konvergent}$$

Beweis:

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$

- Daher $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ konvergent

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} f(j)\right)_n \quad \text{beschränkt}\\
&\Leftrightarrow \left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n \quad \text{beschränkt}\\
&\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \,\text{konvergent} \quad \left(r \mapsto \int_1^r f(x)\,\mathrm{d}x \,\text{monoton wachsend}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \,\text{konvergent} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Beweis: $\int_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergent für $\alpha > 1$ (siehe oben)

19.2 Satz: (Euler'sche) Gamma-Funktion

Für $x > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

konvergent. $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt (Euler'sche) Gamma-Funktion. Es gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{für alle } x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Für $0 < t \leq 1$ gilt $0 < t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. Damit ist $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}x$ konvergent. Für $1 \leq t \leq \infty$ gilt:

$$0 < t^{x-1}e^{-t} = \underbrace{t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty}\; e^{-\frac{t}{2}} \leq C_x e^{-\frac{t}{2}}$$

für ein $C_x > 0$. Damit ist $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ konvergent, denn für $\alpha > 0$ ist $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$. Die beiden letzten Gleichungen gelten wegen

$$\int_{r'}^{r} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}|_{r'}^{r} + \int_{r'}^{r} x t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$\Gamma(x+1) = 0 + x\Gamma(x)$ durch Grenzübergänge $r \to \infty$ und $r' \to 0$ und nach Induktion:

$$\Gamma(0+1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

Bemerkung:

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ Damit kann man $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ berechnen. Wir werden später in Kapitel Transformationsformel das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen und damit auch $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Die Gammafunktion „interpoliert" die Fakultät. z.B. wichtig für die Berechnung des Volumens der n-dimensionalen Einheitskugel.

20 Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

- Sei K eine Menge, (M,d) ein metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon K \to M$, $f \colon K \to M$.

$$\begin{aligned}
f_n \to f \text{ punktweise} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in K : f_n(x) \to f(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in K \, \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\
f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in K \;\; \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

- Ist $g \colon K \to \mathbb{K}$ so definieren wir

$$\|g\|_K := \sup\{|g(x)|; x \in K\}$$

  die Supremumsnorm.

- Bemerkungen:

  1. g beschränkt $\Leftrightarrow \|g\|_K < \infty$
  2. Im Metrischen Raum (N,e) mit $N := \{f \mid f \colon K \to M\}$ und $e(x,y) := \|x-y\|_K$

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad \lim f_n = f$$

  3.

$$\begin{aligned}
f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in K} d(f_n(x), f(x)) \to 0 \, (n \to \infty) \\
&\Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_K \to 0 \, (n \to \infty) \qquad \text{wenn } M = \mathbb{K}
\end{aligned}$$

  4. $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \to f$ punktweise (i.A. $\not\Leftarrow$)

     Beispiel: $K = [0,1]$

$$f_n(x) = x^n \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

     $f_n \to f$ punktweise. Aber $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also nicht $f_n \to f$ gleichmäßig

20.1 Satz: Gleichmäßige Konvergenz + Stetigkeit

Seien (K,c) und (M,d) metrische Räume, $f_n \colon K \to M$ stetig für $n \in \mathbb{N}$, $f \colon K \to M$, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann f stetig.

Beweis:

- Sei $x \in K$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f(y), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in K$.

- Da f_n stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass für alle $y \in K$ mit $c(y,x) < \delta$: $d(f_n(y), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

- Für y mit $c(y,x) < \delta$ folgt:

$$\begin{aligned} d(f(y), f(x)) &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f(x)) \\ &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

  Also f stetig in x.

20.2 Satz: Konvergenzkriterium von Weierstraß

Sei K eine Menge, (f_n) eine Folge in $B(K) := \{f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ beschränkt}\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty \qquad \left(\Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sei } \|\cdot\|_K\text{-absolut konvergent} \right)$$

und F sei durch

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in K$$

definiert. Dann sind die Folgen $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_n$ absolut konvergent (F ist wohldefiniert) und

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)_n \to F \quad \text{gleichmäßig}$$

Beweis:

- Absolute Konvergenz: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq \|f_n\|_K \Rightarrow \sum_{n=1}^{n} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{n} \|f_n\|_K$ und $\left(\sum_{n=1}^{n} \|f_n\|_K\right)_n$ konvergent, dann Majorantenkriterium
- Für $x \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\overset{6.4.1}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \end{aligned}$$

  Daher:

$$\begin{aligned} \left\| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_K &= \sup_{x \in K} \left| F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \\ &\to 0 \, (n \to \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$ ($\|\cdot\|_K$-absolut konvergent), damit stetig.

20.3 Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist eine Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$
mit (c_n) in $\mathbb{K}$, Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{K}$ für $x \in \mathbb{K}$. $0^0 := 1$

Beispiele:

1. Exponentialreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
2. geometrische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

20.3.1 Satz: Konvergenzradius

Sei
$$r := \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$
mit $\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty$. Dann gilt: Für alle $\varrho \in (0, r)$ konvergiert die Potenzreihe $\| \cdot \|_{B[a,\varrho]}$-absolut, insbesondere gleichmäßig auf $B[a, \varrho]$. Für x mit $|x - a| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
r heißt Konvergenzradius von der Potenzreihe, Cauchy-Hadamard-Formel für r.

Beweis:

- Für $r = 0$ keine Konvergenz zu zeigen. Sei $f_n(x) := c_n \cdot (x - a)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $0 < \varrho < r$,
$$1 > \varrho \cdot \lim_{n\to\infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\sup |\varrho^n \cdot c_n|^{\frac{1}{n}}$$
Nach Wurzelkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^n < \infty$.
Aus
$$\|f_n\|_{B[a,\varrho]} = \sup_{|x-a|\le\varrho} |c_n \cdot (x-a)^n| = |c_n| \cdot \sup_{|x-a|\le\varrho} |x-a|^n = |c_n| \cdot \varrho^n$$
folgt die Behauptung $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{B[a,\varrho]} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^{\frac{1}{n}} < \infty$.
- Sei $|x - a| > r$. Dann:
$$\begin{aligned} 1 &< |x-a| \cdot \lim\sup |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim\sup |c_n \cdot (x-a)^n|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$
Daher gibt es $1 < q$ Teilfolge $|c_{n_j} \cdot (x-a)^{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} > q$. Also $(c_n \cdot (x-a)^n)_n > q^n$ unbeschränkt.

Bemerkung: Es folgt:
$$\begin{aligned} r &= \sup\left\{|x-a| \;\middle|\; \sum c_n \cdot (x-a)^n \text{ konvergent/beschränkt}\right\} \\ &= \sup\{\varrho \ge 0 \mid (c_n \cdot \varrho^n)_n \text{ beschränkt}\} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Exponentialreihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius ∞, konvergiert gleichmäßig auf Kreisen $B[0, \varrho]$ für $0 < \varrho < \infty$, nicht gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$).

Bemerkung:

- $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Für jedes $\varrho \in (0, r)$ ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent auf $B[0, \varrho]$, also
$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$
stetig auf $B(a, r)$ nach Satz 20.1.

Es gibt keine Konvergenzaussage für $|x - a| = r$!
Beispiele:

	$z = -1$	$z = 1$
$\sum n z^n$	Divergnz	Divergenz
$\sum \frac{1}{n} z^n$	Konvergenz	Divergenz
$\sum \frac{1}{n^2} z^n$	absolute Konvergenz	absolute Konvergenz

20.4 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral

Seien $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann:
$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x & \to & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ \left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right. & = & \left. \displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) \end{array}$$

Beweis:

- f stetig nach Satz 20.1.Dann gilt:
$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| &\overset{17.1.3.1}{=} \left| \int_a^b (f_n - f)(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\overset{17.1.3.4}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{17.1.3.3}{\leq} \int_a^b \|f_n - f\|_{[a,b]}\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a) \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ gilt i.a. nicht bei punktweiser Konvergenz

Beispiel:

- Sei $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n - 2n^2 x & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Dann gilt $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise, aber $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ also
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=0}\,\mathrm{d}x$$

20.5 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f_n \to f \text{ punktweise} \qquad f_n' \to g \text{ gleichmäßig}$$

Dann ist f stetig differenzierbar und

$$f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' = g$$

- Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' &\overset{18.1}{=} \left(\lim_{n\to\infty}\left(f_n(a) + \int_a^{\cdot} f_n'(y)\,\mathrm{d}y\right)\right)' \\
&\overset{20.1}{=} \left(f(a) + \int_a^{\cdot} g(y)\,\mathrm{d}y\right)' \\
&\overset{18.2}{=} 0 + g \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n'
\end{aligned}$$

- Bemerkung: $f_n \to f$ gleichmäßig, f_n, f stetig differenzierbar $\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n' = f'$
- Beispiel:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{n} \cdot \sin nx \\
f_n &\to 0 = f \qquad \text{(gleichmäßig)} \\
f_n'(x) &= \cos nx \not\to 0 = f'
\end{aligned}$$

20.6 Folgerung: Differentiation der Potenzreihe

Seien $a \in \mathbb{R}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann f in $(a-r, a+r)$ differenzierbar,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$$

Der Konvergenzradius dieser „differenzierten“ Potenzreihe ist auch r.

Beweis:

- $\sum n \cdot c_n \cdot (x-a)^n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$ konvergent und

  $$\limsup \sqrt[n]{n \cdot |c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

  da $\sqrt[n]{n} \to 1\,(n \to \infty)$. Deshalb gleicher Konvergenzradius.

- $$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot c_k \cdot (x-a)^{k-1}$$

  Für $0 < \varrho < r$ ist wegen 20.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$ gleichmäßg stetig auf $[a-\varrho, a+\varrho]$. Wende Satz 20.5 mit diesem Interval an. Daher 1. Behauptung auf $[a-\varrho, a+\varrho]$.

Beispiele:

1.

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

2.

$$\sin'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

3. Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n &= x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\\ &= x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= x\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

20.7 Folgerung: beliebige Differenzierbarkeit der Potenzreihe

Die reelle Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f\colon (a-r, a+r)\to\mathbb{R}$ beliebig (oft) differenzierbar und

$$c_n = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a)$$

Beweis:

- Beliebige Differenzierbarkeit mit Folgerung 20.6 und Induktion.
- Gleichung mit Induktion:

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-k}\\ \Rightarrow f^{(k)}(a) &= k!\cdot c_k\end{aligned}$$

Es folgt: Ist eine Funktion f durch eine Potenzreihe darstellbar, dann sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. (Koeffizientenvergleich)

Frage:
Sei $f\colon (a-r, a+r)\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Folgt daraus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$?
Nein!

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0\end{cases}$$

Dann f beliebig oft differenzierbar, $f^{(n)}(0) = 0$ Für $x > 0$ ist $f^{(k)}(x) = p_k^{(1/x)}e^{-\frac{1}{x}}$ mit Polynom p_k vom Grad k, aber

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(0)\cdot x^n = 0 \neq f(x)$$

Teil II

Analysis II

21 Taylor'sche Formel und Taylor-Reihe

Sei $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a. Dann

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{\text{affin linear}} + |x-a| \cdot \underbrace{\eta(x)}_{\to 0 (x \to a)}$$

nach Satz 15.3. (Weierstraßsche Zerlegungsformel)

21.1 Satz: Erweiterung der Weierstraß'schen Zerlegungsformel

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \colon I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar, $a \in I$, $f^{(n-1)}$ differenzierbar in a. Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) + |x-a|^n \cdot \eta(x)$$

wobei $\eta : I \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

Beweis:

- Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) \\ G(x) &= (x-a)^n \end{aligned}$$

- Dann:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{f^{(j+m)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j$$

- Nach der Regel von de l'Hôpital gilt mit $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a) \cdot (x-a)}{n! \cdot (x-a)} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit $F(x) = |G(x)| \cdot \eta(x), \eta(x) \to 0 (x \to a)$.

21.2 Satz: Taylor'sche Formel

Seien $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ stetig, auf $[a,x)$ n-mal differenzierbar, auf (a,x) (n+1)-mal differenzierbar. Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

für ein geeignetes $\varrho \in (a,x)$. (Lagrange-Restglied)

Beweis:

1. Vorbetrachtung

   - Seien $F, G : [a,x] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[a,x)$ n-mal differenzierbar, auf (a,x) (n+1)-mal differenzierbar, $F(a) = G(a) = 0$, $G'(y) \neq 0$ für $a < y < x$. Nach verallgemeinerten Mittelwertsatz (Folgerung 16.6) gibt es $\varrho' \in (a,x)$ mit

   $$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')}$$

   - Gilt auch $F'(a) = G'(a) = 0$ und ebenso $G''(y) \neq 0$ für $a < y < x$, dann gibt es $\varrho'' \in (a, \varrho')$ mit

   $$\frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')} = \frac{F''(\varrho'')}{G''(\varrho'')} = \ldots = \frac{F^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}{G^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}$$

   wobei $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$ und $G^{(k)}(y) \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n+1$ für $a < y < x$ vorausgesetzt sind.

2. Anwendung von (1) auf

   $$\begin{aligned} F(y) &= f(y) - \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) \\ G(y) &= (y-a)^{n+1} \end{aligned}$$

   - Die Voraussetzungen sind erfüllt. Also: Es gibt $\varrho \in (a,x)$ mit

   $$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F^{(n+1)}(\varrho)}{G^{(n+1)}(\varrho)} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Taylor-Formel gilt auch „nach links“.

21.3 Folgerung: Polynom

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal differenzierbar, $f^{(n+1)} = 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis:

- Sei $a \in I$. Dann $R_{n+1}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Nach Satz 21.2:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right)$$

21.4 Satz: Integralrestglied

Seien Voraussetzungen wie in Satz 21.2, aber f auf $[a,x]$ (n+1)-mal stetig differenzierbar. Dann gilt die Taylor'sche Formel mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\
&= f(a) - \underbrace{(x-t)\cdot f'(t)|_a^x}_{f'(a)\cdot(x-a)} + \int_a^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) - \underbrace{\frac{(x-t)^2}{2}\cdot f''(t)|_a^x}_{\frac{1}{2!}\cdot f''(a)\cdot(x-a)^2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= \ldots \text{Induktion}
\end{aligned}$$

21.5 Taylor-Reihe

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$$

Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt a.

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius kann 0 sein.
2. Falls Taylor-Reihe konvergiert, dann ist nicht notwendig = f.

   Bsp.:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   f beliebig oft differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$. (Für $x > 0$ $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$). Daher $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k = 0 \neq f(x)$ für $x > 0$.
3. Ist $f: I \to \mathbb{R}$ eine Potenzreihe

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

   dann ist diese Reihe auch die Taylor-Reihe nach Folgerung 20.7
4. Um zu zeigen: „Taylor-Reihe = Funktion“ muss man $R_n \to 0$ zeigen (nicht im Fall 3.)

Beispiel: Exponentialfunktion

- Taylor-Reihe nach 3.:

  $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist Taylor-Reihe um Entwicklungspunkt a:

  $$\exp(x) = \exp(a)\cdot\exp(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(a)}{n!}(x-a)^n$$

21.6 Satz: Logarithmusreihe

Für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Beweis:

- Für $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n \right) dt \qquad \text{geom. Reihe} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot t^n\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

- Gleichmäßige Konvergenz für $0 \leq x \leq 1$ mit Lagrange-Restglied

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \ln(1+x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

  für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (0 < \xi < 1; 0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

Insbesondere: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... = \ln 2$ „schlecht" konvergent. Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \ldots \\ \Rightarrow \ln 2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots \right) \end{aligned}$$

21.7 Satz: Arcus-Tangens-Reihe

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Beweis:

- Sei $|x| < 1$. Dann:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \sum_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot t^{2n}}_{\text{glm. konvergent für } -|x|\le t\le|x|} \,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

- Für $x = \pm 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1}$$

  konvergent nach Leibniz-Kriterium. Genauer gilt für $|x| \le 1$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| &\le |\frac{x^{2n+1}}{2n+1}| \\
&\le \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

  Damit Reihe gleichmäßig konvergent auf [-1,1], somit stetig. Auch arctan stetig. Damit auch gleich für $x = \pm 1$.

Insbesondere: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

21.8 Satz: Binomische Reihe

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $|x| < 1$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

Beweis:

- In Analysis I, Blatt 7, Aufgabe 49 gezeigt:

$$b_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

  konvergent für $|x| \le 1$.

- Dann:

$$\begin{aligned}
b'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\
(1+x) \cdot b'_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} + n \cdot \binom{\alpha}{n} \right) \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \\
&= \alpha \cdot b_\alpha(x)
\end{aligned}$$

- In Aufgabe auch gezeigt $b_\alpha(x) > 0$ für $|x| < 1$. Es folgt (Integration):

$$\begin{aligned}\frac{b'_\alpha(x)}{b_\alpha(x)} &= \frac{\alpha}{1+x} \\ \ln b_\alpha(x) &= \alpha \cdot \ln(1+x) + c\end{aligned}$$

  Aus $b_\alpha(0) = 1$ folgt $c = 0$. Damit:

$$b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

21.9 Folgerung: Absolutbetrag

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2-1)^n$$

wobei die Reihe gleichmäßig auf $[-1,1]$ konvergiert. ($|\cdot|$ gleichmäßig auf $[-1,1]$ durch Polynome approximierbar.) Die Reihe ist keine Taylor-Reihe!

Beweis:

1. Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} y^n$ gleichmäßig konvergent auf [-1,0]. Dazu zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n$ ist konvergent:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1 \qquad \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n < 0 \ (n \geq 1)$$

   Für $-1 < y \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \cdot |y|^k \geq (1+y)^{\frac{1}{2}} > 0$$

   Für $y \to -1$: monoton fallend in n, also konvergent:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k \geq 0$$

   Außerdem

$$\left| \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot y^k \right| \leq \left| \binom{\frac{1}{2}}{k} \right|$$

   daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot y^k$$

   gleichmäßig konvergent auf [-1,0].

2. Für $|x| \leq 1$ ist $-1 \leq x^2 - 1 \leq 0$. Daher

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{x^2} = (1 + (x^2-1))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2-1)^n\end{aligned}$$

   gleichmäßig konvergent für $|x| \leq 1$.

