Technische Universität Dresden

Skript:

Topologische Vektorräume

Verfasser	Franziska Kühn
Daten	Prof. Dr. Jürgen Voigt Sommersemester 2012 Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

1 Initialtopologie, topologische Vektorräume, schwache Topologie

Definition (i). Sei X eine Menge. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Topologie :⇔

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$$
$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T} \,\text{endlich} \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{T}$$

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum.

(ii). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $U \subseteq X$ heißt offen :⇔ $U \in \mathcal{T}$. $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen :⇔ $X \backslash A \in \mathcal{T}$.

(iii). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $B \subseteq X$ heißt

$$\dot{B} := \operatorname{int} B := \bigcup \{U \in \mathcal{T}; U \subseteq B\}$$

Inneres von B und

$$\bar{B} := \operatorname{cl} B := \bigcap \{A \supseteq B; X \backslash A \in \mathcal{T}\}$$

Abschluss von B.

(iv). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ heißt $U \subseteq X$ Umgebung von x :⇔ $x \in \dot{U}$.

$$\mathcal{U}_x(\mathcal{T}) := \{U \subseteq X; U \,\text{Umgebung von}\, x\}$$

heißt Umgebungsfilter von x. ($U, V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$)

Definition Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \to Y$, $x \in X$. f stetig in x :⇔ $\forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S}) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. f stetig :⇔ f in x stetig für alle $x \in X$ ⇔ $\forall V \in \mathcal{S} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Bemerkung Sei X eine Menge, $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ eine Menge von Topologien. Dann ist

$$\bigcap \Gamma := \bigcap_{\mathcal{T} \in \Gamma} \mathcal{T}$$

eine Topologie.

Definition (i). Sei X eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{T}'; \mathcal{T}' \,\text{Topologie auf}\, X, \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{S}\}$$

die gröbste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält, die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie. $\mathcal{S}$ heißt Subbasis von $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$.

(ii). Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ und für alle $U \in \mathcal{T}$ gelte

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{B}; V \subseteq U\}$$

dann heißt $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{T}$.

(Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis, dann ist

$$\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \,\text{endlich}\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$.)

Definition (i). Sei X eine Menge, I Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$ topologischer Raum, $f_\iota : X \to X_\iota$ eine Abbildung. Die Topologie

$$\mathcal{T}\left(\{f^{-1}(U_\iota); U_\iota \in \mathcal{T}_\iota, \iota \in I\}\right)$$

ist die gröbste Topologie auf X für die alle Abbildungen f_ι stetig sind (Initialtopologie auf X bzgl. $(f_\iota)_{\iota\in I}$.)

(ii). Die Produkttopologie auf $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ ist die Initialtopologie bzgl. $(\mathrm{pr}_\iota; \iota \in I)$.
(Für $U_\iota \in \mathcal{T}_\iota$ ist $\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota) = U_\iota \times \prod_{\kappa\neq\iota} X_\kappa$, daher

$$\left\{\prod_{\iota\in F} U_\iota \times \prod_{\kappa\in I\setminus F} X_\kappa; F \subseteq I \,\text{endlich}, U_\iota \in \mathcal{T}_\iota\,(\iota \in F)\right\}$$

Basis der Produkttopologie.)

1.1 Satz

Seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$, $(X, \mathcal{T})$, $(X_0, \mathcal{T}_0)$ topologische Räume, $g : X \to X_0$, $f_\iota : X \to X_\iota$ $(\iota \in I)$ und $\mathcal{T}$ die Initaltopologie bzgl. f_ι. Sei $x_0 \in X_0$.

(i). g stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota \circ g$ stetig in x_0

(ii). g stetig $\Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota \circ g$ stetig

(iii). Die Initialtopologie auf X_0 bzgl. g ist Initialtopologie bzgl. $(f_\iota \circ g)_{\iota\in I}$.

Beweis: (i). „$\Rightarrow$“: Klar.

„$\Leftarrow$“: Sei U Umgebung von $g(x_0)$. Dann existiert $F \subseteq I$ endlich, $U_\iota \in \mathcal{T}_\iota$ $(\iota \in F)$:

$$g(x_0) \in \bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota) \subseteq U$$

Dann

$$\bigcap_{\iota\in F} g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota)) = \bigcap_{\iota\in F} (f_\iota \circ g)^{-1}(U_\iota)$$

ist Umgebung von x_0 (da $f_\iota \circ g$ stetig) und

$$\bigcap_{\iota\in F} (f_\iota \circ g)^{-1}(U_\iota) = g^{-1}\left(\bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota)\right) \subseteq g^{-1}(U)$$

.

(ii). Klar.

(iii). Leicht mit (ii). (Siehe Funktionalanalysis I, Satz 11.1)

□

Definition Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{T}$ Topologie auf E. Dann heißt $\mathcal{T}$ lineare Topologie, $E = (E, \mathcal{T})$ topologischer Vektorraum, wenn die Abbildungen

$$\mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \overset{m}{\mapsto} \lambda \cdot x \in E$$
$$E \times E \ni (x, y) \overset{a}{\mapsto} x + y \in E$$

stetig sind.

Beispiel (i). $E = \mathbb{K}$

(ii). (halb-)normierte Räume

Definition Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Umgebungsbasis von $x :\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_x,\ \forall U \in \mathcal{U}_x \exists V \in \mathcal{B} : V \subseteq U \ \Leftrightarrow \{U \subseteq X; \exists V \in \mathcal{B} : U \supseteq V\} = \mathcal{U}_x$.

1.2 Satz

Sei $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Dann

(i). Für $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ ist $[\lambda] : E \to E, x \mapsto \lambda \cdot x$ ein Homöomorphismus.

(ii). Für $x \in E$ ist $[x] : E \to E, y \mapsto x + y$ ein Homöomorphismus. $\mathcal{T}$ ist durch die Angabe einer Nullumgebungsbasis vollständig bestimmt.

(iii). Ist $U \in \mathcal{U}_0$, so ist U absorbierend, d.h.

$$\forall x \in E \exists \alpha > 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \geq \alpha : x \in \lambda \cdot U$$

Beweis: (i). Es genügt: $[\lambda]$ stetig ($[\lambda]^{-1} = [\lambda^{-1}]$). Die Abbildung

$$E \ni x \overset{j}{\mapsto} (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$$

ist stetig nach Satz 1.1. Daher $[\lambda] = m \circ j$ stetig.

(ii). Analog zu (ii).

(iii). Die Abbildung $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda \cdot x \in E$ ist stetig (wie in (i)). Daher gibt es $\alpha_0 > 0$, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \alpha_0$ gilt $\lambda \cdot x \in U$ (Stetigkeit in 0). Dann Behauptung mit $\alpha := \frac{1}{\alpha_0}$.

□

Definition (i). $\langle E, F \rangle$ duales Paar $:\Leftrightarrow E, F$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $b = \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ bilinear.

(ii). Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar. Gilt

$$x \in E, \langle x, y \rangle = 0\,(y \in F) \Rightarrow x = 0$$
$$y \in F, \langle x, y \rangle = 0\,(x \in E) \Rightarrow y = 0$$

so heißt das Paar trennend in E bzw. F.

(iii). Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar, dann ist $\sigma(E,F)$ die Initialtopologie auf E bzgl. $(\langle \cdot, y \rangle)_{y \in F}$ (schwache Topologie). Entsprechend $\sigma(F,E)$.

Bemerkung (i). Ist $B \subseteq F$ endlich, so ist

$$U_B := \{x \in E; |\langle x, y \rangle = 1\,(y \in B)\}$$

eine $\sigma(E,F)$-Nullumgebung. Folglich Nullumgebungsbasis $\{U_B; B \subseteq F \text{ endlich}\}$.

(ii). Ist $\langle E, F$ trennend in F, dann $F \subseteq E^*$ mittels $F \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ (E^*: algebraischer Dual). $\langle E, E^* \rangle$ ist trennend.

Frage: Ist $\sigma(E,F)$ lineare Topologie?

1.3 Satz

Sei E ein Vektorraum, $(E_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ Familie von topologischen Vektorräumen, $f_\iota : E \to E_\iota$ linear $(\iota \in I)$ und $\mathcal{T}$ die Initialtopologie auf E bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Dann ist $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.

Beweis: (i). Stetigkeit von m: Nach Satz 1.1 genügt es zu zeigen, dass $f_\iota \circ m$ stetig für alle $\iota \in I$. Für $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$:

$$(f_\iota \circ m)(\lambda, x) = f_\iota(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_\iota(x) = m_\iota(\lambda, f_\iota(x))$$

also $f_\iota \circ m = m_\iota \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \times f_\iota)$ stetig ($\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \times f_\iota$ ist stetig nach Satz 1.1).

(ii). Stetigkeit von a: Entsprechend $f_\iota \circ a = a_\iota \circ (f_\iota \times f_\iota)$.

□

Beispiel (i). $\sigma(E,F)$ ist Vektorraumtopologie auf E ($E_\iota = \mathbb{K}$).

(ii). Sei E ein Vektorraum P Menge von Halbnormen. Die Initialtopologie $\mathcal{T}_P$ bzgl. $E \overset{\text{id}}{\to} (E,p)$ $(p \in P)$ ist Vektorraumtopologie.

