2017-05-16

Differentialgleichungen

Name:

Typen

Wenn man Differentialgleichungen betrachtet, hat man verschiedene Typen, die mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden können. Eine Übersicht findet sich in Tabelle 1.

Name	Abk.	allg. Form	Beispiel
Gewöhnliche Differentialgleichung	ODE	$F(x, y(x), \dot{y}(x), \ddot{y}(x), \dots) = 0$	$(\ddot{y})^2 = 0$
explizite ODE		$\dot{y} = f(x, y(x))$	$\dot{y}(x) = 7 \cdot y(x) + 5$
lineare ODE		$y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x)$ mit $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times m}$, $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$	
partielle Differentialgleichung	PDE	$F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dots) = 0$	$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

Hier ist $\mathbb{R}^{m \times m}$ der Raum der quadratischen Matrizen der Größe m. Ein Element ist die Vandermonde-Matrix mit der folgenden Eigenschaft:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Tabelle 1: Differentialgleichungen

Bemerkung Oftmals werden physikalische Zusammenhänge vereinfacht, bevor man sie mit mathematischen Methoden bearbeitet. Das Pendel (siehe Abbildung 1) kann durch die Gleichungen

Abbildung mit Pendel einfügen!

$$(1) \quad \left.\begin{aligned} m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) &= -m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t)) \\ \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t)) &= 0 \end{aligned}\right\} \to \text{nicht-lineare Differentialgleichung 2. Ordnung}$$

beschrieben werden. Aufgrund der Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$ vereinfacht sich ~~dies~~ zu Formel 2

↺

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \varphi(t)$$
$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\varphi(t) = 0$$
} lineare Diff.gl. 2. Ordnung

<u>Analytisches Handwerkszeug</u>

Def Stirlingformel

Die Stirlingformel ist die Approximation für $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + O(\ln(n))$$

Satz Der nächste Term in der Fehlerapproximation aus der Def ? in der Stirlingformel ist $\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$, sodass sich

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ergibt. Tatsächlich hat die Stirlingformel als Approximationsformel für die Fakultätsfunktion die Eigenschaft, dass

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$$

<u>Bew</u> siehe Wikipedia [1] $\boxed{}$

Weiteres analytisches Handwerkszeug beinhaltet

<u>Faltung</u> das mit $f * g = g * f$ (siehe dazu [2])

<u>mehrdimensionale Integration</u> das mit $\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}}_{d \text{ mal}} = \int_{\mathbb{R}^d}$

[1] hier Wikipedia zitieren

[2] siehe SLUB-Katalog "Functional Analysis", Yoshida, Kōsaku