22 Topologie metrischer Räume, Kompaktheit

(X,d) metrischer Raum. Erinnerung:

- $U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$
- $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X \backslash A$ offen

Sei $\mathcal{T} := \{U \subseteq X; U \text{ offen}\} (\subseteq \mathcal{P}(X))$

22.1 Satz: Eigenschaften offener Mengen

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Sind $U, V \in \mathcal{T}$, dann $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, dann $\bigcup \mathcal{S} := \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$

Beweis:

1. Klar
2. Sei $x \in U \cap V$. Dann existieren $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$:
$$B(x, \varepsilon_1) \subseteq U \qquad B(x, \varepsilon_2) \subseteq V$$
Mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt dann:
$$B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=1}^{2} B(x, \varepsilon_j) \subseteq U \cap V$$
3. Sei $x \in \bigcup \mathcal{S}$. Dann existiert $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.

Bemerkungen:

- Aus 2. folgt: Endlicher Durchschnitt offener Mengen ist offen.
- Ist X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit 1.,2. und 3., dann heißt $\mathcal{T}$ Topologie auf X, $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.
- Unendlicher Durchschnitt offener Mengen ist i.A. nicht offen.

  Bsp.: [0,1] in $\mathbb{R}$
$$\underbrace{[0,1]}_{\text{nicht offen}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})}_{\text{offen}}$$
- $\emptyset, X$ abgeschlossen. Endliche Vereinigung endlicher Mengen ist abgeschlossen, beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (Komplementbildung)

22.2 Inneres, Rand, Abschluß

Sei $Y \subseteq X$. Dann heißt

$$\dot{Y}(= \operatorname{int}(Y)) := \{x \in Y; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq Y\}$$

Inneres (offener Kern) von Y ,

$$\overline{Y}(= cl(Y)) := \{x \in X; \forall r > 0 : Y \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$$

Abschluss (abgeschlossene Hülle) von Y,

$$\partial Y := \overline{Y} \backslash \dot{Y}$$

Rand von Y.

Beispiele:

1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q} =: Y$ in $\mathbb{R}$
$$\dot{Y} = \emptyset \qquad \overline{Y} = [0, 1] \qquad \partial Y = [0, 1]$$

2. Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ (links: mit Rand, rechts: ohne Rand)
$$\dot{Y} = B(0, 1) \qquad \overline{Y} = B[0, 1] \qquad \partial Y = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$$

22.2.1 Satz: Eigenschaften

Sei $Y \subseteq X$. Dann:

1. $\dot{Y}$ ist offen, $Y = \dot{Y} \Leftrightarrow$ Y offen
2. $\overline{Y} = X \backslash int(X \backslash Y)$ ist abgeschlossen
3. Y abgeschlossen $\Leftrightarrow Y = \overline{Y}$
4. ∂Y ist abgeschlossen. Es gilt:
$$\dot{Y} = Y \backslash \partial Y \qquad \overline{Y} = Y \cup \partial Y$$

Beweis:

1. Sei $x \in \dot{Y}$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq Y$. Für $y \in B(x, \varepsilon)$ ist $B(x, \varepsilon)$ Umgebung von y:
$$B(y, \varepsilon - d(x, y)) \subseteq B(x, \varepsilon)$$
Damit auch Y Umgebung von y. Somit $B(x, \varepsilon) \subseteq \dot{Y}$.

2. Es gilt:
$$\begin{aligned} X \backslash \overline{Y} \quad &:= \quad \{x \in X; \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{Y \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset}_{\Leftrightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq X \backslash Y}\} \\ &= \quad \operatorname{int}(X \backslash Y) \end{aligned}$$
Damit $\overline{Y} = X \backslash \operatorname{int}(X \backslash Y)$.

3. Y abgeschlossen $\Leftrightarrow X \backslash Y = \operatorname{int}(X \backslash Y) = X \backslash \overline{Y} \Leftrightarrow Y = \overline{Y}$.

4. $\partial Y = \overline{Y} \backslash \dot{Y} = \overline{Y} \cap (X \backslash \dot{Y})$ abgeschlossen. Rest folgt aus $\dot{Y} \subseteq Y \subseteq \overline{Y}, \partial Y = \overline{Y} \backslash \dot{Y}$

22.3 Kompaktheit

Offene Überdeckung von X

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \text{ mit } \bigcup \mathcal{S} \left(= \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \right) = X$$

Dabei ist $\mathcal{S}$ ein „System“ von offenen Mengen.

X heißt kompakt

- :⇔ Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{S}$ gibt es $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ endlich, mit $\bigcup \mathcal{F} = X$. (Kurz: Jede offene Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung.)
- ⇔ Ist $\mathcal{R}$ ein System von abgeschlossenen Mengen mit der Endlichen-Durchschnitts-Eigenschaft, d.h. für alle $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ endlich, gilt $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset$, so ist $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

Zu „⇒“:

- Sei $\mathcal{R}$ wie angenommen. Definiere $\mathcal{S} = \{X \backslash A; A \in \mathcal{R}\} \subseteq \mathcal{T}$. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ endlich. Dann:

$$X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \underbrace{X \backslash U}_{\in \mathcal{R}} \neq \emptyset$$

da $\mathcal{R}$ die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft hat, also $\bigcup \mathcal{F} \neq X$. Damit $\bigcup \mathcal{S} \neq X$. Daraus

$$\emptyset \neq X \backslash \bigcup \mathcal{S} = X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} X \backslash U = \bigcap_{A \in \mathcal{R}} A$$

22.3.1 Satz: Kompaktheit & Folgenkompaktheit

Für (X,d) äquivalent:

1. X ist kompakt.
2. X ist folgenkompakt. (Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.)

Beweis:

1. „1. ⇒ 2.
   - Sei (x_n) in X. Für $n \in \mathbb{N}$:
   $$A_n := \overline{\{x_j; j \geq n\}}$$
   Dann hat $\mathcal{R} = \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft (Für $n_1 < ... < n_k$ ist $\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} = A_{n_k} \neq \emptyset$). Da X kompakt ist, ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.
   - Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für alle $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $B(x, \varepsilon) \cap \{x_j; j \geq n\} \neq \emptyset$. Also x Häufungswert von (x_n). Damit gibt es konvergente Teilfolge.
2. „2. ⇒ 1.“
   (a) Ist X folgenkompakt, so gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $F \subseteq X$, F endlich, sodass
   $$X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$
   (:⇔ X präkompakt)

   Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_n), sodass
   $$x_n \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, \varepsilon)$$
   Damit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$. Damit enthält (x_n) keine Cauchy-Folge, also auch keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

(b) Sei $\mathcal{S}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es $\lambda > 0$, sodass für jedes $x \in X$ ein $U_x \in \mathcal{S}$ mit $B(x,\lambda) \subseteq U_x$. ($\lambda$ heißt Lebesgue-Zahl der Überdeckung).

Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge (x_n) in X, sodass $B(x_n, \frac{1}{n})$ in keinem $U \in \mathcal{S}$ enthalten ist für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$, $x_{n_j} \to x$. Es gibt $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{1}{N}) \subseteq U$. Für große j ist $n_j \geq 2N$ und $x_{n_j} \in B(x, \frac{1}{2N})$ und daher

$$B\left(x_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subseteq B(x, \frac{1}{N}) \subseteq U$$

Widerspruch!

Zu λ gibt es nach a) $F \subseteq X$, endlich, mit

$$X = \bigcup_{x \in F} \underbrace{B(x,\lambda)}_{\subseteq U_x}$$

Also $\{U_x, x \in F\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{S}$.

22.4 Satz von Heine-Borel

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1. A kompakt
2. A beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

- A kompakt $\Leftrightarrow$ A folgenkompakt nach Satz 22.3
- A folgenkompakt $\Leftrightarrow$ A abgeschlossen und beschränkt nach Satz 12.4

23 Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Kurve in $\mathbb{R}^n$: stetige Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall ist. Dann:
$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$
wobei $f_j : I \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$.
- f differenzierbar in $a \in I$:
$$:\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a)) =: f'(a)$$
($\Leftrightarrow f_1, \ldots, f_n$ in a differenzierbar).

  f'(a) heißt Tangentialvektor zum Parameterwert a. $\frac{f'(a)}{|f'(a)|}$ heißt Tangenteneinheitsvektor, falls $f'(a) \neq 0$.
- f (stetig) differenzierbar $\Leftrightarrow$ f in jedem Punkt differenzierbar (und f' stetig).
- f regulär $\Leftrightarrow$ f stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ (schließt „Spitzen“ aus).

Beispiele:

1. $a \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$$f(t) = a + t \cdot v$$
Gerade, regulär ($f'(t) = v \neq 0$)
2. $r > 0, c \neq 0, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$$f(t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$
Schraubenlinie
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)^T$. Singulär in t=0

23.1 Rektifizierbarkeit

- Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Für eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ist
$$\ell(f; t_0, \ldots, t_n) := \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$
die Länge des Polygonzuges, der $f(t_0), \ldots, f(t_n)$ geradlinig verbindet.
- f heißt rektifizierbar mit Länge $\ell(f)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ existiert, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ mit Feinheit $\max_{1 \leq j \leq n}\{|t_j - t_{j-1}|\} < \delta$ gilt:
$$|\ell(f; t_0, \ldots, t_n) - \ell(f)| \leq \varepsilon$$

23.1.1 Satz: Rektifizierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f rektifizierbar und

$$\ell(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$$

Vorarbeit zum Beweis:

- Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ definieren wir

  $$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j}$$

  das Skalarprodukt. Es gilt:

  $$\begin{aligned} (x|x) &= |x|_2^2 \\ |(x|y)| &\leq |x|_2 \cdot |y|_2 \qquad \text{(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)} \end{aligned}$$

23.2 Hilfssatz: „Mittelwertsatz“

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$, sodass

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \cdot |f'(\xi)|$$

Beweis:

- Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto (y|f(t))$ stetig, auf (a,b) stetig differenzierbar. Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi_y \in (a, b)$ mit:

  $$(y|f(b) - f(a)) = (y|f'(\xi_y)) \cdot (b - a)$$

  Für $y = f(b) - f(a)$ ergibt sich:

  $$\begin{aligned} |f(b) - f(a)|^2 &= (f(b) - f(a)|f'(\xi)) \cdot (b - a) \\ &\leq (b - a) \cdot |f(b) - f(a)| \cdot |f'(\xi)| \end{aligned}$$

Beweis zu Satz 23.1:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f'(t) - f'(s)| \leq \varepsilon$ für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|t - s| \leq \delta$ (f' gleichmäßig stetig).
- Sei $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ eine Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$. Dann:

  $$\begin{aligned} &\left| \int_a^b |f'(t)|\, dt - \sum_{j=1}^{k} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \right| \\ \leq\ & \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|\, dt - |f(t_j) - f(t_{j-1})| \right| \\ =\ & \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(|f'(t)| - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})| \right) dt \right| \\ \leq\ & \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| f'(t) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \cdot (f(t_j) - f(t_{j-1})) \right| dt \\ =\ & \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)|\, dt \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 23.2 mit der Funktion $s \mapsto f(s) - s \cdot f'(t)$ existiert ein $\xi_j \in (t_{j-1}, t_j)$ mit:

$$\begin{aligned} |f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)| &\leq (t_j - t_{j-1}) \cdot |f'(\xi_t) - f'(t)| \\ &\leq (t_j - t_{j-1}) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f'(t)|\, dt - \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| \right| &\leq \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \cdot \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon \cdot (b-a) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Geradenstück. Es sei $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, a \in \mathbb{R}^n,\ f : [0,1] \to \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(t) &= a + t \cdot v \\ \ell(f) &= \int_0^1 |f'(t)|\, dt = \int_0^1 |v|\, dt = |v| = |f(1) - f(0)| \end{aligned}$$

2. Kreisbogen, $0 \leq t \leq \varphi$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ \ell(f) &= \int_0^\varphi |\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}|\, dt = \varphi \end{aligned}$$

3. Zykloide: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \\ \ell(f) &= \int_0^{2\pi} |f'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt \\ &= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Dann:

$$\ell(\varphi) = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Bogenlänge des Graphen von f

23.3 Parametertransformation

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig und bijektiv. Dann ist $g = f \circ \varphi$ eine Kurve, φ heißt Parametertransformation.

1. φ streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow$ φ orientierungstreu
2. φ streng monoton fallend $:\Leftrightarrow$ φ orientierungsumkehrend

Bemerkung:

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, φ Parametertransformation. Dann f rektifizierbar $\Leftrightarrow$ $f \circ \varphi$ rektifizierbar. Es gilt: $\ell(f) = \ell(f \circ \varphi)$.

  Beweis:

  1. „$\Rightarrow$“ (mit φ orientierungstreu)

     Es sei f rektifizierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit Feinheit $\leq \delta$ gilt:

     $$|\ell(f) - \ell(f; t_0, \ldots, t_k)| \leq \varepsilon$$

     Außerdem φ gleichmäßig stetig. Es existiert ein $\delta' > 0$: Aus $|s - s'| \leq \delta'$ folgt $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \delta$. Ist $\alpha = s_0 < \ldots < s_k = \beta$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta'$, dann $a = \varphi(s_0) < \ldots < \varphi(s_k) = b$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$.

     $$\begin{aligned} |\ell(f) - \ell(f \circ \varphi, s_0, \ldots, s_k)| &= |\ell(f) - \ell(f; \varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_j))| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

  2. „$\Rightarrow$“

     Wegen $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stetig (Satz 13.1) folgt $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$. Damit gilt auch Umkehrung.

24

Partielle Ableitungen

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$. f in a partiell differenzierbar in der j-ten Koordinatenrichtung
$$:\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot e_j) - f(a)}{h} =: \partial_j f(a)\,\text{existiert}$$
wobei $e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$.

  ($\Leftrightarrow$ Die Funktion $U_a \ni t \mapsto f(a_1,\ldots,a_{j-1},t,a_{j+1},\ldots,a_n) \in \mathbb{R}$ ist in a_j differenzierbar, wobei $U_a = \{t \in \mathbb{R}; (a_1,\ldots,a_{j-1},t,a_{j+1},\ldots,a_n) \in U\}$)

  Es gilt:
$$\partial_j f(a) = \frac{d}{dt} f(a_1,\ldots,a_{j-1},t,a_{j+1},\ldots,a_n)\Big|_{t=a_j}$$

- f (stetig) partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $\partial_j f(x)$ existiert für alle $x \in U$ für $j = 1,\ldots,n$ (und f und $\partial_j f$ für $j = 1,\ldots,n$ stetig).

- Bezeichnungen:
$$\partial_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) (= D_j f(x))$$

- Beispiele:

  1. $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) = |x| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}}$. r ist auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ partiell differenzierbar. Es gilt:
  $$\partial_j r(x) = \frac{x_j}{|x|}$$
  Beweis: Aus Kettenregel für $t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + t^2 + \ldots + x_n^2}$ erhält man:
  $$\begin{aligned} \partial_j r(x) &= \frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + t^2 + \ldots + x_n^2}} \\ &= \frac{x_j}{|x|} = \frac{x_j}{r(x)} \end{aligned}$$

  2. partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig
  $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2} & f(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & f(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann
$$\text{grad}\, f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

Gradient von f, auch $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x)$ (Nabla-Operator). (Später: grad f(x) Richtung des stärksten Anstiegs von f.)

Beispiel:

$$r(x) := |x| \;\Rightarrow\; \operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{|x|}$$

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. f heißt ...
  - ... zweimal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ f partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ nochmal partiell differenzierbar
  - ... k-mal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ f (k-1)-mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ nochmal partiell differenzierbar
  - ... k-mal stetig differenzierbar $\Leftrightarrow$ k-mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen der Ordnungen $\leq n$ stetig.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^3$

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1, x_2) &= 2 \cdot x_1 \cdot x_2^3 \\
\partial_2 f(x_1, x_2) &= 3 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \\
\partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) &= 2 \cdot x_2^3 \\
\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\
\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\
\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1^2 \cdot x_2
\end{aligned}$$

24.1 Satz: Schwarz-Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Sei $a \in U$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\partial_j \partial_k f, \partial_k \partial_j f$ stetig in a. Dann:

$$\partial_j \partial_k f(a) = \partial_k \partial_j f(a)$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung ist n=2, a=0, j=1, k =2.
- Es gibt $\delta > 0$, sodass $[-\delta, \delta]^2 \subseteq U$. Sei $0 < s < \delta$ und $0 < t < \delta$. Dann mit Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned}
& f(s,t) - f(0,t) - (f(s,0) - f(0,0)) \\
= \;& t \cdot \frac{d}{d\tau}(f(s,\tau) - f(0,\tau))|_{\tau = t_1} \qquad \text{MWS} : \exists t_1 (0 < t_1 < t) \\
= \;& t \cdot (\partial_2 f(s, t_1) - \partial_2 f(0, t_1)) \\
= \;& t \cdot s \cdot \frac{d}{d\sigma}(\partial_2 f(\sigma, t_1))|_{\sigma = s_1} \qquad \text{MWS} : \exists s_1 (0 < s_1 < s) \\
= \;& t \cdot s \cdot \partial_1 \partial_2 f(s_1, t_1)
\end{aligned}$$

- Aber auch (wie oben):

$$\begin{aligned}
& f(s,t) - f(s,0) - (f(0,t) - f(0,0)) \\
= \;& \ldots \\
= \;& s \cdot t \cdot \partial_2 \partial_1 f(s_2, t_2)
\end{aligned}$$

  Damit:

$$t \cdot s \partial_1 \partial_2 f(s_1, t_1) = t \cdot s \cdot \partial_2 \partial_1 f(s_2, t_2)$$

- Für $t, s \to 0$:

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) = \partial_2 \partial_1 f(0,0)$$

  da Ableitungen stetig in a.

Bemerkung: $\partial_j \partial_k f(a) \neq \partial_k \partial_j f(a)$ kann vorkommen, ist aber „pathologisch“.