(iii). Sei Ω ein lokalkompakter Raum, $E := C(\Omega)$. Für $K \subseteq \Omega$ kompakt definiere

$$p_K(f) := \sup_{x \in K} |f(x)| \qquad (f \in C(K))$$

p_K ist Halbnorm. Mit $P := \{p_K; K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$ ist $\mathcal{T}_P$ auf $C(\Omega)$ die Topologie der kompakten Konvergenz.

1.4 Satz

Sei $\langle E,F \rangle$ ein duales Paar und $\varphi \in E^*$ stetig bzgl. $\sigma(E,F)$. Dann gibt es $y \in F$ mit $\varphi(x) = \langle x,y \rangle$.

Kurz, falls $\langle E,F \rangle$ trennend in F: $(E, \sigma(E,F))' = F$.

1.5 Lemma

Seien E Vektorraum, $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \in E^*$ mit

$$\bigcap_{j=1}^n \ker \psi_j \subseteq \ker \varphi$$

Dann gibt es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \psi_j$$

Beweis: Funktionalanalysis I, Lemma 11.5 □

Beweis: (von Satz 1.4) Da φ $\sigma(E,F)$ stetig ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in F$, sodass für

$$U_{\{y_1,\ldots,y_n\}} := \{x \in E; |\langle x, y_j \rangle| \le 1 \, (j = 1, \ldots, n)\}$$

gilt $\varphi(U_{\{y_1,\ldots,y_n\}}) \subseteq B_{\mathbb{K}}[0,1]$. Mit anderen Worten:

$$\forall x \in E : |\varphi(x)| \le \max_{j=1,\ldots,n} |\langle x, y_j \rangle|$$

Daher $\bigcap_{j=1}^n \ker(\langle \cdot, y_j \rangle) \subseteq \ker \varphi$. Nach Lemma 1.5: Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \langle x, y_j \rangle = \langle x, \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j \cdot y_j}_{\in F} \rangle \qquad (x \in E)$$ □

Bemerkung Satz 1.4 besagt: $\sigma(E,F)$ ist die gröbste (lineare) Topologie auf E, sodass $E' = F$. Ziel: Feinste Topologie?

2

Konvexität und Trennungssätze

2.1 Proposition

Sei E ein Vektorraum. Dann

(i). Ist $p : E \to [0, \infty)$ sublinear, d.h. $p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$ und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, dann

$$A_p := \{x \in E; p(x) < 1\} \qquad A'_p := \{x \in E; p(x) \leq 1\}$$

konvex und absorbierend.

(ii). Ist $A \subseteq E$ konvex und absorbierend, so ist

$$p_A : E \to [0, \infty), x \mapsto p_A(x) := \inf\{\lambda \in (0, \infty); x \in \lambda \cdot A\}$$

sublinear und $A_{p_A} \subseteq A \subseteq A'_{p_A}$. p_A heißt Minkowski-Funktional (oder Eichfunktional).

Beweis: Funktionalanalysis I, Satz 13.1 □

2.2 Satz (Trennungssatz)

Sei E ein topologischer Vektorraum, $A, B \subseteq E$ konvex, nichtleer, A offen und $A \cap B = \varnothing$. Dann gibt es $x' \in E'$, sodass

$$\forall x \in A : \operatorname{Re} x'(x) < \gamma := \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in B\} \tag{*}$$

(Die „affine reelle Hyperebene“ $(\operatorname{Re} x')^{-1}(\gamma)$ „trennt“ A und B.)

2.3 Lemma

Sei E ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq E$ offen, $x^* \in E^* \backslash \{0\}$. Dann $x^*(A)$ offen.

Beweis: Es gibt $x_0 \in E$ mit $x'(x_0) \neq 0$. Für $x \in A$ ist $A - x$ Nullumgebung, also absorbierend (Satz 1.2(iii)). Daher gibt es $\varepsilon > 0$:

$$x + B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) x_0 \subseteq A$$

Somit:

$$\underbrace{x^*(x) + B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) x_0}_{B_{\mathbb{K}}(x^*(x), \varepsilon \cdot |x^*(x_0)|)} \subseteq x^*(A)$$

d.h. $x^*(A)$ ist offen. □

Beweis: (von Satz 2.2) Es genügt (*) mit $\leq$ zu zeigen, wegen Lemma 2.3. Ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(i). $B = \{x_0\}$:

Ohne Einschränkung $0 \in A$ (sonst wähle $x_1 \in A$ und betrachte $A - x_1, x_0 - x_1$). Dann A absorbierend und somit existiert nach Proposition 2.1 das Minkowski-Funktional p_A. Sei $f : \operatorname{lin}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x_0) = 1$. Dann $f(x_0) = 1 \le p_A(x_0)$, daher

$$\forall \lambda \ge 0 : f(\lambda \cdot x_0) = \lambda \le \lambda \cdot p_A(x_0) = p_A(\lambda \cdot x_0)$$
$$\forall \lambda \le 0 : f(\lambda \cdot x_0) = \lambda \le 0 \le p_A(\lambda \cdot x)$$

Nach Satz von Hahn-Banach: Es existiert $x' \in E^*$ mit

$$x'(x_0) = 1 \qquad\qquad \forall x \in E : x'(x) \le p_A(x)$$

insbesondere $x'(x) \le 1 = x'(x_0)$ für alle $x \in A$.

Noch zu zeigen: x' stetig. Dazu genügt Stetigkeit in 0. Für $\varepsilon > 0, x \in \varepsilon \cdot (A \cap (-A))$ ist $\pm\frac{1}{\varepsilon} \cdot x \in A$, damit

$$\pm x'(x) = \varepsilon \cdot x' \underbrace{\left(\pm\frac{1}{\varepsilon} \cdot x\right)}_{\in A} \le \varepsilon \cdot \underbrace{p_A\left(\pm\frac{1}{\varepsilon} \cdot x\right)}_{\le 1} \le \varepsilon$$

(ii). Allgemeiner Fall: $A_1 := A - B = \bigcup_{x \in B} A - B$ offen und konvex, $0 \notin A_1$. Nach (i) gibt es $x' \in E'$, $x' \neq 0$, sodass

$$\forall x \in A, y \in B : x'(x - y) \le x'(0) = 0$$ □

Beispiel (i). Beispiel für einen topologischen Vektorraum E, wo E und $\varnothing$ die einzigen offenen konvexen Mengen sind:

Sei $p \in (0,1)$, (Ω, μ) Maßraum und

$$L^p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mb}; \int |f|^p \, d\mu\}$$

$L^p(\mu)$ ist Vektorraum. Definiere

$$d(f, g) := \int |f - g|^p \, d\mu$$

dann d Metrik. $(L^p(\mu), d)$ ist ein topologischer Vektorraum.

Weiter mit $((0,1), \lambda|_{(0,1)})$. Ist $U \subseteq L^p(0,1)$ offen, konvex, nichtleer, dann $UL = L^p(0,1)$: Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass $\operatorname{co} B(0, \varepsilon) = L^p(0,1)$. Sei $f \in L^p(0,1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $f_1, \dots, f_n \in L^p$:

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j \qquad\qquad \int |f_j|^p \, dx = \frac{1}{n} \cdot \int |f|^p \, dx$$

also insbesondere $f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot n$ und

$$d(0, n \cdot f_j) = \int |n \cdot f_j|^p \, dx \qquad = n^p \cdot \int |f_j|^p \, dx = n^{p-1} \cdot \int |f|^p \, dx$$
$$\to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Für $n^{p-1} \cdot \int |f|^p \, dx < \varepsilon$ ist $n \cdot f_1, \dots, n \cdot f_n \in B(0, \varepsilon)$, also $f \in \operatorname{co} B(0, \varepsilon)$.

Definition Sei E ein topologischer Vektorraum. Dann heißt E lokalkonvexer Raum :⇔ E besitzt eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.

Beispiel (i). Sei (E, p) halbnormierter Raum, dann ist E lokalkonvex.

(ii). Sei $(E_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie lokalkonvexer Räume, E Vektorraum, $f_\iota : E \to E_\iota$ linear ($\iota \in I$). Dann ist $\mathcal{T}((f_\iota)_{\iota \in I})$ lokalkonvex.

Beweis: Sei $\mathcal{U}_\iota$ eine Nullumgebungsbasis von E_ι für $\iota \in I$. Dann ist

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcap_{\iota \in F} f_\iota^{-1}(U_\iota); F \subseteq I \,\text{endlich}, U_\iota \in \mathcal{U}_\iota (\iota \in F) \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis in E. Für Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen sind $\bigcap_{\iota \in F} f_\iota^{-1}(U_\iota)$ ebenfalls konvex. □

(iii). Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar. Dann ist $\sigma(E,F)$ lokalkonvex nach (ii).

(iv). Sei E ein Vektorraum und P eine Menge aus Halbnormen. Dann ist $\mathcal{T}_P$ lokalkonvex. (Umkehrung gilt auch, Folgerung 3.7)

2.4 Satz

Sei E ein lokalkonvexer Raum. Sei $B \subseteq E$ abgeschlossen und konvex sowie $x_0 \in E \backslash B$. Dann gibt es $x' \in E'$ mit

$$\operatorname{Re} \langle x_0, x' \rangle < \inf_{x \in B} \operatorname{Re} \langle x, x' \rangle$$

2.5 Lemma

Sei E ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq E$ konvex. Dann sind $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ konvex.

