2017-05-16

Differentialgleichungen

Name:

Typen

Wenn man Differentialgleichungen betrachtet man verschiedene Typen, die mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden können

~~Oberbegriff~~ Name	Abk.	allg. Form.	Bsp.
Gewöhnliche Differenzialgleichung	ODE	$\cancel{F(\dot{y} =}$ $F(x, y, \cancel{y}\,\dot{y}(x), \ddot{y}(x), \dots) = 0$	$(\ddot{y})^2 = 2$
explizite ODE		$\dot{y} = f(x, \dot{y}(x))$	$\dot{y}(x) - 2 \cdot y(x) + 5$
lineare ODE		$y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x)$ mit $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times m}, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$	
partielle Differentialgleichung	PDE	$\cancel{F(x,u,t}$ $F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}, \dots) = 0$	$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

Ich bin mir unsicher, ob ich einen Punkt oder einen Strich nutzen will → später anpassbar machen!

Dabei ist $\mathbb{R}^{m \times m}$ der Raum der ~~Mat~~ quadratischen Matrizen der Größe m. Ein Element ist die Vandermonde-Matrix mit der folgenden Eigenschaft:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

~~Beobachtung~~

Bemerkung Oftmals werden physikalische Zusammenhänge vereinfacht bevor man sie mit mathematischen Methoden bearbeitet. Das Pendel

~~Hier~~ ein Bild eines Pendels einfügen!

kann durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t)) \\ \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)) = 0 \end{array}\right\} \text{nicht-lineare Differentialgleichung 2. Ordnung}$$

beschrieben werden. Aufgrund der Annäherung $\sin\alpha \approx \alpha$ vereinfacht sich dies zu

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \varphi(t) \\ \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \varphi(t) = 0 \end{array}\right\} \text{lineare Diff.gl. 2. Ordnung}$$

Analytisches Handwerkszeug:

Def Stirlingformel

Die Stirlingformel gibt die Approximation für $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \mathcal{O}(\ln(n))$$

Satz Der nächste Term in der Fehlerapproximation $\mathcal{O}(\ln(n))$ in der Stirlingformel ist $\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$, sodass sich

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ergibt. Tatsächlich hat die Stirlingformel als Approximationsformel für die Fakultätsfunktion die Eigenschaft, dass

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Beweis siehe Wikipedia

ged.

Weiteres analytisches Handwerkszeug beinhaltet

Faltung ~~e~~ das mit $f * g = g * f$

mehrdimensionale Integration das mit $\int_{\mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}$