24.2 Folgerung: Vertauschen partieller Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Seien $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation. Dann

$$\partial j_1 \ldots \partial_{j_k} f = \partial_{j_{\pi(1)}} \ldots \partial_{j_{\pi(k)}} f$$

Notation: Ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex,

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \qquad \text{Ordnung von } \alpha \\
\partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} \\
&:= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f \\
&= \underbrace{\partial_1 \ldots \partial_1}_{\alpha_1} \ldots \underbrace{\partial_n \ldots \partial_n}_{\alpha_n} f
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. n=2

$$\partial^{(2,0)} f = \partial_1 \partial_1 f \qquad \partial^{(1,1)} f = \partial_1 \partial_2 f$$

2. (a) Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(|x|)$. Berechne $\triangle\, g$ (Laplace-Operator).

$$\begin{aligned}
\triangle\, g &:= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g \\
\partial_j g(x) &= f'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|} \\
\partial_j^2 g(x) &= f''(|x|) \cdot \frac{x_j^2}{|x|^2} + f'(|x|) \cdot \left(\frac{1}{|x|} + x_j \cdot (-\frac{1}{|x|^2}) \cdot \frac{x_j}{|x|} \right) \\
\Rightarrow \triangle\, g &= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g(x) \\
&= f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} \cdot f'(|x|)
\end{aligned}$$

(b) Zeige, dass $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}$

$$F(t,x) = \frac{\cos(|x| - ct)}{|x|}$$

eine Lösung der Wellengleichung ist

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t} - c^2 \triangle_x \right) \cdot F(t,x) = 0$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t} F(t,x) &= \frac{\cos''(|x| - ct)}{|x|} \cdot (-c)^2 \\
&= -\frac{c^2}{|x|} \cdot \cos(|x| - ct)
\end{aligned}$$

Mit $f(r) := \frac{\cos(r-ct)}{r}$ gilt mit a):

$$\begin{aligned}
\triangle_x F(x,t) &= f''(|x|) + \frac{2}{|x|} \cdot f'(|x|) \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot (r \mapsto r \cdot f(r))''(|x|) \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot \cos''(r-ct)(|x|) \\
&= -\frac{1}{|x|} \cdot \cos(|x|-ct)
\end{aligned}$$

25
Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$. f in a differenzierbar (total differenzierbar/Fréchet-differenzierbar)

$$
\begin{aligned}
:\Leftrightarrow \quad & \exists A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}\,, \varphi : U \to \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0, \text{sodass} \\
& f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x)
\end{aligned}
$$

  für alle $x \in U$. A heißt Ableitung von f in a. A ist eindeutig bestimmt.

  Schreibweise: $f'(a) = \partial f(a) = Df(a) = A$

- Bemerkungen:

  1. Für $m = n = 1$ übliche Differenzierbarkeit, vgl. Kapitel 15 (Weierstraßsche Zerlegungsformel)
  2. Äquivalenz zur Definition:
  $$\lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a) - A \cdot (x-a)}{|x-a|}}_{\varphi(x)} = 0$$
  3. f in a differenzierbar $\Rightarrow$ f in a stetig
  4. Ableitung eindeutig: Seien $A, \varphi, \widetilde{A}, \widetilde{\varphi}$ wie in Definition. Dann:
  $$A \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x) = \widetilde{A} \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \widetilde{\varphi}(x)$$
  Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Für t nahe bei 0 gilt $x = a + t \cdot \xi \in U$. Also:
  $$
  \begin{aligned}
  t \cdot A \cdot \xi + t \cdot |\xi| \cdot \varphi(a + t\cdot\xi) &= t \cdot \widetilde{A} \cdot \xi + t \cdot |\xi| \cdot \widetilde{\varphi}(a + t \cdot \xi) \\
  A \cdot \xi + |\xi| \cdot \varphi(a + t \cdot \xi) &= \widetilde{A} \cdot \xi + |\xi| \cdot \widetilde{\varphi}(a + t \cdot \xi)
  \end{aligned}
  $$
  Für $t \to 0$: $A \cdot \xi = \widetilde{A} \cdot \xi$, damit $A = \widetilde{A}$.
  5. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $m \times n$-Matrix. Sei
  $$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$
  Dann Definition:
  $$f_j(x) = f_j(a) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot (x_k - a_k) + |x-a| \cdot \varphi_j(x)$$
  für $j = 1, \ldots, m$. Daraus folgt: f in a differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f_j : U \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar für $j = 1, \ldots, m$

25.1 Satz: Berechnung der Jacobi-Matrix

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ differenzierbar. Dann gilt: Alle Komponenten $f_j : U \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ sind im Punkt a partiell differenzierbar und es gilt:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \dots & \partial_n f_n(a) \end{pmatrix} = (\partial_k f_j(a))_{j=1,\dots,m;k=1,\dots,n}$$

Die Matrix $J_f(a) = f'(a)$ heißt auch Jacobi-Matrix bzw. Funktionalmatrix.

Beweis:

- Sei $A = f'(a)$, $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m)^T$ wie in Definition. Für $j = 1, \dots, m$:

  $$f_j(x) = f_j(a) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot (x_k - a_k) + |x - a| \cdot \varphi_j(x)$$

  Für $k = 1, \dots, n$, $h \in \mathbb{R}$ nahe bei 0:

  $$f_j(a + h \cdot e_k) = f_j(a) + h \cdot a_{jk} + |h| \cdot \varphi_j(a + h \cdot e_k)$$

  Daher existiert

  $$\partial_k f_j(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h} = a_{jk}$$

Beispiel:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. Dann:

   $$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

   Achtung:

   $$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = f'(x_1, x_2)^T$$

   Aber: Differenzierbarkeit nicht gezeigt.

25.2 Satz: Totale Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ in U partiell differenzierbar. Alle Ableitungen $\partial_j f$ seien in $a \in U$ stetig. Dann f in a differenzierbar.

Beweis:

- Es existiert $\delta > 0$, sodass $B(a, \delta) \subseteq U$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| < \delta$. Definiere

  $$x^{(j)} = a + \sum_{k=1}^{j} \xi_k \cdot e_k \qquad (j = 0, \dots, n)$$

  Dann $x^{(0)} = a, x^{(n)} = a + \xi$. Es gilt:

  $$\begin{aligned} f(a + \xi) - f(a) &= \sum_{j=1}^{n} (f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)})) \\ &=^* \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) \cdot \xi_j \qquad (\vartheta_j \in (0,1)) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot \xi_j}_{A \cdot \xi} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \xi_j \big(\partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) - \partial_j f(a)\big)}_{|\xi| \cdot \varphi(a+\xi)} \end{aligned}$$

mit $A = (\partial_1 f(a) \dots \partial_n f(a))$. Bei *: Anwendung von Mittelwertsatz auf $g(t) := f(x^{(j-1)}+t\cdot e_j)$ mit $g : [0, \xi_j] \to \mathbb{R}$.

- Es gilt mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\varphi(a+\xi)| &\le \left(\sum_{j=1}^{n} |\partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) - \partial_j f(a)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\to 0 \ (|\xi| \to 0) \end{aligned}$$

Damit f in a differenzierbar.

Bemerkungen:

1. $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig
2. f stetig differenzierbar (:$\Leftrightarrow$ f stetig partiell differenzierbar) $\Rightarrow$ f differenzierbar $\Rightarrow$ f partiell differenzierbar (Umkehrung i.A. falsch)

25.3 Satz: Kettenregel

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V$. Sei f in $a \in U$ differenzierbar, g in f(a) differenzierbar. Dann $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ in a differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Beweis:

- Sei $A = f'(a), B = g'(f(a))$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + A \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x) \\ g(y) &= g(f(a)) + B \cdot (y - f(a)) + |y - f(a)| \cdot \psi(y) \end{aligned}$$

mit $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \lim_{y \to f(a)} \psi(x) = 0$. Dann:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(a) + B \cdot (f(x) - f(a)) + |f(x) - f(a)| \cdot \psi(f(x)) \\ &= (g \circ f)(a) + B \cdot A \cdot (x-a) + \\ &\quad \underbrace{|x-a| \cdot B \cdot \varphi(x) + |A \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x)| \cdot \psi(f(x))}_{=|x-a| \cdot \omega(x)} \end{aligned}$$

- Es gilt:

$$|\omega(x)| \le |B \cdot \varphi(x)| + \left| A \cdot \frac{x-a}{|x-a|} \right| \cdot |\psi(f(x))| + |\varphi(x)| \cdot |\psi(f(x))|$$

Außerdem (Satz vom Maximum):

$$\begin{aligned} \left| A \cdot \frac{x-a}{|x-a|} \right| &\le \sup\{|A \cdot \xi|; |\xi| = 1\} \\ &=: \|A\| < \infty \end{aligned}$$

Somit $g \circ f$ in a differenzierbar, $(g \circ f)'(a) = B \cdot A$.

Speziell: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $g(I) \subseteq U$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g_1(t), \dots, g_n(t)) &= (f \circ g)'(t) \\ &= f'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 f & \dots & \partial_n f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(t)) \cdot g_j'(t) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, so heißt

$$\partial_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}$$

  Richtungsableitung, falls diese existiert.

- Ist f in Punkt a differenzierbar, dann existiert $\partial_v f(a)$ für jedes v. Es gilt:

$$\partial_v f(a) = (v|\operatorname{grad} f(a))$$

  Begründung: Kettenregel

$$\begin{aligned}
g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, g(t) &= a + t \cdot v \\
\frac{\partial}{\partial t}(f \circ g)(0) &= f'(g(0)) \cdot g'(0) \\
&= f'(a) \cdot v \\
&= (\partial_1 f(a) \dots \partial_n f(a)) \cdot v \\
&= (v|\operatorname{grad} f(a))
\end{aligned}$$

- Ist $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, so wird $\partial_v f(a)$ maximal für

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|}$$

  (=Richtung des größten Anstieges von f im Punkt a)

  Begründung: Für alle v gilt:

$$|(v|\operatorname{grad} f(a))| \leq |\operatorname{grad} f(a)|$$

  Für $v = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|}$ gilt:

$$|(v|\operatorname{grad} f(a))| = |\operatorname{grad} f(a)|$$

  „=“ gilt nur für dieses v

26 Normierte Räume, lineare Abbildungen

- Normierter Raum $(X, \|.\|)$
  - X Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
  - $\|.\|$ Abbildung $X \to [0, \infty)$ mit
    1. $\forall \lambda \in K, \forall x \in X : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (absolut homogen)
    2. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
    3. $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Mit der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ wird $(X, \|.\|)$ zum metrischen Raum.

- Banachraum: vollständiger normierter Raum
- Beispiele:
  1. $(\mathbb{R}^n, |.|_2)$, $(\mathbb{C}^n, |.|_2)$ Banachräume
  2. $C[0, 1] := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f \,\text{stetig}\}$ $\|f\|_{[0,1]} := \sup\{|f(t)|; 0 \leq t \leq 1\}$ Dann $(C[0, 1], \|.\|_{[0,1]})$ Banachraum:
     (a) Homogenität:

     $$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{\underbrace{|\lambda f(t)|}_{|\lambda|\cdot|f(t)|}; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \lambda \cdot \sup\{|f(t); 0 \leq t \leq 1\} = |\lambda| \cdot \|f\|_[0, 1] \end{aligned}$$

     (b) Dreiecksungleichung:

     $$\begin{aligned} \|f + g\|_{[0,1]} &= \sup\{|f(t) + g(t)|; 0 \leq t \leq 1\} \\ |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \\ &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \\ \Rightarrow \|f + g\|_{[0,1]} &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

     (c) Vollständigkeit: später (siehe auch §20)

26.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen

Seien X,Y normierte Räume, $A : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

1. A stetig
2. $\|A\|_A := \sup\{\|A(x)\|_Y; x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt für alle $x \in X$:

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A\|_A \cdot \|x\|_X$$

$\|A\|$ heißt Norm von A.

Beweis:

1. $1 \Rightarrow 2$
   - Da A stetig, ist A stetig in 0 und wegen Linearität $A(0) = 0$. Also:
   $$\exists \delta > 0\, \forall x \in X \text{ mit } \|x - 0\| \leq \delta : \|A(x)\| \leq 1$$
   Für $x \in X, \|x\| \leq 1$, ist $\|\delta \cdot x\| \leq \delta$, also $\|A(\delta x)\| \leq 1 \Rightarrow \delta \cdot \|A(x)\| \leq 1$. Somit:
   $$\|A\| \leq \frac{1}{\delta}$$
2. Zusatz, falls 2 gilt:
   - Falls $x \in X, x \neq 0$, ist:
   $$\begin{aligned} \left\| A \left(\underbrace{\frac{1}{\|x\|} \cdot x}_{\|\cdot\|=1} \right) \right\| &\leq \|A\| \\ \frac{1}{\|x\|} \cdot \|A(x)\| &\leq \|A\| \end{aligned}$$
3. $2 \Rightarrow 1$
   - Mit Zusatz gilt:
   $$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &= \|A(x - y)\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$
   Also A lipschitz-stetig, damit auch stetig.

Notation: $Ax := A(x)$

Beispiele:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h. A lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
   $$\begin{aligned} \|A\| &:= \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\} \\ (&= \max\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}) \end{aligned}$$
   Nimmt man auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ andere Normen, so ändert sich die Matrixnorm.
2. Ist $z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (Zeilenvektor) dann gilt:
   $$\|z\| = \left(\sum z_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = |z^T|$$
   Begründung: Für $x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1$ gilt mit Schwarzscher Ungleichung:
   $$|zx| = |(z^T|x) \leq |z^T| \cdot |x|$$
   Damit $\|z\| \leq |z^T|$. Für $x = \frac{1}{|z^T|} \cdot z^T$ gilt :
   $$z \cdot x = \frac{1}{|z^T|}(z^T|z^T) = |z^T|$$
3. Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $K : C[0,1] \to C[0,1]$ durch
   $$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,y) \cdot f(y)\, dy \qquad (x \in [0,1])$$

(Kf stetig.) Dann K linear ($K(\alpha f + g) = \alpha \cdot Kf + Kg$) und K stetig:

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \int_0^1 |k(x,y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \underbrace{\sup_{x,y\in[0,1]} |k(x,y)|}_{=:C} \cdot \|f\|_{[0,1]} \\ \Rightarrow \|Kf\|_{[0,1]} &\leq C \cdot \|f\|_{[0,1]} \\ \|K\| &\leq C \end{aligned}$$

Dann Satz 26.1

26.2 Satz: Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x, y \in U$, sodass

$$\{(1-t) \cdot x + t \cdot y; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$$

Dann gibt es $t_0 \in (0,1)$, sodass

$$|f(y) - f(x)| \leq \|f'((1-t_0) \cdot x + t_0 \cdot y)\| \cdot |y - x|$$

Beweis:

1. n=1
   - f differenzierbar auf $[x, y]$ (o.E. $x < y$). Für $z \in \mathbb{R}^m, |z| = 1$ gilt mit Mittelwertsatz

   $$\begin{aligned} (z|f(y) - f(x)) &= (z|f(y)) - (z|f(x)) \\ &= (y-x) \cdot (z|f'(\xi_z)) \qquad (\exists \xi_z \in (x,y)) \\ &\leq |f'(\xi_z)| \cdot (y-x) \end{aligned}$$

   - Für $z := \frac{1}{|f(y)-f(x)|} \cdot (f(y) - f(x))$ folgt die Behauptung.
2. allgemeiner Fall:

   $$\begin{aligned} g : [0,1] \to \mathbb{R}^m, g(t) &:= f((1-t) \cdot x + t \cdot y) \\ &= f(x + t \cdot y) \\ |f(y) - f(x)| &= |g(1) - g(0)| \\ &\leq |g'(\xi)| \\ g'(t) &= f'(x + t \cdot (y-x)) \cdot (y-x) \\ &\leq \|f'(x + \xi \cdot (y-x)\| \cdot |y-x| \end{aligned}$$

Weitere Normen auf $\mathbb{K}^n$:

- Für $1 \leq p < \infty$ sei $|.|_p : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ definiert durch

  $$|x|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

  Außerdem

  $$|x|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

Gezeigt werden soll: $|.|_p$ ist Norm. Eigenschaften 1 und 3 leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot x|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda \cdot x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda|^p \cdot |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot |x|_p \\ |x|_p = 0 &\Leftrightarrow x_j = 0\,(j = 1, \ldots, n) \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ heißt
  - konvex $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in (0,1)$:

$$f((1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \le (1-\lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$$

  - konkav $:\Leftrightarrow$ -f konvex

26.3 Satz: Konvexe Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $f^{(2)}(x) \ge 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f konvex. (Umkehrung gilt auch, s. Übung)

Beweis:

- Aus $f^{(2)}(x) \ge 0$ folgt $f' : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in D, \lambda \in (0,1)$,

$$x := (1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2$$

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $x_1 < x_2$. Daher $x_1 < x < x_2$. Mit Mittelwertsatz: Es existieren $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= f'(\xi_1) \\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &= f'(\xi_2) \end{aligned}$$

  Wegen Monotonie: $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$.

- Mit

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \qquad x_2 - x = (1-\lambda) \cdot (x_2 - x_1)$$

  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda \cdot (x_2 - x_1)} &\le \frac{f(x_2) - f(x)}{(1-\lambda) \cdot (x_2 - x_1)} \\ f(x) &\le (1-\lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

26.4 Folgerung

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \ge 0$:

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $x, y > 0$. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav, denn $\ln^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Damit:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p} \cdot x + \frac{1}{q} \cdot y\right) &\geq \frac{1}{p} \cdot \ln x + \frac{1}{q} \cdot \ln y \\ &= \ln(x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}) \end{aligned}$$

  Da exp monoton wachsend ist, folgt die Behauptung

26.5 Satz: Höldersche Ungleichung

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $x = (x_1 \ldots x_n)$ und $y = (y_1 \ldots y_n) \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |x|_p \cdot |y|_q \end{aligned}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $|x|_p \neq 0$, $|y|_p \neq 0$. Sei

$$\xi = \frac{1}{|x|_p} \cdot x \qquad \eta = \frac{1}{|y|_q} \cdot y$$

  Dann $|\xi|_p = 1$ und $|\eta|_q = 1$.