Beweis: (i). Sei $x \in A$, $y \in \operatorname{int} A$, $t \in (0,1]$. Dann ist

$$(1-t) \cdot x + t \cdot y \in \underbrace{(1-t) \cdot x + t \cdot \operatorname{int} A}_{\text{offen}} \subseteq A$$

(ii). Sei $f : \mathbb{R} \times E \times E \to E, (\lambda, x, y) \mapsto (1-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot y$. Dann ist f stetig, daher ist $f^{-1}(\operatorname{cl} A)$ abgeschlossen. Außerdem gilt

$$[0,1] \times A \times A \subseteq f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\operatorname{cl} A)$$

da A konvex. Daher ist

$$\begin{aligned} [0,1] \times \operatorname{cl} A \times \operatorname{cl} A &\overset{!}{=} \overline{[0,1] \times A \times A} \subseteq f^{-1}(\operatorname{cl} A) \\ \Rightarrow f([0,1] \times \operatorname{cl} A \times \operatorname{cl} A) &\subseteq f(f^{-1}(\operatorname{cl} A)) \subseteq \operatorname{cl} A \end{aligned}$$

□

Beweis: (von Theorem 2.4) Da $x_0 \notin B$ ist, gibt es $U \in \mathcal{U}_0$ mit $(x_0 + U) \cap B = \varnothing$. Ohne Einschränkung sei U konvex und offen (Lemma 2.5). Nach Satz 2.2 gibt es $x' \in E'$ mit

$$\forall x \in (x_0 + U) : \operatorname{Re} \langle x, x' \rangle < \inf_{y \in B} \operatorname{Re} \langle y, x' \rangle$$

□

2.6 Folgerung

Sei E ein lokalkonvexer Raum. Dann sind äquivalent:

(i). E separiert

(ii). $\langle E, E' \rangle$ trennend in E

Beweis:
- $(i) \Rightarrow (ii)$: $\{0\}$ ist abgeschlossen, da E separiert ist. Sei $x_0 \in E \backslash \{0\}$. Nach Satz 2.4 gibt es ein $x' \in E'$ mit $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: $\sigma(E, E')$ ist separiert, da $\langle E, E' \rangle$ trennend in E ist. Daher ist auch die feinere Topologie von E separiert. □

Bemerkung Es gilt $L^p(0,1)' = \{0\}$ für $p \in (0,1)$. Für ℓ^p mit $p \in (0,1)$ ist $(\ell^p)'$ trennend.

2.7 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvexer Raum, $B \subseteq E$ konvex.

(i). Dann sind äquivalent:

(1) B ist $\mathcal{T}$-abgeschlossen

(2) B ist $\sigma(E, E')$-abgeschlossen

(ii). $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}} B = \mathrm{cl}_{\sigma(E,E')} B$

Beweis: (i).
- $(2) \Rightarrow (1)$: Klar, wegen $\sigma(E, E') \subseteq \mathcal{T}$.
- $(1) \Rightarrow (2)$: Sei $x_0 \in E \setminus B \in \mathcal{T}$. Nach Satz 2.4 gibt es $x' \in E'$ mit

$$\mathrm{Re}\langle x_0, x' \rangle < \inf_{x \in B} \mathrm{Re}\langle x, x' \rangle$$

Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$B(\langle x_0, x' \rangle, \varepsilon) \cap \{\langle x, x' \rangle; x \in B\} = \emptyset$$

also ist

$$\underbrace{(x')^{-1}(B(\langle x_0, x' \rangle, \varepsilon))}_{\in \mathcal{U}_{x_0}(\sigma(E,E'))} \cap B = \emptyset$$

Damit ist $x_0 \in \mathrm{int}_{\sigma(E,E')}(E \setminus B)$. Folglich ist $E \setminus B \in \sigma(E, E')$, also B $\sigma(E, E')$-abgeschlossen.

(ii). „$\subseteq$“: Klar, da $\sigma(E, E') \subseteq \mathcal{T}$. „$\supseteq$“: $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}} B$ konvex (nach Lemma 2.5), nach (i) gilt $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}} \in \sigma(E, E')$. $\square$

3

Polaren, Bipolarensatz & polare Topologien

Definition Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar.

(i). Sei $A \subseteq E$. Dann heißt
$$A^\circ := \{y \in F; \forall x \in A : |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$$
die (absolute) Polare von A.

(ii). Sei $B \subseteq F$. Dann heißt
$$B^\circ := \{x \in E; \forall y \in B : |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$$
die Polare von B.

3.1 Satz

Sei E ein topologischer Vektorraum, $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis in E. Dann gilt

$$\begin{aligned} E' &= \left\{x' \in E^*; \exists U \in \mathcal{U} : \sup_{x \in U} |\langle x, x' \rangle| \leq 1\right\} \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \left\{x' \in E^*; \sup_{x \in U} |\langle x, x' \rangle| \leq 1\right\} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ \end{aligned}$$

(Polarbildung bzgl. $\langle E, E^* \rangle$)

Beweis: Klar. □

Bemerkung Sei $\langle E, F \rangle$ ein trennendes duales Paar und $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf E. Dann kann „$E' = F$“ in E^* entschieden werden.

Definition Sei E ein Vektorraum, $A \subseteq E$. Dann heißt

(i). A kreisförmig $:\Leftrightarrow \forall \lambda \in B_{\mathbb{K}} : \lambda \cdot A \subseteq A$

(ii). A absolutkonvex $:\Leftrightarrow$ A konvex und kreisförmig

Bemerkung (i). Es sind äquivalent:

(1) A absolutkonvex

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x_1, \ldots, x_n \in A\, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in B_{\mathbb{K}} : \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \in A$

(ii). Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$ bestehend aus kreisförmigen (absolutkonvexen) Mengen. Dann ist $\bigcap \mathcal{S}$ kreisförmig (absolutkonvex).

Definition (i). Sei E ein Vektorraum, $A \subseteq E$. Dann heißt

$$\operatorname{aco} A := \{B \in \mathcal{P}(E); A \subseteq B, B \text{ absolutkonvex}\}$$

die absolutkonvexe Hülle von A.

(ii). Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq E$. Dann heißt A beschränkt $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})\, \exists \lambda \in (0, \infty) : A \subseteq \lambda \cdot U$

3.2 Lemma

Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar, $A \subseteq E$.

(i). A° ist absolutkonvex und $\sigma(F,E)$-abgeschlossen.

(ii). Äquivalent:

(1) A $\sigma(E,F)$-beschränkt

(2) A° absorbierend

Beweis: (i). Wegen

$$A^\circ = \bigcap_{x \in A} \underbrace{\langle x, \cdot \rangle^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0,1])}_{\text{absolutkonvex},\sigma(F,E)-\text{abgeschlossen}}$$

folgt die Behauptung.

(ii). „$\Rightarrow$“: Sei $y \in F$. Dann $U_{\{y\}} := \{x \in E; \langle x, y \rangle \leq 1\}$ eine $\sigma(E,F)$-Nullumgebung, also gibt es $\lambda > 0$ mit $A \subseteq \lambda \cdot U_{\{y\}}$, d.h.

$$\forall x \in A : |\langle x, y \rangle| \leq \lambda$$

also $\frac{1}{\lambda} \cdot y \in A^\circ$. Da A° kreisförmig ist, folgt $\mu \cdot y \in A^\circ$ für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu| \leq \frac{1}{\lambda}$.

„$\Leftarrow$“: Seien $y_1, \ldots, y_n \in F$. Dann gibt es $\lambda > 0$ mit $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \lambda \cdot A^\circ$, d.h. $|\langle x, y_j \rangle| \leq \lambda$ für alle $x \in A$, $j = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in E; |\langle x, y_j \rangle| \leq \lambda\} = \lambda \cdot \underbrace{U_{\{y_1,\ldots,y_n\}}}_{\sigma(E,F)-\text{NUB}}$$ □

Bemerkung Seien $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar und $A, B \subseteq E$. Dann gilt

$$A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \supseteq B^\circ$$
$$(\lambda \cdot A)^\circ = \frac{1}{\lambda} \cdot A^\circ$$
$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

3.3 Satz (Bipolarensatz)

Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar und $A \subseteq E$. Dann

$$A^{\circ\circ} := (A^\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(E,F)}$$

Beweis: Offenbar $A \subseteq A^{\circ\circ}$. Aus Lemma 3.2(i):

$$\overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(E,F)} \subseteq A^{\circ\circ}$$

Sei $x_0 \in E \backslash \overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(E,F)}$. Nach Satz 2.4 gibt es $x' \in (E, \sigma(E,F))'$ (und daher $y \in F$ mit $x' = \langle \cdot, y \rangle$), sodass

$$\begin{aligned}\sup\{|\langle x, y \rangle|; x \in A\} &\leq \sup\{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle; x \in \overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma}\} < \operatorname{Re}\langle x_0, y \rangle \\ &\leq |\langle x_0, y \rangle|\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung sei linke Seite = 1 (Skalieren von y). Damit $y \in A^\circ$ und wegen $1 < |\langle x_0, y \rangle|$ gilt $x_0 \notin (A^\circ)^\circ$. □

Bemerkung (i). Bipolarensatz verallgemeinert Satz von Goldstine:

Sei E ein normierter Raum. Dann gilt

$$B_{E''} = \overline{B_E}^{\sigma(E'',E')}$$

Nämlich: Es gilt im dualen Raum $\langle E'', E' \rangle$

$$B_{E''} \overset{B_E^\circ = B_{E'}}{=} B_E^{\circ\circ} \overset{3.3}{=} \overline{B_E}^{\sigma(E'',E')}$$

(ii). Andere Version (z.B. von Meise-Vogt):

Sei E ein lokalkonvex und $A \subseteq E$. Dann

$$A^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{aco} A}$$

(Polarenbildung in $\langle E, E' \rangle$) Folgt aus Bipolarensatz wegen $\overline{\operatorname{aco} A} = \overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(E,E')}$ nach Folgerung 2.7. Umkehrung klar, falls $\langle E, F \rangle$ trennend in F ist (mit Anwendung auf lokalkonvexen Raum $(E, \sigma(E,F))$).