- Mit Folgerung 26.4:

$$\begin{aligned} \frac{|x_j \cdot y_j}{|x|_p \cdot |y|_q} &= |\xi_j|^{p \cdot \frac{1}{p}} \cdot |\eta|^{q \cdot \frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{|\xi_j|^p}{p} + \frac{|\eta_j|^q}{q} \end{aligned}$$

  Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|_p \cdot |y|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j|^p &\leq \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)}_{1} + \frac{1}{q} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)}_{1} \\ &= 1 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| &\leq |x|_p \cdot |y|_q \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Für p=q=2: Schwarzsche Ungleichung

26.6 Satz: Minkowskische Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty)$. Für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

(Dreiecksungleichung für $|\cdot|_p$)

Beweis:

- Klar für p=1.
- Sei $p > 1$, wähle q, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ mit

$$z_j := |x_j + y_j|^{p-1} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \cdot |z_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot z_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j \cdot z_j| \\
&\overset{26.5}{\leq} (|x|_p + |y|_p) \cdot |z|_q
\end{aligned}$$

Dabei gilt mit $p + q = p \cdot q$:

$$\begin{aligned}
|z|_q &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1) \cdot q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}} \\
&= |x + y|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung:

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

27
Taylorformel, lokale Extrema

- Für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:
$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$
- Polynomische Formel: Für $x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\frac{1}{m!}(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$
wobei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

  Begründung:

  - Es gilt:
$$\frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha$$
mit geeigneten c_α. Für $|\alpha| = m$:
$$\begin{aligned} \partial^\alpha \left(\frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \ldots + x_n)^m \right) &= 1 \\ \partial^\alpha \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha \right) &= c_\alpha \cdot \alpha! \end{aligned}$$
(Es gilt: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| = |\beta| = m$:
$$\partial^\alpha x^\beta = \begin{cases} \alpha! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

27.1 Hilfssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, f m-mal stetig differenzierbar, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit
$$\{x + t \cdot \xi; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$$
Sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$
$$g(t) := f(x + t \cdot \xi)$$
Dann:
$$\frac{1}{m!} g^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \xi^\alpha$$

Beweis:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x+t\cdot\xi)\xi_j = (\xi_1\partial_1+\ldots+\xi_n\partial_n)f(x+t\cdot\xi) \\ \frac{1}{2}g''(t) &= \frac{1}{2}(\xi_1\partial_1+\ldots+\xi_n\partial_n)^2 f(x+t\cdot\xi) \\ &= \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha\cdot\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi) \\ \Rightarrow \frac{1}{m!}g^{(m)}(t) &= \frac{1}{m!}(\xi_1\partial_1+\ldots+\xi_n\cdot\partial_n)^m f(x+t\cdot\xi) \\ &= \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha\cdot\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi) \end{aligned}$$

27.2 Satz: Taylorsche Formel

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $x+t\cdot\xi\in U$ für $0\le t\le 1$. Sei $f:U\to\mathbb{R}$ (k+1)-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x+\xi)=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha + R_{k+1}(x+\xi)$$

mit

$$R_{k+1}(x+\xi)=(k+1)\cdot\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^k\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi)\,dt\xi^\alpha$$

Beweis:

- Für $g(t):=f(x+t\cdot\xi)$ gilt mit 1-dimensionaler Taylor-Formel:

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\cdot g^{(j)}(0)+\frac{1}{k!}\int_0^1(1-t)^k\cdot g^{(k+1)}(t)\,dt \\ &\overset{27.1}{=} \sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + R_{k+1}(x+\xi) \\ R_{k+1}(x+\xi) &= (k+1)\int_0^1(1-t)^k\frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(t)\,dt \end{aligned}$$

  mit

$$\frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(t)=\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi)\xi^\alpha$$

Bemerkungen:

- Ist $U=B(0,1),\partial^\alpha f=0$ für alle $|\alpha|=k+1$, dann ist f Polynom vom Grad $\le n$.
- Es gilt:

$$P_j(\xi):=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\cdot\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha$$

  ist homogenes Polynom vom j-ten Grad, d.h.

$$P_j(t\cdot\xi)=t^j\cdot P_j(\xi)$$

  da

$$\begin{aligned} (t\cdot\xi)^\alpha &= (t\cdot\xi_1\ldots t\cdot\xi_n)^\alpha \\ &= t^{\alpha_1}\cdot\xi_1^{\alpha_1}\cdots t^{\alpha_n}\cdot\xi_n^{\alpha_n} \\ &= t^{|\alpha|}\cdot\xi^\alpha \end{aligned}$$

Damit Taylorformel:

$$f(x+\xi) = \sum_{j=1}^{k} P_j(\xi) + R_{k+1}(x+\xi)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
P_0(\xi) &= f(x)\\
P_1(\xi) &= \partial_1 f(x)\cdot\xi_1 + \ldots + \partial_n\cdot\xi_n\\
&= (\operatorname{grad} f(x)|\xi)\\
P_2(\xi) &= \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_j\partial_k f(x)\cdot\xi_j\cdot\xi_k\\
&= \frac{1}{2}(A\cdot\xi|\xi)\text{ mit } A = (\partial_j\partial_k f(x))_{j,k=1,\ldots,n} = \operatorname{Hess} f(x)
\end{aligned}$$

(Hess $f(x)$: Hessesche Matrix)

27.3 Folgerung: Restglied Taylorformel

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$. Sei $f:U\to\mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $x+\xi\in U$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha + |\xi|^k\cdot\varphi(\xi)$$

mit $\lim_{\xi\to 0}\varphi(\xi) = 0$.

Für k=2:

$$f(x+\xi) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x)|\xi) + \frac{1}{2}(\operatorname{Hess} f(x)\cdot\xi|\xi) + |\xi|^2\cdot\varphi(\xi)$$

Beweis:

- Nach Taylorformel:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k-1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha + R_k(x+\xi)$$

  mit

$$\begin{aligned}
R_k(x+\xi) &= k\cdot\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{k-1}\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi)\,dt\,\xi^\alpha\\
&= \underbrace{k\cdot\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{k-1}(\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi)-\partial^\alpha f(x))\,dt\cdot\xi^\alpha}_{|\xi|^k\cdot\varphi(\xi)}\\
&\quad + \sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^\alpha
\end{aligned}$$

  Das gilt, falls die Verbindungsstrecke zwischen x und $x+\xi$ in U liegt.

- Sei $\varepsilon>0$. Dann gibt es $\delta>0$ mit $B(x,\delta)\subseteq U$ und

$$|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \le \varepsilon$$

  für alle $y\in B(x,\delta)$ und $|\alpha| = k$.

- Sei $|\xi| \leq \delta$, $|\alpha| = k$. Dann:

$$\begin{aligned}
\underbrace{|\int_0^1 (1-t)^{k-1}(\partial^\alpha f(x+t\cdot\xi) - \partial^\alpha f(x))\,dt\cdot\xi^\alpha|}_{=:C} &\leq \varepsilon\cdot\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt\cdot\xi^\alpha \\
&= \varepsilon\cdot\frac{1}{k}\cdot|\xi|^k
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
|\varphi(\xi)| &\leq \frac{1}{|\xi|^k}\cdot k\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha}\cdot C \\
&\leq \varepsilon\cdot\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!} \\
&= \varepsilon\cdot\frac{1}{k!}\cdot n^k
\end{aligned}$$

Damit Aussage für $x+\xi \in B(x,\delta)$ gezeigt. (Somit auch für alle $x+\xi \in U\backslash B(x,\delta)$).

27.4 Satz: Notwendiges Kriterium für Extremum

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in U$ ein lokales Maximum.

1. Ist f in x partiell differenzierbar, dann $\operatorname{grad} f(x) = 0$.
2. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist $\operatorname{Hess} f(x)$ negativ semidefinit, d.h. $(\operatorname{Hess} f(x)\cdot\xi|\xi) \leq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

1. $t \mapsto f(x+t\cdot e_j)$ hat bei t=0 ein lokales Maximum, daher $\partial_j f(x) = 0$ $(j = 1,\dots,n)$. Also $\operatorname{grad} f(x) = 0$.
2. Nach 1. und Folgerung 27.3: Für $\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ nahe bei 0 gilt:

$$\begin{aligned}
0 \geq f(x+t\cdot\xi) - f(x) &= \frac{t^2}{2}\cdot(\operatorname{Hess} f(x)\cdot\xi|\xi) + t^2\cdot|\xi|^2\cdot\varphi(t\cdot\xi) \\
\frac{1}{2}(\operatorname{Hess} f(x)\cdot\xi|\xi) + |\xi|^2\cdot\varphi(t\cdot\xi) &\leq 0
\end{aligned}$$

Für $t \to 0$ folgt Behauptung.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. A heißt

- ... positiv definit $:\Leftrightarrow (A\cdot\xi|\xi) > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$
- ... positiv semidefinit $:\Leftrightarrow (A\cdot\xi|\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$
- ... negativ definit $:\Leftrightarrow$ -A positiv definit
- ... negativ semidefinit $:\Leftrightarrow$ -A positiv semidefinit
- ... indefinit $:\Leftrightarrow$ A weder positiv noch negativ semidefinit

Bemerkung:

- A positiv definit

$$\Leftrightarrow \forall k =, 1\dots,n : \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{pmatrix} > 0$$

(Hurwitz-Kriterium)

Beispiele:

1. Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,0) &= 0 \\ \operatorname{Hess} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Hess $f(0,0)$ ist positiv definit. Also hat f in (0,0) ein lokales Minimum. (s. Satz 27.5)

   Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ positiv definit, dann

$$g(x,y) := \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

   ein elliptisches Paraboloid.

2. Für $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Hyperbolisches Paraboloid):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,0) &= 0 \\ \operatorname{Hess} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Hess $f(0,0)$ ist indefinit.

27.5 Satz: Hinreichende Kriterien für Extrema

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Dann:

1. Ist Hess $f(x)$ positiv definit, dann hat f in x striktes lokales Minimum.
2. Ist Hess $f(x)$ negativ definit, dann hat f in x ein striktes lokales Maximum.
3. Ist Hess $f(x)$ indefinit, dann hat f kein lokales Extremum in x.

Beweis:

1. Sei $A = \operatorname{Hess} f(x)$. Dann gibt es $\alpha > 0$, sodass

$$(A \cdot \xi|\xi) \geq \alpha \cdot |\xi|^2$$

   für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ($\alpha := \min\{(A \cdot \xi|\xi), |\xi| = 1\} > 0$).

   Nach Folgerung 27.3:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + \frac{1}{2}(A \cdot \xi|\xi) + |\xi|^2 \cdot \varphi(\xi) \\ &\geq f(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha + \varphi(\xi)\right) \cdot |\xi|^2 \end{aligned}$$

   Es gibt $\delta > 0$, sodass $B(x,\delta) \subseteq U$,

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{4}\alpha$$

   für $|\xi| < \delta$. Damit:

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \frac{1}{4}\alpha \cdot |\xi|^2 > f(x)$$

   für $\xi \neq 0$.

2. Betrachte -f

3. Hat f in x ein lokales Extremum, dann Hess $f(x)$ semidefinit nach Satz 27.4

Beispiel:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - x^2 + (x+y)^2$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x + 2(x+y) \\ 2(x+y) \end{pmatrix}$$

Es soll nun gelten $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$. Offensichtlich dann $x = -y$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 2x + 0 \\ &= 2x \cdot (2x^2 - 1) \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \qquad x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x,y) &= 12x^2 \\ \partial_x \partial_y f(x,y) &= 2 \\ \partial_y^2 f(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

(a) Für x_1, y_1 gilt:

$$\operatorname{Hess} f(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hess $f(x_1,y_1)$ ist indefinit (es liegt also kein Extremum vor), da:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 2 > 0 \\ \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= -2 < 0 \end{aligned}$$

(b) Für $x_{2/3}, y_{2/3}$ gilt:

$$\operatorname{Hess} f(x_{2/3},y_{2/3}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hess $f(x_{2/3},y_{2/3})$ ist positiv definit, z.B. nach Hurwitz-Kriterium. Also liegen an (x_2,y_2) und (x_3,y_3) lokale Minima vor.

28

Implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

- Motivation:
  - Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F : U \to \mathbb{R}$. Betrachte $(x, y) \in U$, sodass $F(x, y) = 0$. Existiert ein g(x) mit $F(x, g(x)) = 0$? (Skizze)
- Beispiel:
  - Es sei
$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x_1, x_2, y) := x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$$
    $F = 0$: Einheitssphäre
$$g : \{(x_1, x_2)\,;\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$
    (obere Hälfte der Einheitssphäre)

28.1 Satz: Banach'scher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Sei $\varphi : X \to X$. Es gebe $k \in [0, 1)$, sodass
$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$
für alle $x, y \in X$. Dann besitzt φ genau einen Fixpunkt $x_0 \in X$, d.h.
$$\varphi(x_0) = x_0$$
Beweis:

- Eindeutigkeit: Es sei $x_0, x_1 \in X, \varphi(x_j) = x_j$ (j=0,1), dann gilt:
$$d(x_0, x_1) \quad = \quad d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1)$$
  also $d(x_0, x_1) = 0$.
- Existenz: Sei $x \in X$. Behauptung: $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

  Sei $\alpha := d(x, \varphi(x))$. Dann:
$$d(\varphi^j(x), \varphi^{j-1}(x)) \leq k^{j-1} \cdot \alpha$$
  für $j \in \mathbb{N}$ (Induktion).

  Für $0 \leq n \leq m$ folgt mit Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned} d(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) &\leq \sum_{j=n+1}^{m} d(\varphi^{j-1}(x), \varphi^j(x)) \\ &\leq \alpha \cdot \sum_{j=n+1}^{m} k^{j-1} \\ &\to 0\,(n, m \to \infty) \end{aligned}$$

Also $(\varphi^n(x))_n$ Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert $x_0 := \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)$.

Aus

$$\varphi(\underbrace{\varphi^{n-1}(x)}_{\substack{\downarrow \\ x_0}}) \quad = \quad \underbrace{\varphi^n(x)}_{\substack{\downarrow \\ x_0}}$$

und Stetigkeit von φ folgt $\varphi(x_0) = x_0$.

28.2 Satz über implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : X \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig bzgl. der Metrik $\widetilde{d}$ auf $X \times U$

$$\widetilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|$$

und differenzierbar nach y-Variablen, d.h. für jedes $x \in X$ sei $F(x, \ ) : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Sei $a \in X$, $b \in U$ mit $F(a, b) = 0$. Es sei $\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$ invertierbar ($n \times n$-Matrix) und $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig in (a,b). Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq X$ von a und $V_2 \subseteq U$ von b mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt $g : V_1 \to V_2$ stetig mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V_1$.
2. Aus $(x, y) \in V_1 \times V_2$, $F(x, y) = 0$ folgt $y = g(x)$.

Beweis:

- $B := \frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$ sei invertierbar. Definiere $G : X \times U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$G(x, y) = y - B^{-1} \cdot F(x, y)$$

  Dann

$$F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ G(x, y) = y$$

  (Umwandlung der Nullstellensuche zu $F(x, .)$ in Fixpunktsuche für $G(x, .)$ für festes x)

- Aus

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = E_n - B^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

  folgt:

$$\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) = 0$$

- Da $\frac{\partial G}{\partial y}(.,.)$ in (a,b) stetig ist, gibt es Umgebungen $W_1 \subseteq X$ von a und $W_2 \subseteq U$ von b, sodass

$$\left|\left|\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)\right|\right| \leq \frac{1}{2}$$

  für alle $(x, y) \in W_1 \times W_2$.

- Es gibt $r > 0$, sodass $B_{\mathbb{R}^n}[b, r] \subseteq W_2$. Da $G(a, b) = b$ ist, gibt es eine offene Umgebung $V_1 \subseteq W_1$ von a, sodass

$$\sup_{x \in V_1} |G(x, b) - b| < \frac{r}{2}$$

- Wir zeigen, dass für $x \in V_1$ der Banach'sche Fixpunktsatz auf $G(x, .)$: $B_{\mathbb{R}^n}[b, r] \to \mathbb{R}^n$ anwendbar ist:

– $G(x,.)$ ist „strikte“ Kontraktion:

Für $y, y' \in B_{\mathbb{R}^n}[b,r]$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x,y) - G(x,y')| &\leq \left\|\frac{\partial G}{\partial y}(x, y' + \xi \cdot (y - y'))\right\| \cdot |y - y'| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot |y - y'| \end{aligned}$$

mit geeigneten $\xi \in (0,1)$ nach Satz 26.2 (Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$).

– Für $|y - b| < r$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x,y) - b| &\leq \underbrace{|G(x,y) - G(x,b)|}_{\leq \frac{1}{2}|y-b|} + \underbrace{|G(x,b) - b|}_{<\frac{r}{2}} \\ &< r \end{aligned}$$

Damit: $G(x,.) : B_{\mathbb{R}^n}[b,r] \to V_2 := B_{\mathbb{R}^n}(b,r) \subseteq B_{\mathbb{R}^n}[b,r]$

- Aus Satz 28.1: Existenz und Eindeutigkeit von $g(x) \in V_2$ mit $G(x, g(x)) = g(x)$.
- Stetigkeit von g: Für $x, x' \in V_1$ gilt:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= |G(x, g(x)) - G(x', g(x'))| \\ &\leq |G(x, g(x)) - G(x', g(x))| + |G(x', g(x)) - G(x', g(x'))| \\ &\leq |G(x, g(x)) - G(x', g(x))| + \frac{1}{2} \cdot |g(x) - g(x')| \\ \Rightarrow |g(x) - g(x')| &\leq 2|G(x, g(x)) - G(x', g(x))| \\ &\to 0 \ (x' \to x) \end{aligned}$$

  Also g stetig in x.

Beispiele:

1. Es sei $X = \mathbb{R}^2, n = 1, F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, F(x,y,z) = 0\} \text{ Einheitssphäre}$$

   Es gilt:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$$

   Ist $a \in X, b \in \mathbb{R}$ mit $F(a,b) = 0$, $b > 0$, dann

$$g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

   Ist $b < 0$, dann

$$g(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

2. Sei $X = \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$, $F : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$F((A,b),y) := A \cdot y - b$$

   (Also $F((A,b),y) = 0 \Leftrightarrow A \cdot y = b$).

   Dann:

$$\frac{\partial F((A,b),y)}{\partial y} = A$$

   Satz 28.2: Ist $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A_0 \cdot y_0 = b_0$, so lässt sich für A und b in Umgebungen von A_0 und b_0 die Gleichung $A \cdot y = b$ lösen, mit y stetig abhängig von A und b (d.h. $y = A^{-1} \cdot b$).

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$ und für alle $(x, y) \in U$ mit $f(x, y) = c$ gelte $\operatorname{grad} f(x, y) \neq 0$. Dann „Höhenlinie“
$$\{(x, y); f(x, y) = c\}$$
immer nach x oder y auflösbar.

Differenzierbarkeit der implizit definierten Abbildung g, falls $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen

Vorbetrachtung:

- Ist F in (a,b) differenzierbar, g differenzierbar in a, so folgt mit Kettenregel:
$$\begin{aligned} 0 &= (x \mapsto F(x, g(x)))'(a) \\ &= \frac{\partial F(a, g(a))}{\partial x} + \frac{\partial F(a, g(a))}{\partial y} \cdot g'(a) \\ g'(a) &= -\left(\frac{\partial F(a, b)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a, b)}{\partial x} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Es sei $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Also:
$$\begin{aligned} x^2 + g(x)^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow F(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \\ \Rightarrow 2x + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{-x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

28.3 Satz: Differenzierbarkeit impliziter Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^k, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : X \times U \to \mathbb{R}^n$ mit $(x, y) \mapsto F(x, y)$. Sei $(a, b) \in X \times U$ mit $F(a, b) = 0$, F in (a,b) differenzierbar, $\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$ invertierbar. Sei $g : X \to U$ stetig in a, $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in X$. Dann g in a differenzierbar und es gilt:
$$g'(a) = -\left(\frac{\partial F(a, b)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a, b)}{\partial x}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $(a, b) = (0, 0)$. $A := \frac{\partial F(0,0)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B := \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar.
- F differenzierbar in (0,0):
$$F(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + (|x| + |y|) \cdot \varphi(x, y)$$
mit $\lim_{x,y \to 0} \varphi(x, y) = 0$. F(x,g(x)) schreibt sich also:
$$g(x) = \underbrace{-B^{-1} \cdot A}_{g'(0)} \cdot x - (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))$$
- Beweis, dass zweiter Term sich wie $|x| \cdot \psi(x)$ verhält in 2 Schritten:
  1. $\exists \delta > 0, K > 0$, sodass $B(0, \delta) \subseteq X$ mit
  $$|g(x)| \leq K \cdot |x|$$
  für $|x| < \delta$.

     Beweis:

– Es existiert $\delta > 0$ mit

$$|B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2}$$

für $|x| < \delta$. Damit:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |B^{-1} \cdot A \cdot x| + \frac{1}{2}|g(x)| + \frac{1}{2}|x| \\ |g(x)| &\leq (2\|B^{-1} \cdot A\| + 1) \cdot |x| \end{aligned}$$

2. Für $|x| < \delta$ gilt:

$$g(x) = -B^{-1} \cdot A \cdot x + |x| \cdot \psi(x)$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{|x|} \cdot (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x)) \\ |\psi(x)| &\leq (1 + K) \cdot |B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \\ &\to 0 \ (x \to 0) \end{aligned}$$

28.4 Satz: Stetige Differenzierbarkeit impliziter Funktionen (Zusatz zu 28.2)

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28.2: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $F : X \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann kann V_1 so gewählt werden, dass $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar ist.

Beweis:

- Wähle V_1 so, dass $\frac{\partial F(x,g(x))}{\partial y}$ für alle $x \in V_1$ invertierbar ist. (Möglich, da $\mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det A$ stetig ist) Dann Satz 28.3.
- Die Stetigkeit von g' folgt aus:

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F(x, g(x))}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(x, g(x))}{\partial x}$$

29 Lokale Invertierbarkeit, Lagrange-Multiplikatoren

Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U_1 \to U_2$ heißt Diffeomorphismus :$\Leftrightarrow$ f bijektiv, f und $f^{-1}(: U_2 \to U_1)$ stetig differenzierbar.

Bemerkung:

- Mit $g = f^{-1}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_{U_1} \\ g'(f(x)) \cdot f'(x) &= E_n \end{aligned}$$

  für alle $x \in U_1$, $f'(x)$ ist invertierbar,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1}$$

29.1 Satz: Satz der lokalen Invertierbarkeit, 2. Auflösungssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$, f'(a) invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung U_2 von $f(a) =: b$, sodass $f : U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus ist. Mit $g = f^{-1}$ gilt:

$$g'(b) = f'(a)^{-1}$$

Beweis:

- Sei $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x, y) := f(x) - y$. (Dann $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$, d.h. zum Finden von $g = f^{-1}$ ist $F(x, y) = 0$ nach x „aufzulösen“; beachte vertauschte Rollen von x und y gegenüber 1. Auflösungssatz)
- Es gilt: $F(a, b) = 0$ und

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial x} = f'(a) \,\text{invertierbar}$$

  Auch

$$\begin{aligned} F'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(x) & -E_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  stetig, damit ist F stetig differenzierbar.

- Aus Satz 28.2 und Zusatz 28.4: $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von b, $V \subseteq U$ offene Umgebung von a mit $g : U_2 \to V$ eindeutig definiert durch $F(g(y), y) = 0$ ($\Leftrightarrow f(g(y)) = y$) und g stetig differenzierbar.
- Für $x \in V, y \in U_2$ gilt:

$$x = g(y) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

  Daher

$$U_1 := g(U_2) = f^{-1}(U_2) \cap V$$

  offen (Analysis I, Übung Aufgabe 64). $f : U_1 \to U_2$ bijektiv, $g = f^{-1}|_{U_1}$.

Beispiel:

1. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\,(r,\varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix} \\ f'(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} \\ \det f'(r,\varphi) &= r\cdot\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi = r \neq 0 \end{aligned}$$

   Also $f'(r,\varphi)$ lokal invertierbar.

29.2 Satz: Notwendige Bedingung für lokales Extremum unter Nebenbedingung

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Sei $1\le m\le n$, $f:U\to\mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. $f'(x)$ habe Rang m für alle $x\in U$. Sei $h:U\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a\in U$ mit $f(a)=0$ und h habe in a ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $f=0$, d.h. es gibt eine Umgebung $V\subseteq U$ von a mit $h(a)\ge h(x)$ für alle $x\in V\cap M$, wobei

$$M:=\{x\in U; f(x)=0\}$$

Dann gibt es $\lambda\in\mathbb{R}^m$, sodass

$$\operatorname{grad} h(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{grad} f_j(a)$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_m$ heißen Lagrange-Multiplikatoren. (Notwendige Bedingung für lokales Extremum mit Nebenbedingung, geeignet zur „Kandidatensuche“)

Beweis:

- Nach Umnummerieren der Variablen und Verkleinern von U:

$$\begin{aligned} k &:= n-m \\ x &= (\check{x},\hat{x})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\ f(x)=f(\check{x},\hat{x}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial f(\check{x},\hat{x})}{\partial\hat{x}}(\check{x},\hat{x})\,\text{invertierbar für alle}\,(\check{x},\hat{x})\in U \end{aligned}$$

  (f'(a) hat m linear unabhängige Spalten, o.E. die letzten, d.h. $\frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}$ invertierbar.)

- Satz über implizite Funktionen und Zusatz 28.4: $\exists$ offene Umgebung $\check{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ von $\check{a}$, offene Umgebung $\hat{V}\subseteq\mathbb{R}^{n-k}$ von $\hat{a}$, $g:\check{V}\to\hat{V}$ stetig differenzierbar mit $f(\check{x},g(\check{x}))=0$ für alle $\check{x}\in\check{V}$ und $g(\check{a})=\hat{a}$. $((\check{x},g(\check{x}))\in M)$

- Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= (\check{x}\mapsto f(\check{x},g(\check{x})))'(a) \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} + \frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}\cdot g'(\check{x}) \end{aligned}$$

- Die Funktion $H:\check{V}\to\mathbb{R}$, $\check{x}\mapsto h(\check{x},g(\check{x}))$ besitzt in $\check{x}=\check{a}$ ein lokales Maximum, daher

$$\begin{aligned} 0 &= H'(\check{a}) = \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} + \frac{\partial h(a)}{\partial\hat{x}}\cdot g'(\check{a}) \\ &= \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} - \underbrace{\left(\frac{\partial h(a)}{\partial\hat{x}}\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}^{-1}\right)}_{=:\lambda}\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} \\ \Rightarrow \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} &= \lambda\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} \end{aligned}$$

Auch:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} &= \left(\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}^{-1}\right) \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}} \\ &= \lambda \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}\end{aligned}$$

Also:

$$h'(a) = \lambda \cdot f'(a)$$

Transponiert:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} h(a) &= \begin{pmatrix}\operatorname{grad} f_1(a) & \dots & \operatorname{grad} f_m(a)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} f_j(a)\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Erklärung für m=1:

   Falls grad h(a) nicht gleiche Richtung wie grad f(a), dann würde h in Umgebung von a (auf f=0) noch anwachsen, also a nicht Maximum.

2. Andere Formulierung der Methode:

   Betrachte

   $$H : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ H(x, \lambda) = h(x) - \lambda_1 \cdot f_1(x) - \ldots - \lambda_m \cdot f_m(a)$$

   und suche nach x,λ mit $H'(x, \lambda) = 0$. Dann:

   $$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h(x,\lambda)}{\partial x}^T) = \operatorname{grad} h(x) - \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1(x) \ldots \\ 0 &= \frac{\partial H(x,\lambda)}{\partial \lambda} = -\begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_m(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Lokale Extrema der Funktion

   $$h(x, y) = x \cdot y^2$$

   unter der Nebenbedingung $x + y = 1$

   $$\begin{aligned} f(x,y) &= x + y - 1 \\ \operatorname{grad} h &= \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Zu lösendes Gleichungssystem:

   $$\begin{aligned} y^2 &= \lambda \\ 2xy &= \lambda \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Lösungen:

   $$\begin{aligned} y_1 &= 0 \qquad \lambda = 0 \qquad x_1 = 1 \\ y_2 &= 2x \qquad x_2 = \frac{1}{3} \qquad y_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit:

$$h(x_1, y_1) = 0 \qquad h(x_2, y_2) = \frac{4}{27} > h(x_1, y_1)$$

Globale Betrachtungen bei f=0:

$$\begin{aligned} h(x,y) &\to \infty \qquad (x \to \infty) \\ h(x,y) &\to -\infty \qquad (x \to -\infty) \end{aligned}$$

Also (x_1, y_1) lokales Minimum, (x_2, y_2) lokales Maximum.

2. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann besitzt A eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren, d.h. $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ mit $(x^j|x^k) = \delta_{jk}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $A\cdot x^j = \lambda \cdot x^j$ für $j = 1, \ldots, n$.

   Beweis:

   - Betrachte

     $$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = (A\cdot x|x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\cdot x_j \cdot x_k \\ f_0 &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = |x|^2 - 1 \end{aligned}$$

     Maximumstelle x^1 von h unter $f_0 = 0$ existiert ($\{x; f_0(x) = 0\}$ kompakt und h stetig). Nach Satz 29.2 existiert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$:

     $$\operatorname{grad} h(x^1) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_0(x^1)$$

     Nun gilt wegen der Symmetrie von A:

     $$\begin{aligned} \operatorname{grad} h(x) &= 2Ax \\ \operatorname{grad} f_0(x) &= 2x \\ \Rightarrow A\cdot x^1 &= \lambda_1 \cdot x^1 \end{aligned}$$

     Jetzt weitere Nebenbedingung: $f_1(x) = (x|x^1)$.

     $$\operatorname{grad} f_1(x) = x^1 \qquad \operatorname{grad} f_0(x) = 2x$$

     sind linear unabhängig auf M_2

     $$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; f_0(x) = f_1(x) = 0\}$$

     und daher in Umgebung von M_2. Aus Kompaktheit von M_2 folgt: Es existiert Maximumstelle x^2 von h auf M_2. Nach Satz 29.2 gibt es λ_1', λ_2:

     $$2Ax^2 = 2\lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_1' \cdot x^1$$

     Wegen

     $$(Ax^2|x^1) = (x^2|Ax^1) = \lambda_1' \cdot (x^2|x^1) = 0$$

     folgt

     $$\begin{aligned} 0 &= (2Ax^2 - 2\lambda_2 \cdot x^2 - \lambda_1' \cdot x^1|x^1) \\ &= -\lambda_1' \cdot (x^1|x^1) \\ \Rightarrow \lambda_1' &= 0 \end{aligned}$$

     Also:

     $$Ax^2 = \lambda_2 \cdot x^2$$

     u.s.w. (nächste Nebenbedingung $f_2(x) := (x|x^2)$)

31

Integral von Treppenfunktionen im $\mathbb{R}^n$

- Ziel: Berechnung von Volumina, z.B. $\mathrm{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) &= \int_{B(0,1)} 1\,dx \\ &= 2\int_{B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1)} \sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\,dx_1\ldots dx_{n-1}\end{aligned}$$

- Für $a,b\in\mathbb{R}^n$:

$$a\le b :\Leftrightarrow a_j\le b_j \text{ für alle } j=1,\ldots,n$$

  Falls $a\le b$:

$$\begin{aligned}[a,b] &= [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n] \\ &= \{x\in\mathbb{R}^n; a\le x\le b\}\end{aligned}$$

  (n-dimensionales abgeschlossenes Intervall)

$$\mathrm{vol}_n[a,b] := (b_1-a_1)\cdot\cdots\cdot(b_n-a_n)$$

  (n-dimensionales Volumen (Maß) von [a,b])

- Für $B\subseteq\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{1}_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ \mathbb{1}_B := \begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$$

  Indikatorfunktion von B (charakteristische Funktion), auch $\kappa_b := \mathbb{1}_B$

- Treppenfunktionen:

$$T(\mathbb{R}^n) := \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_{[a,b]}; a,b\in\mathbb{R}^n, a\le b\}$$

  (Vektorraum). Jede Treppenfunktion f hat die Gestalt

$$f=\sum_{j=1}^m c_j\cdot\mathbb{1}_{[a^j,b^j]}$$

  mit $m\in\mathbb{N}$, $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$, $a^1,\ldots,a^m,b^1,\ldots,b^m\in\mathbb{R}^n, a^j\le b^j$ für alle $j=1,\ldots,m$.

- Bemerkungen:

  1. Für n=1: Bekannte Treppenfunktionen, abgesehen davon, dass bisher nur auf Intervallen definiert. Beispiel:

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}_{[-2,0]} + 3\cdot\mathbb{1}_{[0,1]} + 96,5\cdot\mathbb{1}_{[0,0]}$$

  2. Ergänzung: Auch im $\mathbb{R}^n$ ist folgende Definition möglich: Gegeben sei Intervallsystem $\{I\}$ mit $\mathrm{int}\,I\cap\mathrm{int}\,\tilde{I}=\emptyset$ für $I\ne\tilde{I}$.

$$f(x)=c_I \qquad \text{für } x\in\mathrm{int}(I)$$

     Für $x\notin\bigcup I$ sei $f(x)=0$.

3. Sei $1 \leq k \leq n-1$, $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $\hat{x} = (x_{k+1} \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist dann $f(.,\hat{x}) \in T(\mathbb{R}^k)$.

   Beweis:

   – Es genügt $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ zu betrachten. Seien $a = (\check{a}, \hat{a})$, $b = (\check{b}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) \\ &= \mathbb{1}_{[\check{a},\check{b}]}(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a},\hat{b}]}(\hat{x}) \end{aligned}$$

   Damit:

$$f(.,\hat{x}) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[\check{a},\check{b}]} & \text{falls } \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$$

mit $a^j, b^j \in \mathbb{R}^n, a^j \leq b^j$ für $j = 1, \dots, k$ definieren wir das Integral

$$\int f(x)\, dx := \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathrm{vol}_n([a^j, b^j])$$

Hierbei ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, also die rechte Seite unabhängig von der Darstellung von f ist.

31.1 Satz: Eigenschaften des Integrals

1. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist das soeben definierte Integral wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Darstellung ab.
2. Die Abbildung $f \in T(\mathbb{R}^n) \mapsto \int f(x)\, dx$ ist linear.
3. Sei $1 \leq k \leq n-1$. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\hat{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}$ eine Treppenfunktion und

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

   Es folgt somit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, f(x_n)) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n$$

Beweis:

1. • Es genügt zu zeigen: $f \in T(\mathbb{R}^n), f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$ mit $f(x) = 0$ für alle x, so gilt

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}_n [a^j, b^j] = 0$$

   • Für n=1:

   Für $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$ sei $x_0 < \dots < x_l$ mit $\{x_k\} = \{a^j, b^j; j = 1, \dots, m\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}[a^j, b^j] = \sum_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}]$$

Dann:

$$\begin{aligned}\int f &= \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[a^j, b^j] \\ &= \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \sum_{[x_i,x_{i+1}]\subseteq[a^j,b^j]} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}] \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}] \left(\sum_{j:[x_i,x_{i+1}]\subseteq[a^j,b^j]} c_j \right)\end{aligned}$$

Nun gilt für $x \in (x_i, x_{i+1})$:

$$f(x) = \sum_{j:[x_i,x_{i+1}]\subseteq[a^j,b^j]} c_j = 0$$

wegen f=0. Damit $\int f = 0$.

- Sei $n \geq 2$ und die Aussage für $1, \ldots, n-1$ bewiesen. Sei $1 \leq k \leq n-1$. Für $\check{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist die Treppenfunktion

$$f(\check{x}, .) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j,\check{b}^j]}(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}^j,\hat{b}^j]}(.)$$

die Nullfunktion und nach Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j,\check{b}^j]} \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] = 0$$

Abermals nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[\check{a}^j, \check{b}^j] \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] &= 0 \\ \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[a^j, b^j] &= 0 \\ \int f &= 0\end{aligned}$$

2. Klar nach Definition.

3. Es genügt diese Eigenschaft für die Indikatorfunktion zu zeigen (wegen Linearität). Sei $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a},\hat{b}]} \\ \int \left(\int \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x} &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \int \mathbb{1}_{[\hat{a},\hat{b}]} d\hat{x} \\ &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}, \hat{b}] \\ &= \mathrm{vol}[a, b] \\ &= \int f\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Wiederholte Anwendung der letzten Formel von Satz 31.1 ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \ldots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, f(x_n)) dx_1 \right) dx_2 \right) \ldots dx_n$$

2. Obige Formel für allgemeinere Funktionen erlaubt die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen.

31.2 Folgerung: Positivität des Integrals

Aus $f, g \in T(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

Beweis: per Induktion (ähnlich 31.1)

31.3 Satz: Weitere Treppenfunktionen

Sei $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^\pm, |f|, f \wedge 1$ sind ebenfalls Treppenfunktionen.

$$\begin{aligned} f^+ &= \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \max\{f(x), 0\} \\ (f \wedge 1)(x) &= \begin{cases} f(x) & f(x) < 1 \\ 1 & f(x) \geq 1 \end{cases} = \min\{f(x), 1\} \end{aligned}$$

31.4 Hilfssatz

Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{1}_A \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{A}$$

Beweis: siehe Übung

Beweis zu Satz 31.3:

- Sei $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit n-dimensionalen abgeschlossenen Intervallen A_i. Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, k\}$:

  $$\begin{aligned} A_J &:= \bigcap_{j \in J} A_j \backslash \bigcup_{j \notin J} A_j \\ a_J &:= \sum_{j \in J} a_j \end{aligned}$$

  Dann gilt:

  $$f = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, k\}} a_J \cdot \mathbb{1}_{A_J}$$

  und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$. (A_J besteht genau aus den x, die in A_j sind für $j \in J$, aber nicht in A_j für $j \notin J$.) Daher:

  $$\begin{aligned} f^+ &= \sum_J \max\{a_J, 0\} \cdot \mathbb{1}_{A_J} \\ f \wedge 1 &= \sum_J \min\{f(x), 1\} \cdot \mathbb{1}_{A_J} \end{aligned}$$

  sind Treppenfunktionen.