(iii). Es folgt aus dem Bipolarensatz, dass

$$(\overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(E,F)})^\circ \overset{3.3}{=} (A^{\circ\circ})^\circ = (A^\circ)^{\circ\circ} \overset{3.3}{=} A^\circ$$

wegen A° absolutkonvex und $\sigma(E,F)$-abgeschlossen (Lemma 3.2). Beweis geht aber auch direkt!

Bemerkung (Vorbetrachtung für „polare Topologien“) Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar und $B \subseteq F$. Dann B° absorbierend $\overset{3.2}{\Leftrightarrow}$ B $\sigma(F,E)$-beschränkt. B° kommt also als Nullumgebung nur in Frage, falls B $\sigma(F,E)$-beschränkt ist.

Definition Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar und

$$\mathcal{B}_\sigma(F) := \{B \subseteq F; B\, \sigma(F,E) - \text{beschränkt}\}$$

Für $B \in \mathcal{B}_\sigma(F)$ definieren wir

$$q_B : E \to [0,\infty), x \mapsto q_B(x) := \sup_{y \in B} |\langle x, y \rangle|$$

(Dann q_B Halbnorm, leicht! *Da* $\{y \in F; |\langle x,y \rangle| \le 1\}$ *eine Nullumgebung ist, folgt insbesondere* $q_B(x) < \infty$.) Es gilt

$$\{x \in E; q_B(x) \le 1\} = B^\circ$$

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}_\sigma(F)$. Dann erzeugt $\{q_B; B \in \mathcal{M}\}$ eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ auf E, die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von $\mathcal{M}$. Die so entstehenden Topologien heißen polare Topologien. Die für $\mathcal{M} = \mathcal{B}_\sigma(F)$ entstehende Topologie heißt starke Topologie. Notation: $\beta(E,F)$.

Bemerkung (i). $\mathcal{T}_{\{y\};y\in F\}} = \sigma(E,F)$

(ii). $\operatorname{lin} \bigcup \mathcal{M} = F \Rightarrow \mathcal{T}_\mathcal{M} \supseteq \sigma(E,F)$

Beweis: Sei $y \in B \in \mathcal{M}$. Dann $q_{\{y\}} \le q_B$, daher $(E, \mathcal{T}_\mathcal{M}) \overset{\text{id}}{\to} (E, q_{\{y\}})$ stetig, also $\langle \cdot, y \rangle \in (E, \mathcal{T}_\mathcal{M})'$. Da jedes $y \in F$ Linearkombination von Elementen aus $\bigcup \mathcal{M}$ ist, folgt $\langle \cdot, y \rangle \in (E, \mathcal{T}_\mathcal{M})'$. □

(iii). In (ii) gilt nicht die Umkehrung: Betrachte $\langle \ell_1, \ell_\infty \rangle$, $B := \{x \in c_c; \|x\|_\infty \le 1\}$ und $\mathcal{M} = \{B\}$. Dann $B^\circ = B_{\ell_1}$ und somit $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ Normtopologie auf $\ell_1 \supseteq \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$. Aber:

$$\operatorname{lin} B = c_c \neq \ell_\infty$$

(Jedoch: $B^{\circ\circ} = \overline{B}^{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} = B_{\ell_\infty}$, $B^\circ = (\overline{\operatorname{aco} B}^\sigma)^\circ$)

(iv). Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}_\sigma(F)$. Bilde

$$\hat{\mathcal{M}} = \{\operatorname{aco} \bigcup \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \text{ endlich}\}$$

Dann gilt $\mathcal{T}_{\hat{\mathcal{M}}} = \mathcal{T}_\mathcal{M}$.

Beweis:
- Ist $B \in \mathcal{M}$, dann $q_B = q_{\operatorname{aco} B}$. Damit $\{q_B; B \in \mathcal{M}\} \subseteq \{q_{\hat{B}}; \hat{B} \in \hat{\mathcal{M}}\}$, also $\mathcal{T}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}_{\hat{\mathcal{M}}}$.
- Für $B, C \in \mathcal{M}$ gilt $q_{B \cup C} = \max\{q_B, q_C\}$. Daraus folgt $\mathcal{T}_{\{q_B, q_C\}} = \mathcal{T}_{q_{B\cup C}}$. Endliche Iteration liefert dann $\mathcal{T}_{\hat{\mathcal{M}}} = \mathcal{T}_\mathcal{M}$. □

Vorteil von $\hat{\mathcal{M}}$ ist, dass

$$\{\{x \in E; q_{\hat{B}}(x) \leq \varepsilon\}; \varepsilon > 0, \hat{B} \in \hat{\mathcal{M}}\}$$

eine Nullumgebungsbasis ist.

(v). Sei $B \in \mathcal{B}_\sigma(F)$, dann $q_B = p_{B^\circ}$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} p_{B^\circ}(x) &= \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda \cdot B^\circ\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0; \frac{1}{\lambda} \cdot \sup_{y \in B} |\langle x, y \rangle| \leq 1\right\} \\ &= \inf\{\lambda > 0; q_B(x) \leq \lambda\} = q_B(x) \end{aligned}$$

□

Beispiel (zu $\beta(E,F)$) Sei E ein Banachraum. Dann sind $\beta(E,E')$ und $\beta(E',E)$ die Normtopologie.

Beweis: (i). $\beta(E,E')$: $B \subseteq E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt, d.h.

$$\forall x \in E : \sup_{x' \in B} |x'(x)| < \infty$$

Mit Satz von der gleichmäßigen Konvergenz: B norm-beschränkt, d.h. $B \subseteq c \cdot B_{E'}$ für ein $c > 0$. Damit folgt $B^\circ \supseteq (c \cdot B_{E'})^\circ = \frac{1}{c} \cdot B_E$, also $\beta(E,E') \subseteq$ Norm-Topologie. Aber auch $B_E = (B_{E'})^\circ \in \beta(E,E')$, also ist $\beta(E,E')$ die Normtopologie.

(ii). $\beta(E',E)$: Ist $A \subseteq E$ $\sigma(E,E')$-beschränkt, dann auch $\sigma(E'',E')$-beschränkt in E'', also $\|\cdot\|_{E'}$-beschränkt nach Satz von gleichmäßiger Beschränktheit. Wegen $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{E''}$ ist A norm-beschränkt. Dann weiter wie in (i).

□

Während $(E, \beta(E,E'))' = E'$ gilt, gilt $(E', \beta(E',E)) = E \Leftrightarrow E$ reflexiv.

Definition (i). Sei $\langle E, F \rangle$ ein trennendes duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf E heißt verträglich mit $\langle E, F \rangle :\Leftrightarrow (E, \mathcal{T})' = F$.

(ii). Sei $(E, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann ist $E'' := (E', \beta(E',E))'$ der Bidual von E. Offenbar gilt $E \subseteq E''$, falls E separiert ist, da $\beta(E',E) \supseteq \sigma(E',E)$. E heißt halbreflexiv, wenn E separiert ist und $E'' = E$. E heißt reflexiv, falls E halbreflexiv und $\mathcal{T} \supseteq \beta(E,E')$. (Dann $\beta(E,E') = \mathcal{T}$.)

3.4 Lemma (i). Seien E, F topologische Vektorräume und $f : E \to F$ linear, stetig. Sei $A \subseteq E$ beschränkt, dann ist $f(A)$ beschränkt.

(ii). Seien $(E, \mathcal{T})$, $(E_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ topologische Vektorräume und $A \subseteq E$. Seien $f_\iota : E \to E_\iota$ linear und $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Dann

$$A \text{ beschränkt } \Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota(A) \text{ beschränkt}$$

Beweis: (i). Sei $V \in \mathcal{U}_0(F)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E. Es existiert $\lambda > 0$ mit $A \subseteq \lambda \cdot f^{-1}(V)$, also

$$f(A) \subseteq \lambda \cdot f(f^{-1}(V)) \subseteq \lambda \cdot V$$

(ii). „$\Rightarrow$“: Klar nach (i).

„$\Leftarrow$“: Für $F \subseteq I$ endlich, $U_\iota \in \mathcal{U}_0(E_\iota)$ für $\iota \in F$ (ohne Einschränkung: kreisförmig, siehe Lemma 3.5):

$$\exists \lambda > 0 \, \forall \iota \in F : f_\iota(A) \subseteq \lambda \cdot U_\iota$$

Daher

$$\begin{aligned} \forall \iota \in F : A &\subseteq f_\iota^{-1}(f_\iota(A)) \subseteq \lambda \cdot f_\iota^{-1}(U_\iota) \\ \Rightarrow A &\subseteq \lambda \cdot \underbrace{\bigcap_{\iota \in F} f_\iota^{-1}(U_\iota)}_{\text{NUB}} \end{aligned}$$

□

3.5 Lemma

Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$.