32 Das n-dimensionale Riemann-Integral

- Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann
$$\overline{\int} f(x)\,dx := \inf\{\int \psi(x)\,dx; \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f\}$$
Oberintegral von f,
$$\underline{\int} f(x)\,dx := \sup\{\int \varphi(x)\,dx; \varphi \in T(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f\}$$
Unterintegral von f. (Dabei $\overline{\int} f = \infty$, falls $\nexists \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq f$.) Offenbar $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.
- f heißt Riemann-Integrierbar, wenn
$$\underline{\int} f = \overline{\int} f$$
und $\int f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$.
- Bemerkung: $\overline{f} < \infty \Leftrightarrow \exists \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f \Leftrightarrow$ f nach oben beschränkt und $\exists r > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash B[0,r] : f(x) \leq 0$

32.1 Hilfssatz: Rechenregeln Ober- und Unterintegral

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann:

1. $\underline{\int} f(x)\,dx = -\overline{\int}(-f)(x)\,dx$
2. $\overline{\int} c\dot{f}(x)\,dx = c \cdot \overline{\int} f(x)\,dx$ für $c \geq 0$
3. $\overline{\int}(f+g)(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx + \overline{\int} g(x)\,dx$, falls $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\overline{\int} g(x)\,dx < \infty$

„Rechenregeln“:
$$\begin{array}{rcl} c \cdot \infty & = & \infty \qquad c \cdot (-\infty) = -\infty \qquad (c > 0) \\ \infty + a & = & a + \infty = \infty \qquad (-\infty < a \leq \infty) \\ -\infty + a & = & a - \infty = -\infty \qquad (-\infty \leq a < \infty) \end{array}$$

Beweis:

- Siehe n=1. Für 3.: Es existieren $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $f \leq \varphi$, $g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \varphi + \psi$. Daher:
$$\begin{array}{rcl} \overline{\int} f + g & \leq & \int \varphi + \psi \\ & = & \int \varphi + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g & \leq & \overline{\int} f + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g & \leq & \overline{\int} f + \overline{\int} g \end{array}$$

32.2 Satz: Linearität des Riemann-Integrals

Die Menge $R(\mathbb{R}^n)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum und die Abbildung

$$R(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

ist linear. Aus $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

(Monotonie des Integrals)

Beweis: siehe n=1

Bemerkung:

- Aus Monotonie: Ist $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $m \leq f \leq M$ für geeignete $m, M \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, $f(x) = 0$ für $x \notin [a,b]$, dann
$$m \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \leq f \leq M \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$$
daher:
$$m \cdot \mathrm{vol}_n[a,b] \leq \int f \leq M \cdot \mathrm{vol}_n[a,b]$$

32.3 Satz: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann äquivalent:

1. $f \in R(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}^n) : \varphi \leq f \leq \psi,\ \int(\psi - \varphi)\,dx \leq \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists g, h \in R(\mathbb{R}^n) : g \leq f \leq h,\ \int(h - g)\,dx \leq \varepsilon$

Beweis:

1. 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Klar nach Definition
2. 2. $\Rightarrow$ 3.: Trivial
3. 3. $\Rightarrow$ 1.:

   Sei $\varepsilon > 0$ und g,h wie in 3. vorausgesetzt. dann:

$$\begin{aligned} \int g \leq \underline{\int} f \quad &\leq \quad \overline{\int} f \leq \int h \leq \int g + \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{\int} f - \underline{\int} f \quad &\leq \quad \varepsilon \end{aligned}$$

32.4 Satz: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$, $f|_{[a,b]}$ stetig, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus [a,b]} = 0$. Dann $f \in R(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_{[a,b]}$ gleichmäßig stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass aus $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Man findet eine Überdeckung von [a,b] durch abgeschlossene n-dimensionale Intervalle $Q_1, \ldots, Q_m$ mit Seitenlängen $\leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, alle $Q_j \subseteq [a,b]$. Für $x, y \in Q_j$ folgt dann:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y) < \varepsilon$$

Wir disjunktieren

$$\tilde{Q}_1 := Q_1 \qquad \tilde{Q}_2 := Q_2 \backslash Q_1 \qquad \tilde{Q}_j := Q_j \backslash \cup_{k=1,\ldots,j-1} Q_k$$

und wählen $x^j \in Q_j$ für $j = 1, \ldots, m$ (ohne Einschränkung $\tilde{Q}_j \neq \emptyset$). Nach Hilfssatz 31.4 sind $\mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} \in T(\mathbb{R}^n)$ für $j = 1, \ldots, m$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} - \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}_{=:g} \quad &\leq \quad f \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}_{=:h} \\
\Rightarrow \int (h-g)(x)\, dx \quad &= \quad \int 2\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}\, dx \\
&= \quad 2\varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n[a,b]
\end{aligned}$$

Mit Satz 32.3: $f \in R(\mathbb{R}^n)$

32.4.1 Kompakte Träger

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \, \text{stetig}\}$$

ist ein Vektorraum. Für $f \in C(\Omega)$: Träger von f

$$\mathrm{spt}\, f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

und

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega); \mathrm{spt}\, f \, \text{kompakt}\}$$

Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

$$\mathrm{spt}(f+g) \subseteq \mathrm{spt}(f) + \mathrm{spt}(g)$$

Aus Satz 32.4: $C_c(\mathbb{R}^n) \subset R(\mathbb{R}^n)$

- Beispiele:

  1. $\Omega = (-1,1), \varphi(x) := x^2 - 1$. Dann: $\mathrm{spt}(\varphi) = (-1,1) \Rightarrow \varphi \notin C_c((-1,1))$
  2. $\Omega = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \quad &:= \quad \begin{cases} x^2 - 1 & x \in (-1,1) \\ \quad 0 & x \notin (-1,1) \end{cases} \\
\mathrm{spt}(\varphi) \quad &= \quad [-1,1] \Rightarrow \varphi \in C_c(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

32.5 Satz: Fundamentale Ungleichung

Seien $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^+, f^-, |f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, f \cdot g \in R(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt:

$$\left| \int f(x)\, dx \right| \leq \int |f(x)|\, dx$$

(fundamentale Ungleichung)

Beweis:

- f^+: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Dann $\varphi^+ < f^+ < \psi^+$ und $\psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$ mit $\varphi^+, \psi^+ \in T(\mathbb{R}^n)$. Also:

$$\int (\psi^+ - \varphi^+) \leq \int (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

  Damit $f^+ \in R(\mathbb{R}^n)$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
f^- &= (-f)^+ \in R(\mathbb{R}^n) \\
|f| &= f^+ + f^- \in R(\mathbb{R}^n) \\
\max\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2} \cdot |f - g| \in R(\mathbb{R}^n) \\
\min\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2} \cdot |f - g| \in R(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

- $f \cdot g$: o.E.: $0 \leq f \leq 1, 0 \leq g \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq 1$, $0 \leq \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$, $\int(\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon$, $\int(\psi_2 - \varphi_2) \leq \varepsilon$. Dann:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \leq f \cdot g \leq \psi_1 \cdot \psi_2$$

  mit $\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi_1 \cdot \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$. Damit:

$$\begin{aligned}
\int (\psi_1 \cdot \psi_2 - \varphi_1 \cdot \varphi_2) &= \int \underbrace{(\psi_1 - \varphi_1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\psi_2}_{\leq 1} + \int \underbrace{(\psi_2 - \varphi_2)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\varphi_1}_{\leq 1} \\
&\leq \int (\psi_1 - \varphi_1) + \int (\psi_2 - \varphi_2) \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

- Fundamentale Ungleichung: Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

$$\pm \int f \leq \int |f|$$

32.5.1 Jordan-Messbarkeit

- Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. B heißt Jordan-messbar $:\Leftrightarrow \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\mathrm{vol}_n(B) := \int \mathbb{1}_B(x)\, dx$$

  Volumen (Jordan-Inhalt).

- Für $f \in R(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\mathbb{1}_B \cdot f \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_B f(x)\, dx := \int \mathbb{1}_B \cdot f(x)\, dx$$

- Ebenso: Ist $f : B \to \mathbb{R}$ sodass $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases} \in R(\mathbb{R}^n)$$

  , dann:

$$\int_B f(x)\, dx := \int \mathbb{1}_B \cdot \tilde{f}\, dx$$

- B heißt Jordan-Nullmenge $:\Leftrightarrow$ B Jordan-messbar und $\mathrm{vol}_n(B) = 0$.

- Bemerkungen:
  1. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ B beschränkt, ∂B [Rand von B] ist Jordan-Nullmenge. (folgt aus Aufgabe 71b))
  2. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ Jordan-messbar

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cap B} &= \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n) \\
\mathbb{1}_{A\backslash B} &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B} \in R(\mathbb{R}^n) \\
\mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\backslash A} \in R(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

  Menge der Jordan-messbaren Mengen bilden einen Mengenring.

33

Satz von Fubini, Berechnung von Integralen

33.1 Satz von Fubini

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Sei $1 \leq k \leq n-1$. ($x \in \mathbb{R}^n : x = (\check{x}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$). Dann ist

$$\mathbb{R}^{n-k} \ni \hat{x} \mapsto \overline{\int} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}$$

Riemann-integrierbar und

$$\int f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x}$$

Bemerkung: Statt $\overline{\int}$ auch $\underline{\int}$ möglich.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int (\psi - \varphi) < \varepsilon$. Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(., \hat{x}) &\leq f(., \hat{x}) \leq \psi(., \hat{x}) \\ \Rightarrow \underbrace{\int \varphi(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}}_{=:\varphi_2(\hat{x})} &\leq \underbrace{\overline{\int} f(\check{x}, \hat{x})}_{=:f_2(\hat{x})} \leq \underbrace{\int \psi(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}}_{=:\psi_2(\hat{x})} \end{aligned}$$

  Dann $\varphi_2(\hat{x}), \psi_2(\hat{x}) \in T(\mathbb{R}^{n-k})$ nach Satz 31.1.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})) d\hat{x} = \int (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \varepsilon$$

  Aus Satz 32.3: $f_2 \in R(\mathbb{R}^{n-k})$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x}) d\hat{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi \\ \int \varphi &\leq \int f \leq \int \psi \end{aligned}$$

  Damit:

$$\left| \int f_2(\hat{x}) d\hat{x} - \int f \right| < \int \psi - \int \varphi < \varepsilon$$

33.2 Folgerung: Berechnung von Integralen

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\int f(x)\, dx = \int_{x_n \in \mathbb{R}} \cdots \int_{x_1 \in \mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

falls die Integrale existieren. Reihenfolge der Integration ist vertauschbar.

Beispiel:

1. Volumen eines abgeschnittenen Drehparaboloids

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

später: B ist Jordan-messbar.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int\int\int \mathbb{1}_B \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx \\
&= 2 \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad x = \cos t \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \sin t \, dt \\
&= \frac{8}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)) \, dt \\
&= \frac{2}{3} \cdot (\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

mit $sin^4 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Einfacher:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int\int \mathbb{1}_B(x,y,z) \, d(x,y) \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2 \leq 1-z} 1 \, d(x,y) \, dz \\
&= \int_0^1 \pi \cdot \sqrt{1-z^2} dz \\
&= \pi \cdot \left[z - \frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

33.3 Folgerung: Prinzip von Cavalieri

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $1 \leq k \leq n-1$ und für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned}
A_{\hat{x}} &:= \{\check{x} \in \mathbb{R}^k | (\check{x}, \hat{x}) \in A\} \\
B_{\hat{x}} &:= \{\check{x} \in \mathbb{R}^k | (\check{x}, \hat{x}) \in B\}
\end{aligned}$$

Jordan-messbar und $\mathrm{vol}_k(A_{\hat{x}}) = \mathrm{vol}_k(B_{\hat{x}})$. Dann:

$$\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(B)$$

Beweis:

- Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt:

$$\mathbb{1}_A(., \hat{x}) = \mathbb{1}_{A_{\hat{x}}} \qquad \mathbb{1}_B(., \hat{x}) = \mathbb{1}_{B_{\hat{x}}}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(A) &= \int \mathbb{1}_A(x)\,dx \\
&= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\check{x}\in\mathbb{R}^k} \underbrace{\mathbb{1}_A}_{\mathbb{1}_{A_{\hat{x}}}}(\check{x},\hat{x})d\check{x}\,d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{x}} \mathrm{vol}_k(A_{\hat{x}})d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{x}} \mathrm{vol}_k(B_{\hat{x}})d\hat{x} \\
&= \ldots = \mathrm{vol}_n(B)
\end{aligned}$$

33.4 Satz: Stetigkeit bei iterierten Integralen

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $1 \le k \le n-1$. Dann ist

$$[\hat{a},\hat{b}] \ni \hat{x} \mapsto \int_{\check{x}\in[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{x})d\check{x}$$

stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$. (f gleichmäßig stetig)
- Für $\hat{x}, \hat{y} \in [\hat{a},\hat{b}]$, $|\hat{x}-\hat{y}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{x})d\check{x} - \int_{[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{y}) \right| &\le \int_{[\check{a},\check{b}]} \underbrace{|f(\check{x},\hat{x}) - f(\check{x},\hat{y})|}_{<\varepsilon} d\check{x} \\
&\le \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_{n-k}[\check{a},\check{b}]
\end{aligned}$$

  da

$$|(\check{x},\hat{x}) - (\check{x},\hat{y})| = |\hat{x}-\hat{y}| < \delta$$

33.5 Satz: Jordan-Messbarkeit

Seien $f_1, f_2 \in R(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \le f_2$. Dann ist

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | f_1(x) < y < f_2(x)\}$$

Jordan-messbar,

$$\mathrm{vol}_{n+1}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

33.6 Hilfssatz: Jordan-Messbarkeit kartesisches Produkt

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ Jordan-messbar. Dann $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1 \in T(\mathbb{R}^k)$ mit $0 \le \varphi_1 \le \mathbb{1}_A \le \psi_1 \le 1$ und $\int(\psi_1 - \varphi_1) < \varepsilon$. Entsprechend φ_2, ψ_2 zu B. Dann:

$$\begin{aligned}
\varphi(\check{x},\hat{x}) &:= \varphi_1(\check{x}) \cdot \varphi_2(\hat{x}) \\
\psi(\check{x},\hat{x}) &:= \psi_1(\check{x}) \cdot \psi_2(\hat{x})
\end{aligned}$$

Dann $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi(\check{x}, \hat{x}) \le \underbrace{\mathbb{1}_A(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_B(\hat{x})}_{\mathbb{1}_{A\times B}} \le \psi(\check{x}, \hat{x})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int (\psi(\check{x}, \hat{x}) - \varphi(\check{x}, \hat{x}))dx &= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x})) \cdot \psi_2(\hat{x})dx + \int \varphi_1(\check{x}) \cdot (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x}))dx \\
&= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x}))d\check{x} \cdot \int \psi_2(\hat{x})d\hat{x} \\
&\quad + \int \varphi_1(\check{x})d\check{x} \cdot \int (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x}))d\hat{x} \\
&\le \varepsilon \cdot (\mathrm{vol}_{n-k}(B) + \varepsilon) + \mathrm{vol}_k(A) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

Beweis zu Satz 33.5:

1. Sind $f_1, f_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ so gilt die Behauptung:

   Es gibt Jordan-messbare Mengen $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A_j \cap A_i = \emptyset$ für $j \neq i$, sodass

$$\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{j=1}^{k} c_j' \cdot \mathbb{1}_{A_j} \\
f_2 &= \sum_{j=1}^{k} c_j'' \cdot \mathbb{1}_{A_j}
\end{aligned}$$

   (Beweis von Satz 31.3) Dann:

$$B_j := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} | c_j' < y < c_j'', x \in A_j\} = A_j \times (c_j', c_j'')$$

   Jordan-messbar nach Hilfssatz 33.6. Damit auch

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

   Jordan-messbar.

2. Allgemeiner Fall:

   Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \le f_1 \le \psi_1$, $\varphi_2 \le f_2 \le \psi_2$, $\int(\psi_j - \varphi_j) < \varepsilon$ für j=1,2. Dann sind

$$\begin{aligned}
B_i &:= \{(x,y) | \psi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\
B_a &:= \{(x,y) | \varphi_1(x) < y < \psi_2(x)\}
\end{aligned}$$

   Jordan-messbar nach 1. und $B_i \subseteq B \subseteq B_a$ (oder $\mathbb{1}_{B_i} \le \mathbb{1}_B \le \mathbb{1}_{B_a}$). Außerdem:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\mathbb{1}_{B_a} - \mathbb{1}_{B_i}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_2 - \varphi_1) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_2 - \psi_1)^+}_{\ge \int (\varphi_2 - \psi_1)} \\
&\le \int ((\psi_2 - \varphi_1) - (\varphi_2 - \psi_1)) \\
&= \int (\psi_2 - \varphi_2) + \int (\psi_1 - \varphi_1) \\
&\le 2\varepsilon
\end{aligned}$$

   Damit $\mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Gleichheit: Satz von Fubini

Bemerkungen:

1. $B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ ist Jordan-messbar: $f_1, f_2 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f_2(x) &:= \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2} & x \in B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ f_1(x) &:= -f_2(x) \end{aligned}$$

   Dann $B_{\mathbb{R}^n}(0,1) = B$ aus Satz 33.5.

2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow$ ∂A Jordan-Nullmenge

   Beweis: Mit Aufgabe 71b) bzw. 74. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi \leq \mathbb{1}_A \leq \psi \leq 1$, $\int (\psi - \varphi) < \varepsilon$. Es gilt:

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | 0 < \varphi(x)\}}_{\text{offen}} \subseteq \underbrace{A}_{A^o \subseteq A \subseteq \bar{A}} \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | \psi(x) = 1\}}_{\text{abgeschlossen}}$$

   Also

$$\partial A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \underbrace{\psi(x) = 1, \varphi(x) = 0}_{\psi(x) - \varphi(x) = 1}\}$$

   Damit $0 \leq \mathbb{1}_{\partial A} \leq (\psi - \varphi)$. Aus $\int (\psi - \varphi) < \varepsilon$ folgt die Behauptung.

3. Damit $B_{\mathbb{R}^n}[0,1] = B_{\mathbb{R}^n} \cup \partial B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ Jordan-messbar.

4. Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $f(. - a) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(x-a)\, dx = \int f(x)\, dx$$

   Für $r > 0$ ist $f(r.) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(r \cdot x)\, dx = \frac{1}{r^n} \int f(x)\, dx$$

   Klar für Treppenfunktionen, allgemein aus Konstruktion des Riemann-Integrals.

Beispiel:

1. Volumen von $B_{\mathbb{R}^n}(0,1) =: B_n$

$$\omega_n := \mathrm{vol}_n\, B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$$

   Nach vorheriger Bemerkung:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n\, B(\mathbb{R}^n) &= r^n \cdot \omega_n \\ \omega_1 &= 2 \end{aligned}$$

   Für $n > 1$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_{B_n} 1\, dx \\ &= \int_{x_n=-1}^{1} \int_{|x_1,\ldots,x_{n-1}|^2 \leq 1 - x_n^2} 1\, d(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_n \\ &= \int_{t=-1}^{1} \underbrace{\sqrt{1-t^2}^{\,n-1} \cdot \omega_{n-1}}_{\mathrm{vol}_n\, B_{n-1}(0, \sqrt{1-t^2})} dt \\ &= c_n \cdot \omega_{n-1} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt \qquad t=\cos x \\ &= \int_0^\pi \sin^n x\,dx \end{aligned}$$

Dann $c_0 = \pi, c_1 = 2$.

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi \sin^n x\,dx \\ &= \underbrace{-\sin^{n-1} x\,dx \cdot \cos x|_0^\pi}_{0} + (n-1)\cdot \int_0^\pi \sin^{n-2}\cdot\cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^{n-2}\,dx}_{c_{n-2}} - (n-1)\cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^n x\,dx}_{c_n} \\ \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n}\cdot c_{n-2} \end{aligned}$$

Damit $c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\omega_2 = c_2 \cdot \omega_1 = \pi$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n \cdot c_{n-1} &= \frac{n-1}{n}\cdot c_{n-1}\cdot c_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot c_{n-2}\cdot c_{n-3} \\ &= \ldots = \frac{1}{n}\cdot c_1 \cdot c_0 \\ &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= c_n \cdot \omega_{n-1} \\ &= c_n \cdot c_{n-1}\cdot \omega_{n-2} \\ &= \frac{2\pi}{n}\cdot \omega_{n-2} \end{aligned}$$

Also für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= \frac{2\pi}{2k}\cdot \omega_{2(k-1)} \\ &= \frac{\pi}{k}\cdot\frac{\pi}{k-1}\cdot\omega_{2(k-2)} \\ &= \frac{\pi^{k-1}}{k!}\cdot \omega_2 \\ &= \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}!\right)} \\ w_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1}\cdot\omega_{2k+1} \\ &= \ldots = \frac{(2\pi)^k}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\cdot \omega_1 \\ &= \frac{2^{k+1}\cdot \pi^k}{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$

Einheitliche Schreibweise mit der Gamma-Funktion Γ:

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

für beliebige $n \geq 1$.

Bemerkung:

- Die Eulersche Gamma-Funktion ist

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

für $x > 0$. Uneigentlich bei ∞ und für $x < 1$ auch bei 0. (Existiert bei 0, da $0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq t^{x-1}$; bei ∞, da $t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ beschränkt auf $(1,\infty)$ für alle $x > 0$.)

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} [-e^{-t}]_0^R = \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-R}) = 1 \\
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t}\, dt \\
&= \underbrace{-t^x \cdot e^{-t}|_0^\infty}_{0} + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \\
&= x \cdot \Gamma(x)
\end{aligned}$$

für beliebige $x > 0$. Daher:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) \\
&= \ldots = n! \cdot \Gamma(1) = n!
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gerade:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Außerdem $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (wird später bewiesen).

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\, dt \qquad t = \frac{1}{2}s^2 \\
&= \sqrt{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2} \cdot s\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Damit für $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right) &= \frac{2k+1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\
&= \ldots = \frac{(2k+1)\cdots 3 \cdot 1}{2^{k+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Also:

$$\omega_{2k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right)} \cdot \pi^k = \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right)}$$

dabei $w_n \to 0$ für $n \to \infty$. Genauer: Bestimmt man r_n so, dass

$$\underbrace{\operatorname{vol}_n B_n(0,r)}_{r_n^n \cdot \omega_n} = 1$$

d.h.

$$r_n = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}$$

dann

$$\begin{aligned} r_n &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \sqrt{n} \\ \frac{r_n}{\sqrt{n}} &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{aligned}$$

(Stirlingsche Formel)

34 Transformationsformel

34.1 Satz: Urform der Transformationsformel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für alle $f \in C_C(V)$ gilt:

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

Bemerkungen:

1. Ist $f \in C_c(V)$, dann $f \circ \Phi \in C_c(U)$ ($\Leftrightarrow$ $(f \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Phi'(x)| \in C_c(U)$). Ist $Q \subseteq V$ ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall, dann ist i.a.

   $$\mathbb{1}_Q \circ \Phi \notin T(\mathbb{R}^n)$$

   Beweis: Sei $K \subseteq V$. Dann K kompakt $\Leftrightarrow$ $\Phi^{-1}(K)$ kompakt.

   $$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1}\underline{\{y \in V | f(y) \neq 0\}} & = & \underline{\{x \in U | f(\Phi(x)) \neq 0\}}\,\text{kompakt} \\ \Phi^{-1}\overline{\{y \in V | f(y) \neq 0\}} & = & \overline{\Phi^{-1}\{y \in V | f(y) \neq 0\}} \\ & = & \underbrace{\overline{\{x \in U | f(\Phi(x)) \neq 0\}}}_{\mathrm{spt}(f\circ\Phi)} \end{array}$$

2. Für n=1 folgt der Satz aus der Substitutionsregel: $\Phi : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv, z.B. monoton fallend, und ein Diffeomorphismus.

   $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{(c,d)} f(y)\,dy & = & \displaystyle -\int_d^c f(y)\,dy \\ & = & \displaystyle -\int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \underbrace{\Phi'(x)}_{<0}\,dx \\ & = & \displaystyle \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot |\Phi'(x)|\,dx \end{array}$$

3. Ist $a \in \mathbb{R}^n$, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$. Dann $\Phi'(x) = E_n, \det \Phi'(x) = 1$. Also

   $$\int f(x-a)\,dx = \int f(y)\,dy$$

   Ist $r > 0$, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto r \cdot x$. Dann $\Phi'(x) = r \cdot E_n$, $\det \Phi'(x) = r^n$. Also

   $$r^n \cdot \int f(r \cdot x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

4. $|\det \Phi'(x)|$ ist „Verzerrungsfaktor“.

Beweis: im nächsten Kapitel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (auf U), $f \in R(U)$, falls es eine kompakte Menge $K \subseteq U$ gibt, sodass $f|_{U\setminus K} = 0$ und $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar.

$$\int_U f(x)\,dx := \int \tilde{f}(x)\,dx$$

34.2 Satz: Transformationsformel

Seien U, V, Φ wie in Satz 34.1. Dann gilt: Für $f \in R(V)$ ist $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

Beweis: Ende des Kapitels

Beispiele:

1. Polarkoordinaten

$$\Phi : \underbrace{(0,\infty) \times (-\pi,\pi)}_{U} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \backslash ((-\infty, 0] \times \{0\})}_{V}$$

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist Diffeomorphismus,

$$\det \Phi'(r,\varphi) = r$$

Berechnung von Schwerpunkt eines halben Kreisringes: B ist Jordan-messbar,

$$x_s = \frac{\int_B x\,d(x,y)}{\mathrm{vol}_2(B)}$$

mit $\mathrm{vol}_2(B) = \frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)$ und

$$\begin{aligned}
\int_B x\,d(x,y) &= \int_V \mathbb{1}_B(x,y) \cdot x d(x,y) \\
&= \int_U \underbrace{\mathbb{1}_B(\Phi(r,\varphi))}_{\mathbb{1}_{\Phi^{-1}(B)}(r,\varphi)} \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot r\,d(r,\varphi) \\
&= \int_{R_1<r<R} \int_{-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos\varphi d\varphi\,dr \\
&= \frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3)
\end{aligned}$$

Damit:

$$x_s = \frac{\frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3)}{\frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^3}$$

Für $R_1 \to 0$: (Schwerpunkt Halbkreis, mit Polarkoordinaten nicht „direkt“ zugänglich)

$$x_2 = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,4024R$$

Bemerkung: Für Polarkoordinaten ist $r \cdot d\varphi\,dr$ das „Flächenelement“.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (und damit auch $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

Folgende Rechnung „naiv“:

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\
&= \int_{r>0,-\pi<\varphi<\pi} e^{-r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\
&= \int_{r>0} e^{-r^2} \cdot r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} e^{-r^2}|_0^{\infty} \cdot 2\pi = \pi
\end{aligned}
$$

Rechtfertigung dieser Schritte:

- Im 1.Schritt:

$$I_R := \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

für $R > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ definiere

$$S_k := \Phi([-\frac{1}{k}, R] \times [-\pi + \frac{1}{k}, \pi - \frac{1}{k}]) \subseteq B[0,R]$$

Dann

$$B[0,R] \backslash S_k \subseteq [-R, \frac{1}{k}] \times [-\max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$$

damit

$$\mathrm{vol}_2\, B[0,R] \backslash S_k \leq 2 \cdot (R + \frac{1}{k}) \cdot \max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \to 0 (k \to \infty)$$

Damit

$$I_R = \lim_{k\to\infty} \int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

Mit Transformationsformel:

$$
\begin{aligned}
\int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) &= \int_{[\frac{1}{k},R]\times[-\pi+\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]} e^{-r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\
&= \int_{r=\frac{1}{k}}^{R} e^{-r^2} \cdot r dr \cdot 2 \cdot (\pi - \frac{1}{k}) \\
&= \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_{\frac{1}{k}}^{R} \cdot 2(\pi - \frac{1}{k}) \\
&= (\pi - \frac{1}{k}) \cdot (e^{-\frac{1}{k^2}} - e^{-R^2}) \\
&\to \pi \cdot (1 - e^{-R^2}) \qquad (k \to \infty) \\
&= \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)
\end{aligned}
$$

- Außerdem:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx$$

Es gibt $(R_n) \subseteq (1,\infty)$ mit $R_{n+1} \geq \sqrt{2} \cdot R_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit:

$$\begin{aligned} \int_{[-R_n,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) &\leq \int_{B[0,R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\ &\leq \int_{[-R_{n+1},R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-R_n}^{R_n} e^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \int_{[-R_n,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\ &\to \lim_{k\to\infty} \int_{B[0,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \pi \end{aligned}$$

Also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

3. Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$, d.h. Polarkoordinaten in x-y-Ebene, z unverändert

$$\begin{aligned} \Phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \Phi(r,\varphi,\zeta) &= \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \\ dx\, dy\, dz &= r\, dr\, d\varphi\, d\zeta \end{aligned}$$

Berechnung des Volumens von

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}; 0 \leq |z| \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Satz von Fubini:

$$\mathrm{vol}_3(B) = 2 \cdot \int_{B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2})} \sqrt{1-x^2-y^2}\, d(x,y)$$

Polarkoordinaten:

$$A := \{(r,\varphi) | -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos\varphi\}$$

Dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(B) &= 2 \cdot \int_A \sqrt{1-r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi \\ &= 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\varphi|^3) d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9} \approx 1,21 \end{aligned}$$

Halbkugel ohne B hat das Volumen $\frac{8}{9}$.

4. Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) | x \leq 0, y = 0\} \\
\Phi : (r,\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \end{pmatrix} \\
\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta) &= r^2 \cdot \cos\vartheta \\
\Rightarrow r^2 \cdot \cos\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta &= dx \, dy \, dz
\end{aligned}$$

Berechnung des Schwerpunktes der Halbkugel:

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; |(x,y,z)| \leq 1, z \geq 0\}$$

Dann

$$z_2 = \frac{\int_b z \, d(x,y,z)}{\mathrm{vol}_3(B)}$$

mit $\mathrm{vol}_3(B) = \frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}
\int_B z \, d(x,y,z) &= \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} (r \cdot \sin\vartheta) \cdot (r^2 \cdot \cos\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\
&= 2\pi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta \underbrace{\int_{r=0}^{1} r^3 \, dr}_{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi
\end{aligned}$$

Also:

$$z_s = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

34.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}|_U = f$, $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \backslash U} = 0$.

1. Es gebe $K \subseteq U$ kompakt, sodass $f|_{U \backslash K} = 0$. Dann:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \tilde{f} &= \inf\{\int_U \psi(x) \, dx | \psi \in C_C(U), \psi \geq f\} \\
\underline{\int} \tilde{f} &= \sup\{\int_U \varphi(x) \, dx | \varphi \in C_C(U), \varphi \leq f\}
\end{aligned}$$

2. $f \in R(U) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \varphi, \psi \in C_C(U) : \varphi \leq f \leq \psi, \int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$

Beweis:

1. Bekannt für $U = \mathbb{R}^n$ (Aufgabe 74). Allgemein: Es gibt $\chi \in C_C(U)$ mit $0 \leq \chi \leq 1, \chi|_K = 1$

$$\chi(x) = \max\{1 - k \cdot \mathrm{dist}(x,K), 0\} \qquad k \text{ groß}$$

Klar:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \tilde{f} &= \inf\{\int \psi(x) \, dx; \psi \in C_C(\mathbb{R}^n) | \psi \geq \tilde{f}\} \\
&\leq \inf\{\int \psi(x) \, dx; \psi \in C_C(U), \psi \geq \tilde{f}\}
\end{aligned}$$

Sei $\psi \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geq \tilde{f}$. Dann $\psi^-, \chi \cdot \psi^+ \in C_C(U)$, $f \leq \chi \cdot \psi^+ - \psi^-$.

$$\int \psi(x)\,dx = \underbrace{\int (1-\chi) \cdot \psi^+}_{\geq 0} + \int (\chi \cdot \psi^+ - \psi^-) \geq \int \chi \cdot \psi^+ - \psi^-$$

Damit „$\geq$“.

2. Klar mit 1.

34.4 Beweis: Satz 34.2

- Sei $f \in R(V)$. Für $\varphi : V \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi \in C_c(V) \Leftrightarrow \varphi \circ \Phi \in C_c(U)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\underline{\int_V} f(x)\,dx &= \sup\{\int_V \varphi(y)\,dy; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f\} \\
&\overset{34.1}{=} \sup\{\int \varphi \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f\} \\
&= \sup\{\int \tilde{\varphi}\,dx; \tilde{\varphi} \in C_c(U), \tilde{\varphi} \leq f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)|\} \\
&= \underline{\int_U} f \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Entsprechend für Oberintegral:

$$\overline{\int_V} f(y)\,dy = \ldots = \overline{\int_U} f \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

Wegen $\underline{\int_V} f = \overline{\int_V} f$ folgt Gleichheit der rechten Seiten, also $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U (f \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

35

Beweis der Transformationsformel

Bemerkungen:

1. Besonders einfacher Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: Vertauschung von Koordinaten (π ... Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$). Jede Spalte und jede Zeile der Darstellungsmatrix enthält genau eine 1. Dafür Transformationsformel klar, zunächst für Treppenfunktionen, dann auch für $R(\mathbb{R}^n)$, insbesondere für $C_c(\mathbb{R}^n)$.

2. $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, $x \mapsto A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathbb{R}^{k \times k}, C \in \mathbb{R}^{k \times n-k}$ beliebig und Satz 34.1 für k bewiesen, dann auch für A (s.u. für Beispiel).

Beispiel: n=2, k=1

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \int f(A \cdot x) \cdot |\det A| &\overset{SvF}{=} \int_{x_2} \int_{x_1} f(x_1 + x_2, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{x_2} \int_{y_1} f(y_1, x_2)\, dy_1\, dx_2 \\ &= \int f(y)\, dy \end{aligned}$$

3. Mit 1. und 2. und geeigneter Zerlegung von beliebiger Matrix A, kann man die Transformationsformel für beliebige linear Abbildungen Φ zeigen. Allgemeines Φ durch lokale Approximation.

35.1 Hilfssatz: Transformationsformel auf Produkt von Diffeomorphismen

Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to W, \psi : W \to V$ Diffeomorphismen, für die die Transformationsformel gilt. Dann gilt sie auch für $\psi \circ \Phi : U \to V$.

Beweis:

- Sei $f \in C_C(V)$. Dann:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \Phi)'(x) &= \psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \\ \det(\psi \circ \Phi)'(x) &= \det \psi'(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\int f(\psi\circ\Phi)(x)\cdot|\det(\psi\circ\Phi)'(x)|\,dx &= \int_U f\circ\psi(\Phi(x))\cdot|\det\psi'(\Phi(x))|\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx \\
&= \int_W f\circ\psi(z)\cdot|\det\psi'(z)|\,dz \\
&= \int_V f(y)\,dy
\end{aligned}$$

35.2 Hilfssatz: Induktion

Seien Voraussetzungen wie in Satz 34.1. Außerdem sei $1 \le k \le n-1$ und die Gültigkeit der Transformationsformel für k anstatt von n sei vorausgesetzt und sei Φ in der Form

$$\Phi(\check{x},\hat{x}) = \begin{pmatrix}\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})\\ \hat{x}\end{pmatrix}$$

mit $\check{\Phi}: U \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt die Behauptung von Satz 34.1

Beweis:

- Für $\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned}
U_{\hat{x}} &:= \{\check{x};(\check{x},\hat{x})\in U\}\\
V_{\hat{x}} &:= \{\check{x};(\check{x},\hat{x})\in V\}
\end{aligned}$$

  Dann ist $\check{\Phi}(.,\hat{x}): U_{\hat{x}} \to V_{\hat{x}}$ ein Diffeomorphismus.

- Sei $f\in C_C(V)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_V f(y)\,dy &= \int_{\hat{y}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{\check{y}\in V_{\hat{y}}} f(\check{y},\hat{y})\,d\check{y}\,d\hat{y}\\
&= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{U_{\hat{x}}} f(\check{\Phi}(\check{x},\hat{x}),\hat{x})\cdot\left|\det\frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\check{x}}\right|\,d\check{x}\,d\hat{x}\\
&= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{\check{x}\in U_{\hat{x}}} f(\Phi(\check{x},\hat{x}))\cdot|\det\Phi'(\check{x},\hat{x})|\,d\check{x}\,d\hat{x}\\
&= \int_U f(\Phi(x))\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

  da

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} & \frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\check{x}} & & & \frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\hat{x}} & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- Entsprechend folgert man wie in Hilfssatz 35.2 die Aussage für

$$\Phi(\check{x},\hat{x}) = \begin{pmatrix}\check{x}\\ \hat{\Phi}(\check{x},\hat{x})\end{pmatrix}$$

35.3 Satz: Zerlegung des Diffeomorphismus

Seien U,V wie in Satz 34.1, $a\in U$, $b:=\Phi(a)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_a\subseteq U$ von a, eine offene Umgebung $W\subseteq\mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Psi: U_a\to W$, $\tilde{\Psi}: W\to V_b := \Phi(U_a)$ von der Form wie in Hilfssatz 35.2, sodass $\Phi|_{U_a} = \tilde{\Psi}\circ\Psi$ gilt.