(i). $\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0}(A + U)$

(ii). Ist A kreisförmig, $0 \in \operatorname{int} A$, dann sind $\operatorname{int} A$, $\bar{A}$ kreisförmig.

Beweis: (i). $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_0 : (x - U) \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_0 : x \in A + U$

(ii). Ist $x \in \operatorname{int} A$, $|\lambda| \leq 1$, dann $\lambda \cdot x \in \lambda \cdot \operatorname{int} A$, also folgt für $\lambda \neq 0$:

$$\lambda \cdot x \in \lambda \cdot \operatorname{int} A = \operatorname{int}(\lambda \cdot A) \overset{\text{A kf}}{\subseteq} \operatorname{int} A$$

Ist $x \in \bar{A}$, dann für $|\lambda| \leq 1$:

$$\lambda \cdot x \in \lambda \cdot \bar{A} = \overline{\lambda \cdot A} \subseteq \bar{\lambda}$$

□

3.6 Satz

Sei E ein topologischer Vektorraum.

(i). Die kreisförmigen abgeschlossenen (bzw. offenen) Nullumgebungen bilden eine Nullumgebungsbasis.

(ii). Ist E lokalkonvex, so bilden die absolutkonvexen abgeschlossenen (bzw. offenen) Nullumgebungen eine Nullumgebungsbasis.

Beweis: (i). Sei $U \in \mathcal{U}_0$. Es gibt $U_1 \in \mathcal{U}_0$ mit $U_1 + U_1 \subseteq U$ (Stetigkeit der Addition), somit $\bar{U_1} \subseteq U$ (Lemma 3.5(i)). Außerdem

$$\exists \varepsilon > 0, U_2 \in \mathcal{U}_0 \, \forall |\lambda| \leq \varepsilon : \lambda \cdot U_2 \subseteq U_1$$

Damit ist $V := \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda \cdot U_2$ eine kreisförmige Nullumgebung und $\operatorname{int} V \subseteq \bar{V} \subseteq \bar{U}_1 \subseteq U$.

(ii). Wie in (i). Zusätzlich: Wähle U_1 konvex,

$$V := \operatorname{co}\left(\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda \cdot U_2\right)$$

ist absolutkonvex. □

3.7 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann gibt es eine Menge P von Halbnormen, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$.

Beweis: $\mathcal{U}$ sei eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen und $P := \{p_U; U \in \mathcal{U}\}$ *(dann gilt* $U = \{x \in E; p_U(x) < 1\}$*).* □

Bemerkung Sei E ein lokalkonvexer Raum, $B \subseteq E'$. Dann B gleichgradig stetig in 0 ($:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists U \in \mathcal{U}_0\, \forall x' \in B, x \in U : |\langle x, x' \rangle| \le \varepsilon$) $\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_0 : B \subseteq U^\circ$ ($\Leftrightarrow B$ gleichgradig stetig $\Leftrightarrow B$ „gleichmäßig gleichgradig stetig").

3.8 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und $F \subseteq E$ Teilraum, $y' \in F'$. Dann gibt es $x' \in E'$ mit $x'|_F = y'$.

Beweis: Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Halbnormen auf E, die $\mathcal{T}$ erzeugt (Folgerung 3.7). Ohne Einschränkung sei $\mathcal{P}$ nach oben gerichtet. Dann gibt es $p \in \mathcal{P}$, $c \geq 0$ mit

$$\forall y \in F : |y'(y)| \leq c \cdot p(y)$$

Nach Satz von Hahn-Banach (für Halbnormen) gibt es $x' : E \to \mathbb{K}$ linear mit $x'|_F = y'$,

$$\forall x \in E : |x'(x)| \leq c \cdot p(x)$$

(und folglich $x' \in E'$). $\square$

4

Sätze von Tychonoff und Alaoglu-Bourbaki

4.1 Satz (Tychonoff)

Sei $(X_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von kompakten Räumen. Dann ist $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ kompakt in der Produkttopologie.

Definition Sei X eine Menge.

(i). Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ mit

  (1) $A \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

  (2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(ii). Eine Filterbasis $\mathcal{F}_0$ auf X ist $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ mit

$$A, B \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \exists C \in \mathcal{F}_0 : C \subseteq A \cap B$$

(Dann ist $\mathcal{F} := \{A \subseteq X; \exists B \in \mathcal{F}_0 : B \subseteq A\}$ ein Filter, der von $\mathcal{F}_0$ erzeugte Filter.)

(iii). Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. $\mathcal{F}$ heißt Ultrafilter $:\Leftrightarrow$ Es gibt keinen feineren Filter, der $\mathcal{F}$ enthält, d.h. $\mathcal{G}$ Filter, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

(iv). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, $x \in X$. Dann heißt $\mathcal{F}$ konvergent gegen x ($\mathcal{F} \to x$) $:\Leftrightarrow \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ ($\Leftrightarrow$ Für alle Umgebungen von x existiert $A \in \mathcal{F} : A \subseteq U$.)

Beispiel (i). Sei $x \in X$ und $\mathcal{F} := \{A \subseteq X; x \in A\}$. $\mathcal{F}$ heißt fixierter Filter.

(ii). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $\mathcal{F}_0 := \{\{x_j; j \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis und $x_n \to x \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$.

Bemerkung (i). Zu jedem Filter gibt es einen feineren Ultrafilter (Zorn'sches Lemma). Dabei wesentlich:

$$\mathcal{F}\,\text{Ultrafilter} \Leftrightarrow \{A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{F} \vee X\backslash A \in \mathcal{F}\}$$

(ii). Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, $A \subseteq X$ mit $A \cap B \neq \varnothing$ für alle $B \in \mathcal{F}$, so ist $\{A \cap B; B \in \mathcal{F}\}$ Filterbasis. Der erzeugte Filter ist feiner als $\mathcal{F}$.

4.2 Proposition

Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X kompakt

(ii). Jeder Ultrafilter auf X ist konvergent.

Beweis: (i). $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Dann hat $\{\bar{A}; A \in \mathcal{F}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, also

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \bar{A} \neq \varnothing$$

Sei $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \bar{A}$ und $U \in \mathcal{U}_x$. Dann

$$\forall A \in \mathcal{F} : U \cap A \neq \varnothing$$

Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $U \in \mathcal{F}$. Also $\mathcal{F} \to x$.

(ii). $(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\mathcal{C}$ ein Mengensystem abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Dann ist

$$\check{\mathcal{F}}_0 := \left\{ \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A; \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{A} \,\text{endlich} \right\}$$

eine Filterbasis. Feinerer Ultrafilter zu von $\check{\mathcal{F}}_0$ erzeugten Filter hat Grenzwert; dieser liegt in A für alle $A \in \mathcal{C}$ (da A abgeschlossen ist und $A \in \check{\mathcal{F}}_0$), somit in $\bigcap \mathcal{C}$, also $\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$.

□

Bemerkung Weitere Äquivalenz in 4.2: Jeder Filter auf X besitzt einen Häufungswert.

Definition Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann ist $\{f(A); A \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis auf Y und $f(\mathcal{F})$ bezeichne den zugehörigen Filter, Bildfilter.

Bemerkung Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, dann auch $f(\mathcal{F})$: Für $B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ oder $f^{-1}(Y \backslash B) \in \mathcal{F}$. Im ersten Fall folgt $f(\mathcal{F} \ni f(f^{-1}(B)) \subseteq B \in$ und im zweiten Fall $f(\mathcal{F} \ni f(f^{-1}(Y \backslash B)) \subseteq Y \backslash B$.

4.3 Proposition (i). Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

(ii). Seien X, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ topologische Räume, $f_\iota : X \to X_\iota$ $(\iota \in I)$, X trage Initialtopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota\in I}$. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann

$$\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota(\mathcal{F}) \to f_\iota(x)$$

Beweis: (i). Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x (f stetig), also $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Aus $f(\mathcal{F}) \ni f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ folgt $V \in f(\mathcal{F})$.

(ii). „$\Rightarrow$“: Klar mit (i).

„$\Leftarrow$“: Sei U eine Umgebung von x. Es gibt $F \subseteq I$ endlich, $U_\iota \in \mathcal{U}_{f_\iota(x)}$ $(\iota \in F)$ mit

$$\bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota) \subseteq U$$

Es existiert $A \in \mathcal{F}$ mit $f_\iota(A) \subseteq U_\iota$ $(\iota \in F)$ wegen $f_\iota(\mathcal{F}) \to f_\iota(x)$. Daher

$$\begin{aligned} A &\subseteq f_\iota^{-1}(f_\iota(A)) \subseteq f_\iota^{-1}(U_\iota) \qquad (\iota \in F) \\ \Rightarrow A &\subseteq \bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota) \subseteq U \end{aligned}$$

also $U \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \to x$. □

Beweis: (von Satz 4.1)
O.E.: $X_\iota \neq \varnothing$ $(\iota \in I)$. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_{\iota\in I} X_\iota$. Dann $\mathcal{F}_\iota := \mathrm{pr}_\iota(\mathcal{F})$ Ultrafilter auf X_ι, also konvergent nach Satz 4.2, d.h. es existiert $x_\iota \in X_\iota : \mathcal{F}_\iota \to x_\iota$ $(\iota \in I)$. Proposition 4.3(ii): $\mathcal{F} \to (x_\iota)_{\iota\in I}$. Satz 4.2 gibt Behauptung. □

4.4 Folgerung (Alaoglu-Bourbaki)

Sei E ein lokalkonvexer Raum und U eine Nullumgebung. Dann ist $U^\circ \sigma(E', E)$-kompakt. (Polarenbildung in (E, E'))

4.5 Lemma

Sei E ein Vektorraum. Dann ist E^* abgeschlossen in $\mathbb{K}^E$ bzgl. der Produkttopologie.

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ ist

$$\varphi_{\lambda,x,y} : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}, f \mapsto (f(\lambda \cdot x - y) - \lambda \cdot f(x) - f(y))$$

stetig, daher

$$\bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ x,y \in E}} \varphi^{-1}_{\lambda,x,y}(\{0\}) = E^*$$

abgeschlossen. $\square$

Beweis: (von Folgerung 4.4) Ohne Einschränkung ist U absolutkonvex. Dann

$$\begin{aligned} U^\circ &= \{x' \in E'; \forall x \in U : |\langle x, x' \rangle| \leq 1\} \overset{*}{=} \{x' \in E^*; \forall x \in E : |\langle x, x' \rangle| \leq p_U(x)\} \\ &= \{f \in \mathbb{K}^E; |(x)| \leq p_U(x)\} \cap E^* = \underbrace{\left(\prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}[0, p_U(x)]\right)}_{\overset{4.1}{=} \text{kompakt}} \cap E^* \end{aligned}$$

also U° abgeschlossen. (Beachte: $\sigma(E', E)$ = Produkttopologie $\cap E'$ für $E' \subseteq \mathbb{K}^E$.) Zu $(*)$:

(i). „$\supseteq$“: Für $x \in U$ gilt $p_U(x) \leq 1$.

(ii). „$\subseteq$“: Ist $x \in E$, $\lambda > p_U(x)$, dann $\frac{1}{\lambda} \cdot x \in U$, also

$$\left|\langle \frac{1}{\lambda} \cdot x, x' \rangle\right| \leq 1 \Leftrightarrow |\langle x, x' \rangle| \leq \lambda$$

Damit $|\langle x, x' \rangle| \leq p_U(x)$. $\square$

Bemerkung In Robertson-R. wird Satz von Alaoglu-Bourbaki ohne (sichtbare) Benutzung von Satz von Tychonoff bewiesen: Präkompaktheit, Vollständigkeit.

5 Satz von Mackey-Arens

Definition Sei $\langle E, F \rangle$ ein duales Paar. Sei

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}} := \{B \subseteq F; B\sigma(F,E) - \text{kompakt}, B\,\text{absolut-konvex}\}$$

dann $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{B}_\sigma(F)$. Dann heißt $\mathcal{T}(E,F) := \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ Mackey-Topologie. Entsprechend $\mathcal{T}(F,E)$.

Bemerkung (i). Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen konvexen Mengen. Sei $\mathcal{M} := \{U^\circ; U \in \mathcal{U}\}$. Dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Siehe Proposition 6.4.

(ii). Ziel: $\langle E, F \rangle$ trennend, $\mathcal{T}$ lokalkonvexe Topologie auf E. Dann $\mathcal{T}$ verträglich mit $\langle E, F \rangle \Leftrightarrow \sigma(E,F) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E,F)$.

Schon klar ist „$\Rightarrow$“: $\sigma(E,F) \subseteq \mathcal{T}$ ist bekannt. Aus der ersten Bemerkung folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}(E,F)$.

Beispiel ($\mathcal{T}(\ell_\infty, \ell_1)$) (i). $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakte Mengen? Bekannt aus Funktionalanalysis I: $A \subseteq \ell_1$ kompakt $\Leftrightarrow$ A beschränkt, abgeschlossen und $\sup_{x \in A} \sum_{j \geq n} |x_j| \to 0$ für $n \to \infty$. Offenbar folgt A $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakt. Behauptung: Es sind äquivalent:

(1) $A \subseteq \ell_1$ relativ kompakt

(2) $\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ monoton fallend: $A \subseteq \left\{x \in \ell_1, \sum_{j > n} |x_j| \leq \alpha_n\right\} =: A'_\alpha$

(3) A relativ $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-kompakt

Dazu benötigt:

(1) Satz von Eberlein-Šmulian (siehe Satz 5.4): $A \subseteq X$ rel. schwach kompakt $\Leftrightarrow$ A bedingt schwach folgenkompakt, d.h. jede Folge besitzt eine schwach konvergente Teilfolge im Raum X.

(2) Sei $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \ell_1$ und $x \in \ell_1$. Dann $x^n \to x \Leftrightarrow x^n \to x$ schwach.

Beweis:
- „$\Rightarrow$“: Klar.
- „$\Leftarrow$“: Ohne Einschränkung $x = 0$. Dann $x_j^n \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ (Projektionen stetig, linear). Zeige:

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=m}^{\infty} |x_j^n| = 0 \tag{*}$$

(Dann folgt, dass $A := \{x^n; n \in \mathbb{N}\}$ kompakt, daher existiert (norm-)konvergente Teilfolge und damit wegen schwacher Konvergenz die Behauptung.)
Annahme $(*)$ gilt nicht. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=m}^{\infty} |x_j^n| > r > 0$$

Daher gibt es eine Teilfolge $(x^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine monoton wachsende Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{m_k}|x_j^{n_k}|\le\frac{r}{6}\qquad\qquad \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}}|x_j^{n_k}|\ge\frac{r}{2}\sum_{j=m_{k+1}+1}^{\infty}|x_j^{n_k}|\le\frac{r}{6}$$

Definiere $y_j := \overline{\operatorname{sgn}(x_j^{n_k})}$ für $m_k+1\le j\le m_{k+1}$ ($k\in\mathbb{N}$). Dann ist $\|y\|_\infty=1$ und

$$\begin{aligned}|\langle x^{n_k},y\rangle| &\ge -\underbrace{\left|\sum_{j=1}^{m_k}x_j^{n_k}\cdot y_j\right|}_{\le\frac{r}{6}}+\underbrace{\left|\sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}}x_j^{n_k}\cdot y_j\right|}_{\ge\frac{r}{2}}-\underbrace{\left|\sum_{j=m_{k+1}+1}^{\infty}x_j^{n_k}\cdot y_j\right|}_{\le\frac{r}{6}}\\ &\ge\frac{r}{6}\end{aligned}$$

also $x^{n_j}\not\to 0$ schwach. Widerspruch! □

(ii). Mit $\mathcal{A}:=\{\alpha;\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq(0,\infty)$ monoton fallend$,\alpha_n\to 0\}$ und $\mathcal{M}':=\{A'_\alpha;\alpha\in A\}$ gilt $\mathcal{T}(\ell_\infty,\ell_1)=\mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$. Wir zeigen, dass man $\mathcal{M}'$ ersetzen kann durch $\mathcal{M}:=\{\alpha\cdot B_{\ell_1};\alpha\in A\}$ wobei $\alpha\cdot B_{\ell_1}:=\{(\alpha\cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}=:\alpha\cdot x; x\in\ell_1,\|x\|_1\le 1\}$.

Für $\alpha\in\mathcal{A}$ gilt $\alpha\cdot B_{\ell_1}\subseteq A'_\alpha$: Aus $x\in B_{\ell_1}$ folgt

$$\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j\cdot|x_j|\le\alpha_n\cdot\sum_{j=n}^{\infty}|x_j|\le\alpha_n$$

also $\alpha\cdot x\in A'_\alpha$. Für $\alpha\in\mathcal{A}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\alpha_n-\alpha_{n+1}}_{\ge 0}=\alpha_1<\infty$$

daher gibt es $\beta\in\mathcal{A}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}\cdot(\alpha_n-\alpha_{n+1})\le 1$$

(siehe Bemerkung im Anschluss). Mit diesem β gilt $A'_\alpha\subseteq\beta\cdot B_{\ell_1}$, denn für $x\in A'_\alpha$: ($\beta_0:=0$)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{\beta_n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta_{k+1}}-\frac{1}{\beta_k}\right)\sum_{n=k}^{\infty}|x_n|\overset{x\in A'_\alpha}{\le}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\beta_{k+1}}-\frac{1}{\beta_k}\right)}_{\ge 0}\cdot\alpha_k\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}\cdot(\alpha_n-\alpha_{n+1})\le 1\end{aligned}$$

(Beweis nach Hendrik Vogt, Sascha Trostorff, Marcus Waurick) Damit folgt $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}=\mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$.

(iii). Für $\alpha\in\mathcal{A}$ setze $A_\alpha:=\alpha\cdot B_{\ell_1}$ und $p_\alpha:=q_{A_\alpha}$. Für $y\in\ell_\infty$ gilt:

$$\begin{aligned}p_\alpha(y)&=\sup_{x\in A_\alpha}|\langle y,x\rangle|=\sup_{x\in B_{\ell_1}}|\langle y,\alpha\cdot x\rangle|=\sum_{x\in B_{\ell_1}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\cdot y_n)\cdot x_n\right|\\ &=\sup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n\cdot|y_n|\end{aligned}$$

Mit $\mathcal{P}:=\{p_\alpha;\alpha\in\mathcal{A}\}$ folgt $\mathcal{T}(\ell_\infty,\ell_1)=\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. (Nicht metrisierbar: Es gibt keine monoton wachsende Folge $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$, sodass für jedes $\alpha\in\mathcal{A}$ ein $n\in\mathbb{N}$ existiert mit $\alpha\le\alpha_n$, d.h. es gibt keine abzählbare Nullumgebungsbasis.)