Beweis:

- Sei $1 \leq k \leq n-1$. Die Zeilen von $\Phi'(a)$ sind linear unabhängig, also auch die oberen k Zeilen. Nach Permutation der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

  hat linear unabhängige Spalten.

- Die Abbildung $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

  hat in a die Ableitung

$$\Psi'(a) = \begin{pmatrix} & \check{\Phi}'(a) & \\ 0 & E_{n-k} & \end{pmatrix}$$

  Diese ist invertierbar (Spalten sind linear unabhängig). Nach Satz von der lokalen Invertierbarkeit gibt es eine offene Umgebung U_a von a und eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\Psi : U_a \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

- Sei

$$\tilde{\Psi} := \Phi \circ \Psi^{-1} : W \to V_b$$

  (ist Diffeomorphismus) und von der Form

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} \check{z} \\ \hat{\tilde{\Psi}}(z) \end{pmatrix}$$

  Zu $z \in W$ und $y := \tilde{\Psi}(z) \in V_b$ gibt es $x \in U_a$ mit

$$\begin{aligned} z &= \Psi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix} \\ y &= \Phi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{\Phi}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  d.h. $\check{y} = \check{\Phi}(x) = \check{z}$.

35.4 Satz: Partition der Eins (leichte Form)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq V$ kompakt, $m \in \mathbb{N}$, $(V_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine offene Überdeckung von K mit $V_j \subseteq V$ offen. Dann gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_C(V)$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\operatorname{spt} \varphi_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j = 1$$

für alle $x \in K$. (Die Familie $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,m}$ heißt der Überdeckung (V_j) untergeordnete Partition der Eins.)

Beweis:

- Für alle $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $r_x > 0$, sodass $B(x, 2r_x) \subseteq V_j$. Wegen Kompaktheit von K besitzt die offene Überdeckung $(B(x, r_x))_{x \in K}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(B(x_k, r_{x_k}))_{k=1,\ldots,p}$. Für $1 \leq j \leq m$ setze

$$K_j := \bigcup_{k \in \{1,\ldots,p\} : B(x_k, 2r_{x_k}) \subseteq V_j} B[x_k, r_{x_k}] \cap K$$

Dann K_j kompakt, $K_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und $\bigcup_{j=1}^m K_j = K$. Für $1 \leq j \leq m$ findet man $\psi_j \in C_C(V)$ mit $\operatorname{spt} \psi_j \subseteq V_j$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ und $\psi_j(x) = 1$ für alle $x \in K_j$ (Vgl. § 34). Definiere

$$\psi_0(x) := d(x, K) \qquad (x \in V)$$

Dann ist ψ,

$$\psi := \sum_{j=0}^{m} \psi_j(x)$$

eine stetige Funktion $\psi : V \to (0, \infty)$

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\psi} \qquad j = 1, \ldots, m$$

haben die behaupteten Eigenschaften.

35.5 Beweis: Satz 34.1

- Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt die Transformationsformel für k mit $1 \leq k \leq n - 1$.
- Für $b \in V$ sei V_b gemäß Satz 35.3 bestimmt (also gilt die Transformationsformel für U_a, V_b, Φ wobei $\Phi(a) = b$).
- Sei $f \in C_C(V)$. Zu $K := \operatorname{spt} f$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{b_1}, \ldots, V_{b_m})$ der offenen Überdeckung $(V_b)_{b \in V}$. Definiere $a_j := \Phi^{-1}(b_j)$ und $U_{a_j} := \Phi^{-1}(V_{b_j})$ für $j = 1, \ldots, m$.
- Zu $(V_{b_1}, \ldots, V_{b_m})$ wähle $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ wie in Satz 35.3. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_V f(y)\,dy &= \int_V \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) \cdot f(y)\,dy \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{V_{b_j}} \varphi_j(y) \cdot f(y)\,dy \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{U_{a_j}} \varphi_j(\Phi(x)) \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx \\
&= \int_U \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\Phi(x))}_{1 \text{ für } x: f(\Phi(x)) \neq 0} \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx \\
&= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

36

Fourier-Reihen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode 2π

$$:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = f(x)$$

  Dann ist f schon bestimmt durch $f|_{[0,2\pi]}$ bzw. $f|_{[-\pi,\pi]}$.

- Beispiele: $\sin x$, $\cos x$, $\sin(n \cdot x)$, $\cos(n \cdot x)$
- Ziel: 2π-periodische Funktionen als Fourier-Reihe

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos n \cdot x + b_n \cdot \sin n \cdot x)$$

  darzustellen, für möglichst allgemeine Funktionen; Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\imath \cdot nx} \qquad (c_n \in \mathbb{C})$$

- Entsprechungen:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx &= c_n \cdot e^{\imath \cdot nx} + c_{-n} \cdot e^{-\imath \cdot nx} \\ &= c_n \cdot (\cos nx + \imath \cdot \sin nx) + c_{-n} \cdot (\cos nx - \imath \cdot \sin nx) \end{aligned}$$

  mit

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= \imath \cdot (c_n - c_{-n}) \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

- Bemerkungen: Integration komplexer Funktionen
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-Integrierbar :⇔ Re(f) und Im(f) Riemann-Integrierbar

$$\int f(x)\,dx \quad := \quad \int \Re(f)\,dx + \imath \cdot \int \Im(f)\,dx$$

     $f \mapsto \int f(x)\,dx$ ist $\mathbb{C}$-linear:
     - Additivität: Klar

$$\int (f+g)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

– Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = \lambda_1 + \imath \cdot \lambda_2$ und $f = f_1 + \imath \cdot f_2$.

$$\begin{aligned}
\int (\lambda \cdot f)\,dx &= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2 + \imath \cdot (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1))\,dx \\
&= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2)\,dx + \imath \cdot \int (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1)\,dx \\
&= \lambda_1 \cdot \int f_1\,dx - \lambda_2 \cdot \int f_2\,dx + \imath \cdot (\lambda_1 \cdot \int f_2\,dx + \lambda_2 \cdot \int f_1\,dx) \\
&= (\lambda_1 + \imath \cdot \lambda_2) \cdot \left(\int f_1\,dx + \imath \cdot \int f_2\,dx \right) \\
&= \lambda \cdot \int f\,dx
\end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar $\Rightarrow |f|$ ist Riemann-Integrierbar

   Beweis:

   (a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann $g \in R(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}) : |g - \varphi| \leq \psi, \int \psi \leq \varepsilon$

   „$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\varphi_1, \varphi_2 \in T(\mathbb{R})$ mit $\varphi_1 \leq g \leq \varphi_2$, sodass $\int(\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$. Dann $\varphi := \varphi_1$ und $\psi := \varphi_2 - \varphi_1$.

   „$\Leftarrow$“ Seien ψ, φ wie vorausgesetzt. Dann $\varphi_1 := \varphi - \psi$ und $\varphi_2 := \varphi + \psi$.

   (b) Seien $f = f_1 + \imath \cdot f_2$ Riemann-Integrierbar und $\varepsilon > 0$. Es existieren $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R})$, sodass
   $$|f_1 - \varphi_1| \leq \psi_1 \qquad |f_2 - \varphi_2| \leq \psi_2$$
   Dann $|\varphi_1 + \imath \cdot \varphi_2| =: |\varphi| \in T(\mathbb{R})$ und
   $$\begin{aligned}
   ||f| - |\varphi|| &\leq |f - \varphi| \leq |f_1 - \varphi_1| + |f_2 - \varphi_2| \\
   &\leq \psi_1 + \psi_2 \\
   \Rightarrow \int (\psi_2 + \psi_1) &\leq 2\varepsilon
   \end{aligned}$$

3. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar:
   $$\left| \int f(x)\,dx \right| \leq \int |f(x)|\,dx$$
   Beweis: Es gibt $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$:
   $$\left| \int f(x)\,dx \right| = \gamma \cdot \int f(x)\,dx$$
   Dann:
   $$\begin{aligned}
   \left| \int f(x)\,dx \right| &= \gamma \cdot \int f(x)\,dx \\
   &= \int \gamma \cdot f(x)\,dx \\
   &= \Re \left(\int \gamma \cdot f(x)\,dx \right) \\
   &= \int \underbrace{\Re(\gamma \cdot f)}_{\leq |\gamma \cdot f| = |f|}\,dx \\
   &\leq \int |f(x)|\,dx
   \end{aligned}$$

4. Hauptsatz gilt
5. Im Folgenden $\varphi_n(x) := e^{\imath \cdot nx}$

36.1 Hilfssatz: Orthogonalitätsrelation

1. Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n \cdot \overline{\varphi_m}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 2\pi & \text{für } n = m \end{cases}$$

2. Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$, $\sum_n |c_n| < \infty$,

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

   dann ist f stetig, 2π-periodisch,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\imath nx}\,dx$$

Beweis:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\imath nx}\cdot e^{-\imath mx}\,dx &= \int_0^{2\pi} e^{\imath x(m-n)}\,dx \\
&= \begin{cases} [x]_0^{2\pi} & m = n \\ [\sin(x\cdot(m-n)) - \imath\cdot\cos(x\cdot(m-n))]_0^{2\pi} & m \neq n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Stetigkeit mit Kapitel 20, Formel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\imath nx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\cdot\varphi_m(x)}_{=:C} \cdot e^{-\imath nx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} c_m\cdot\varphi_m(x)\cdot e^{-\imath nx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} c_m\cdot\int_0^{2\pi} e^{\imath mx}\cdot e^{-\imath nx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} e^{\imath mx}\cdot e^{-\imath nx}\,dx\; c_m}_{2\pi\cdot\delta_{mn}} \\
&= c_n
\end{aligned}$$

   da C gleichmäßig konvergent auf $[0, 2\pi]$.

Definition:

- Ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so heißen

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-\imath nx}\,dx$$

  die Fourier-Koeffizienten von f und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot\varphi_n$$

  heißt Fourier-Reihe von f.

Bemerkung zu reellen Fourier-Reihen:

- Sei $f \in R[0, 2\pi]$, f reell-wertig. Dann sind

$$\begin{aligned} a_n(f) &:= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \\ b_n(f) &:= \imath \cdot (c_n(f) - c_{-n}(f)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

reell für $n \in \mathbb{N}$ und

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

reell.

Beispiel:

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

f ungerade, deshalb alle $a_n(f) = 0$. Aus

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \cdot dx \\ &= \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot [-\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{n gerade} \\ \dfrac{4}{\pi \cdot n} & \text{n ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ergibt sich die Fourier-Reihe:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1) \cdot x)}{2n+1}$$

36.2 Satz: Dirichlet-Kerne

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Für die Partialsummen

$$s_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \cdot \varphi_k$$

gilt die Darstellung

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_n(y)\, dy$$

mit den Dirichlet-Kernen

$$D_n(y) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \cdot y}{\sin \frac{y}{2}}$$

wobei $D_n(2\pi m) = 2n + 1$. Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \cdot e^{\imath kx} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} f(y) \cdot e^{-\imath ky}\, dy \cdot e^{\imath kx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k \cdot (x-y)}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} f(x-y) \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath ky}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_n(y)\, dy
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
D_n(y) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath ky} \\
&= \frac{e^{\imath \cdot (n+1) \cdot y} - e^{-\imath ny}}{e^{\imath y} - 1} \cdot \frac{e^{-\imath \frac{1}{2} y}}{e^{-\imath \frac{1}{2} y}} \\
&= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot y}{\sin \frac{y}{2}}
\end{aligned}$$

mit $D_n(2\pi m) = 2n+1$.

Bemerkung:

- f stetig und 2π-periodisch $\not\Rightarrow s_n(f) \to f$ gleichmäßig

36.3 Satz: Cesàro-Mittel

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Für die Cesàro-Mittel

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f)$$

gilt die Darstellung

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot K_n(y)\, dy$$

mit den Fejér-Kernen

$$K_n(y) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2$$

Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_k(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot K_n(y)\, dy
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
K_n(y) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(y) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{e^{\imath y}-1}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} e^{\imath(k+1)\cdot y}-\sum_{k=0}^{n} e^{-\imath k y}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(e^{\imath y}-1)^2}\cdot\left(e^{\imath(n+2)\cdot y}-2e^{\imath y}+e^{-\imath n y}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{e^{\imath\frac{n+1}{2}y}-e^{-\imath\frac{n+1}{2}y}}{e^{\imath\frac{y}{2}}-e^{-\imath\frac{y}{2}}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}y)}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

Für $y = 2\pi m$:

$$K_n(2\pi m) = n+1$$

36.4 Satz von Fejér

Sei f 2π-periodisch und stetig. Dann

$$\sigma_n(f)(x) \to f(x)$$

gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- Eigenschaften von K_n:
  1. $K_n(y) \geq 0$
  2. Es gilt:
  $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)\,dy = 1$$
  denn:
  $$\begin{aligned}
  \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(y)\,dy &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k y}\,dy \\
  &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 1
  \end{aligned}$$
  Damit:
  $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)\,dy = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(y)\,dy = 1$$
  3. Für $\delta > 0$ gilt:
  $$\sup_{\delta\leq|y|\leq\pi} K_n(y) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$
  Klar, da $|\sin\frac{y}{2}| \geq \sin\frac{\delta}{2}$.
- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass
$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

für $|x-y| \leq \delta$ (f gleichmäßig stetig).

$$\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_n(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-y))\cdot K_n(y)\,dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-y)|\cdot K_n(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(x)-f(x-y)|}_{\leq\varepsilon}K_n(y)\,dy + \\
&\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}\underbrace{|f(x)-f(x-y)|}_{\leq 2\|f\|_{[-\pi,\pi]}}K_n(y)\,dy \\
&\leq \varepsilon + 2\cdot\|f\|_{[-\pi,\pi]}\cdot\sup_{\delta\leq|y|\leq\pi}K_n(y) \\
&\leq 2\varepsilon \text{ für n groß}
\end{aligned}$$

- Insbesondere: f stetig, 2π-periodisch $\Rightarrow$ f gleichmäßig approximierbar für n groß durch trigonometrische Polynome ($=$ Lin $\{\varphi_n, n\in\mathbb{Z}\}$).

36.5 Satz: Approxiomationssatz von Weierstraß

Sei $\varepsilon > 0$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es ein Polynom p mit

$$\|f-p\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$$

Beweisskizze:

- o.E.: $[a,b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Idee: Ergänze f stetig, 2π-periodisch. Approximiere f durch trigonometrische Polynome φ. Entwickle φ in Potenzreihe; abbrechen.
- alternativ: abs ist durch Polynome gleichmäßig approximierbar. Unterteile f in Streckenzüge. Streckenzüge durch Linearkombination von abs approximieren.

Bemerkung:

- I.a. $s_n(f) \not\Rightarrow f$ gleichmäßig, wenn f stetig

36.5.1 2-Norm

Für $f \in R[0,2\pi]$ sei

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

die 2-Norm.

Bemerkungen:

1. $\|\lambda\cdot f\|_2 = |\lambda|\cdot\|f\|_2$ (Klar)
2. Für $f, g \in R[0,2\pi]$:

   $$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$$

   (Skalarprodukt). Dann:

   $$|(f|g)| \leq \|f\|_2\cdot\|g\|_2$$

   (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

   Beweis:

- Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$, sodass
$$|(f|g)| = \gamma \cdot (f|g)$$
Sind $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq 1$, dann
$$0 \leq \|\gamma \cdot f - g\|_2^2 = (\gamma \cdot f - g|\gamma \cdot f - g)$$
Damit:
$$\begin{aligned}(\gamma \cdot f - g|\gamma \cdot f - g) &= \|\gamma \cdot f\|_2^2 - \underbrace{(g|\gamma \cdot f)}_{=|(f|g)|} - \underbrace{(\gamma \cdot f|g)}_{=|(f|g)|} + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - 2 \cdot |(f|g)| + \|g\|_2^2 \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq 1\end{aligned}$$
- Sind $\alpha, \beta > 0$, $\|f\|_2^2 \leq \alpha, \|g\|_2 \leq \beta$, dann
$$\begin{aligned}1 &\geq \left|\left(\frac{1}{\alpha} f | \frac{1}{\beta} g\right)\right| = \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot |(f|g)| \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq \alpha \cdot \beta\end{aligned}$$

3. Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= (f + g|f + g) \\ &\leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\end{aligned}$$
4. $\|f\|_2 = 0 \not\Rightarrow f = 0$

   Beispiel: $\mathbb{1}_{\{1\}}$
5. Mit $(.|.)$:
$$(\varphi_n|\varphi_m) = \delta_{mn}$$
   (φ_n) ist „Orthonormalsystem“.

36.6 Hilfssatz

Für $f \in R[0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\left\| f - \sum_{j=-n}^{n} c_j(f) \cdot \varphi_j \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=-n}^{n} |c_j(f)|^2$$
mit $c_j(f) = (f|\varphi_j)$.

Beweis: nachrechnen

36.7 Hilfssatz

Sei $f \in R[0, 2\pi]$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es g stetig, 2π-periodisch mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

36.8 Satz: Parsevalsche Gleichung

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Dann:
$$\left\| f - \underbrace{\sum_{j=-n}^{n} c_j(f) \cdot \varphi_j}_{s_n(f)} \right\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$
$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2$$

(Parsevalsche Gleichung)

Beweisidee:

- wahr, falls f trigonometrisches Polynom
- f approximierbar durch trigonometrisches Polynom (36.7)
- $\varepsilon/3$-Argument
- 2. Teil klar mit HS 36.6

Beispiele:

1. Sei

$$f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

   Dann:

$$c_j(f) = \begin{cases} 0 & \text{j gerade} \\ \dfrac{2}{\imath\pi j} & \text{j ungerade} \end{cases}$$

   Parsevalsche Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 = \|f\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^2}{\pi^2 \cdot (2n+1)^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

   Daraus:

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   mit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= s - \frac{1}{4}s = \frac{3}{4}s \\ \Rightarrow s &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

   Auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. Setze $f(x) = (x-\pi)^2$. Dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$