(iv). $(\ell_\infty,\mathcal{T}_{\mathcal{P}})'=\ell_1$:

Sei $\xi \in (\ell_\infty, \mathcal{T}_\mathcal{P})'$. Dann gibt es $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $|\xi(y)| \le p_\alpha(y)$ für alle $y \in \ell_\infty$, somit $\xi \in (\ell_\infty, p_\alpha)'$. (Beachte dazu: $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha^1 \vee \alpha^2, \lambda \cdot \alpha \in \mathcal{A}$ für alle $\lambda > 0$.) Die Abbildung $j : (\ell_\infty, p_\alpha) \to c_0, y \mapsto \alpha \cdot y$ ist isometrisches und hat dichtes Bild. Daher gibt es $\hat{\xi} \in \ell_1 = c_0'$ mit

$$\xi(y) = \langle\, \alpha \cdot y, \hat{\xi} \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \alpha_n \cdot \hat{\xi}_n$$

d.h. $x := \alpha \cdot \hat{\xi}$ stellt ξ dar. Damit $(\ell_\infty, \mathcal{T}_\mathcal{P})' \subseteq \ell_1$.

Auch: Für $x \in \ell_1$ gibt es $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $\left(\frac{1}{\alpha_n} \cdot x_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$, damit

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|y_n \cdot x_n|}_{\left|\frac{x_n}{\alpha_n}\right| \cdot |\alpha_n \cdot y_n|} \le \left\|\frac{x}{\alpha}\right\|_1 \cdot p_\alpha(y)$$

Bemerkung (i). $\mathcal{T}(\ell_\infty, \ell_1) \subset \beta(\ell_\infty, \ell_1)$

(ii). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ mit $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$. Dann gibt es $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ monoton wachsend mit $c_n \to \infty$, sodass $\sum_{n=1}^\infty c_n \cdot a_n < \infty$.

Beweis: Es gibt Teilfolge $(n_j)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n \ge n_j} \alpha_n \le \frac{1}{4^j}$$

Setze

$$c_n := \begin{cases} 1 & n < n_1 \\ 2^j & n_j < n < n_{j+1} \end{cases}$$

Dann $c_n \to \infty$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot a_n \le \sum_{n=1}^{n_1 - 1} c_n \cdot a_n + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \cdot \underbrace{\sum_{n \ge n_j} a_n}_{\le \frac{1}{4^j}} < \infty$$ □

5.1 Lemma

Sei E ein topologischer Vektorraum und $A, B \subseteq E$ kompakt. Dann $A + B$ kompakt.

Beweis: $A + B = a(A \times B)$ ist kompakt. □

5.2 Lemma

Sei E ein separierter lokalkonvexer Raum sowie $A \subseteq E$ absolutkonvex und kompakt. Sei $\langle\, E'^*, E' \,\rangle$ das betrachtete duale Paar. Dann $A^{\circ\circ} = A$.

Beweis: Es gilt $A^{\circ\circ} = \overline{A}^{\sigma(E'^*, E')} \overset{*}{=} A$. Zu $(*)$: A kompakt $\Rightarrow$ $A \sigma(E, E')$-kompakt und $\sigma(E, E') = \sigma(E'^*, E') \cap E$, insbesondere $(E, \sigma(E, E')) \hookrightarrow (E'^*, \sigma(E'^*, E'))$ stetig. (Beachte, dass aus E lokalkonvex und separiert folgt, dass $\kappa : E \to E''$ injektiv.) □

5.3 Satz (Mackey-Arens)

Sei $\langle\, E, F \,\rangle$ ein trennendes duales Paar und $(E, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann gilt $(E, \mathcal{T}') = F \Leftrightarrow \sigma(E, F) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E, F)$.

Beweis:
- „$\Rightarrow$“: Siehe Anfang §5.

- „$\Leftarrow$“: Zu zeigen: $(E,\mathcal{T}(E,F))' = F$. Die Menge

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq F; A \,\text{absolutkonvex}, A\,\sigma(F,E)-\text{kompakt}\}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

(i). $y \in F \Rightarrow \operatorname{aco}\{y\} \in \mathcal{M}$ (damit $\mathcal{T}(E,F) \supseteq \sigma(E,F)$)

(ii). $A \in \mathcal{M}, \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot A \in \mathcal{M}$

(iii). $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{M} : A \cup B \subseteq C$ (nämlich $C := A + B$, siehe Lemma 5.1)

Daraus folgt, dass $\mathcal{U} := \{A^\circ; A \in \mathcal{M}\}$ eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}(E,F) = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ (vgl. Bemerkung in §3, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{T}_{\hat{\mathcal{M}}}$). Mit Satz 3.1 im dualen Paar $\langle E, E^* \rangle$ folgt:

$$(E,\mathcal{T}(E,F))' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A^{\circ\circ} \overset{5.2}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = F$$

mit Lemma 5.2 angewendet auf das Paar $\langle (F,\sigma(F,E))'^*, (F,\sigma(F,E))' \rangle$.

□

5.4 Satz (Eberlein-Šmulian)

Sei E ein Banachraum und $A \subseteq E$. Dann sind äquivalent:

(i). A relativ schwach kompakt, d.h. $\bar{A}^\sigma$ σ-kompakt

(ii). A bedingt schwach folgenkompakt, d.h. jede Folge in A besitzt eine σ-konvergente Teilfolge mit Grenzwert in E.

(iii). A bedingt schwach abzählbar kompakt, d.h. jede Folge in A besitzt einen σ-Häufungswert.

5.5 Lemma

Sei E ein Banachraum und $F \subseteq E'$ ein Teilraum mit $\dim F < \infty$. Dann gibt es $M \subseteq B_E$ mit M endlich, sodass

$$\forall x' \in F : \|x'\| \le 2 \max_{x \in M} |x'(x)|$$

Beweis: Sei $S_F := \{x \in F; \|x\| = 1\}$. S_F ist kompakt (wegen $\dim F < \infty$) und daher gibt es $x_1', \dots, x_n' \in S_F$ mit

$$S_F \subseteq \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k', \frac{1}{4}\right)$$

Es gibt $x_1, \dots, x_n \in B_E$ mit $x_k'(x_k) \ge \frac{3}{4}$ für $k = 1, \dots, n$. Sei $x' \in F$, dann gibt es $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x' \in B\left(x_k', \frac{1}{4}\right)$ und daher

$$|x'(x_k)| \ge \underbrace{x_k'(x_k)}_{\ge \frac{3}{4}} - \underbrace{|x_k'(x_k) - x'(x_k)|}_{\le \frac{1}{4}} \ge \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \|x'\|$$

Mit $M := \{x_1, \dots, x_n\}$ folgt die Behauptung. □

5.6 Proposition

Seien E ein Banachraum, $A \subseteq E'$ und $x_0' \in \bar{A}^{\sigma(E',E)}$. Dann gibt es eine Folge $(a_n')_{n \in \mathbb{N}}$ in A, für die jeder $\sigma(E',E)$-Häufungswert in $\overline{\operatorname{lin}\{a_n'; n \in \mathbb{N}\}}$ gleich x_0' ist.

Beweis: Rekursiv mit Lemma 5.5: Es existieren eine wachsende Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in B_E, $M_0 := \varnothing$, und eine Folge $(a_n')_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

$$x \in M_{n-1} : |(x_0' - a_n')(x)| \le \frac{1}{n}$$

$$\forall x' \in \operatorname{lin}\{x_0', a_1', \dots, a_n'\} : \|x'\| \le 2 \max_{x \in M_n} |x'(x)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. (Benutze für erste Ungleichung, dass $x_0' \in \bar{A}^{\sigma(E',E)}$ und konstruiere daraus a_n'. Die Existenz von M_n folgt dann aus 5.5.)
Sei $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ und $F := \operatorname{lin}(\{x_0'\} \cup \{a_n'; n \in \mathbb{N}\})$. Dann

$$\|x'\| \leq 2 \sup_{x\in M} |x'(x)| \tag{*}$$

für alle $x' \in F$ und damit auch für alle $x' \in \bar{F}$. Sei nun $y' \in \bar{F}$ ein $\sigma(E',E)$-Häufungswert von $(a_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und $x \in M$. Dann ist $x \in M_k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in M_{n-1}$ für alle $n > k$. Daher

$$\forall n > k : |(x_0' - a_n')(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Da $y'(x)$ Häufungswert von $a_n'(x)$ ist, folgt $(x_0' - y')(x) = 0$. Wegen $(*)$ gilt somit

$$\|x_0' - y'\| \leq 2 \sup_{x\in M} \underbrace{|(x_0' - y')(x)|}_{0} = 0$$

also $y' = x_0'$. □

5.7 Proposition

Sei E ein separabler Banachraum und $A \subseteq E$ $\sigma(E,E')$-kompakt. Dann $(A, \sigma(E,E'))$ metrisierbar.

Beweis: (i). Es gibt $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ in E', die die Punkte von E trennt: Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S_E dicht, dann gibt es $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ in E' mit $\|x_n'\| = 1$ und $x_n'(x_n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Sei $x \in S_E$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_n\| < 1$, damit

$$x_n'(x) \leq \underbrace{x_n'(x - x_n)}_{|\cdot|<1} + \underbrace{x_n'(x_n)}_{1} \neq 0$$

(ii). Definiere Halbnorm $p_n(x) := |x_n'(x)|$. Dann $(E, \{p_n; n \in \mathbb{N}\})$ metrisierbar und separiert. $(E, \sigma(E,E')) \hookrightarrow (E, \{p_n; n \in \mathbb{N}\})$ stetig. Somit ist $(A, \sigma(E,E')) \hookrightarrow (A, \mathcal{T}_P)$ ein Homöomorphismus (wegen A $\sigma(E,E')$-kompakt, s. Funktionalanalysis I 2.3(ii)).

□

Beweis: (von Satz 5.4)

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Dann $E_0 := \overline{\operatorname{lin}\{a_n; n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ $\sigma(E,E')$-abgeschlossen und $A_0 := A \cap E_0$ ist relativ schwach kompakt in E_0. E_0 ist separabel, also folgt mit Proposition 5.7, dass schwache Topologie auf $\bar{A}_0^\sigma$ metrisierbar und daraus die Behauptung.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.
- (iii) $\Rightarrow$ (i): Aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass A beschränkt ist. (Wenn A unbeschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\|x_n\| \to \infty$. Dann gibt es $x' \in E'$ mit $x'(x_n) \to \infty$, Widerspruch!) Daher $\bar{A}^{\sigma(E'',E')}$ $\sigma(E'',E')$-kompakt (Satz von Alaoglu).

  Sei $x_0'' \in \bar{A}^{\sigma(E'',E')}$. Zu zeigen: $x_0'' \in E$. Dazu: Wähle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A entsprechend Proposition 5.6 (in $\langle E', E'' \rangle$). Nach Voraussetzung in (iii) hat diese Folge einen $\sigma(E,E')$-Häufungswert $x \in E$. Da $E_0 := \overline{\operatorname{lin}\{a_n; n \in \mathbb{N}\}}$ $\sigma(E,E')$-abgeschlossen ist, gilt $x \in E_0$. Proposition 5.6: $E \ni x = x_0''$.

  Also $\bar{A}^{\sigma(E'',E')} \subseteq E$, daher $\bar{A}^{\sigma(E,E')} = \bar{A}^{\sigma(E'',E')}$ $\sigma(E,E')$-kompakt.

□

Bemerkung (zur Mackey-Topologie)

$$\mathcal{M} := \{B \subseteq F; B \,\text{absolut-konvex}, B\, \sigma(F,E) - \text{kompakt}\}$$

Frage: $B \subseteq \sigma(F,E)$-kompakt $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\overline{\operatorname{aco} B}^\sigma$ $\sigma(F,E)$-kompakt. Gilt im Allgemeinen nicht, siehe Beispiel! Aber:

(i). E Banachraum, $B \subseteq E$ kompakt $\Rightarrow \overline{\operatorname{co} B}$, $\overline{\operatorname{aco} B}$ kompakt (Satz von Mazur)

(ii). E Banachraum, $B \subseteq E$ $\sigma(E, E')$-kompakt $\Rightarrow$ $\overline{\operatorname{co} B}^{\sigma}$, $\overline{\operatorname{aco} B}^{\sigma}$ $\sigma(E, E')$-kompakt (Satz von Krein-Šmulian).

Beispiel: Betrachte duales Paar $\langle \ell_1, c_c \rangle$. Die Folge $(2^n \cdot e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ℓ_1 konvergiert bzgl. (ℓ_1, c_c) gegen 0, also $B := \{2^n \cdot e_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $\sigma(\ell_1, c_c)$-kompakt. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$y^n := \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} \cdot \underbrace{2^j \cdot e_j}_{\in B} \in \operatorname{co} B$$

Für einen $\sigma(\ell_1, c_c)$-Häufungswert $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ der Folge $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ müsste $y_j = 1$ für $j \in \mathbb{N}$ gelten, damit $y \notin \ell_1$.

6

Topologien auf E'' & tonnelierte Räume

- 1. Ziel: Betrachte lokalkonvexen Raum E und $\kappa : E \to E'' = (E', \beta(E', E))'$. Suche Topologie auf E'', sodass κ stetig.
- Ziel der Vorbereitung: E normierter Raum, $A \subseteq E$ $\sigma(E, E')$-beschränkt, dann A normbeschränkt („Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit“). Gilt auch allgemeiner, siehe Satz 6.3.

6.1 Lemma

Sei (E, p) ein halb-normierter Raum und $A \subseteq E$. Dann A $\mathcal{T}_p$-beschränkt $\Leftrightarrow$ A $\sigma(E, E')$-beschränkt.

Beweis:
- „$\Rightarrow$“: Klar. Bekannt, da $(E, \mathcal{T}_p) \overset{\text{id}}{\to} (E, \sigma(E, E'))$ stetig.
- „$\Leftarrow$“: $(E, p)'$ ist Banachraum (Beweis wie für normierte Räume) mit Norm
$$\|x'\| = \sup\{|\langle x, x' \rangle|; x \in E, p(x) \le 1\}$$
Sei $\kappa : E \to E'', \kappa(x)(x') := \langle x, x' \rangle$. Aus Satz von Hahn-Banach folgt $\|\kappa(x)\|_{E''} = p(x)$. Dann $\kappa(A)$ $\sigma(E'', E')$-beschränkt, daher $\|\cdot\|_{E''}$-beschränkt, also
$$\sup\{\underbrace{p(x)}_{\|\kappa(x)\|_{E''}}; x \in A\} < \infty$$
nach Satz von gleichmäßiger Beschränktheit, d.h. A beschränkt.

$\square$

6.2 Lemma

Seien E, F lokalkonvexe Räume und $f : E \to F$ linear, stetig. Dann ist f $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$-stetig.

Beweis: Nach Satz 1.2 genügt es zu zeigen, dass für alle $y' \in F'$ gilt, dass $y' \circ f$ $\sigma(E, E')$-stetig. Dies ist offenbar wahr, da $y' \circ f \in E'$. $\square$

6.3 Satz (Mackey)

Sei E ein lokalkonvexer Raum und $A \subseteq E$. Dann A $\sigma(E, E')$-beschränkt $\Leftrightarrow$ A beschränkt.

Beweis:
- „$\Leftarrow$“: Bekannt.
- „$\Rightarrow$“: E trägt die Initialtopologie bzgl. $E \to (E, p)$ mit $p \in P$, P Menge von Halbnormen (Satz 3.7). Da A $\sigma(E, E')$-beschränkt ist, folgt aus Lemma 6.2, dass A σ-beschränkt in (E, p) und somit beschränkt in (E, p) (Lemma 6.1). Daher A beschränkt nach Lemma 3.4(ii).

$\square$

6.4 Proposition

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis. Sei $\mathcal{M} := \{U^\circ; U \in \mathcal{U}\}$ (in $\langle E, E' \rangle$), dann $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.

Beweis: Ohne Einschränkung U absolutkonvex und abgeschlossen. Dann

$$\{B^\circ; B \in \mathcal{M}\} = \{U^{\circ\circ}; U \in \mathcal{U}\} \overset{3.3}{=} \mathcal{U}$$

$\{B^\circ; B \in \mathcal{M}\}$ bildet Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_\mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ „reichhaltig", d.h.

$$A \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{M} : \lambda \cdot A \subseteq B \qquad\qquad A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{M} : A \cup B \subseteq C$$

Mit $\mathcal{M}$ aus Proposition 6.4 wird Topologie auf E'' erklärt. Dazu nötig: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}_\sigma(E', E'')$.

6.5 Proposition

Sei E ein lokalkonvexer Raum und U eine Nullumgebung in E. Dann ist U° $\beta(E', E)$-beschränkt ($\Leftrightarrow U^\circ$ $\sigma(E', E'')$-beschränkt, Satz von Mackey).

Beweis: Sei V eine $\beta(E', E)$-Nullumgebung. Ohne Einschränkung $V = B^\circ$ mit $B \subseteq E$ $\sigma(E, E')$-beschränkt. Nach Satz von Mackey: B beschränkt, also wird B von U absorbiert, d.h.

$$\exists \lambda_0 > 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \geq \lambda_0 : B \subseteq \lambda \cdot U$$

Damit folgt $V = B^\circ \supseteq \frac{1}{\lambda} \cdot U^\circ$. □

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{U}$ die Menge aller Nullumgebungen. Sei $\mathcal{M} := \{U^\circ; U \in \mathcal{U}\}$, dann heißt $\varepsilon(E'', E) := \mathcal{T}_\mathcal{M}$ auf E'' (in $\langle E'', E' \rangle$) die natürliche Topologie. Durch

$$\{B^\circ; B \in \mathcal{M}\} = \{\overline{\operatorname{aco} U}^{\sigma(E'', E')}; U \in \mathcal{U}\}$$

ist eine Nullumgebungsbasis von $\varepsilon(E'', E)$ gegeben.

6.6 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ separierter lokalkonvexer Raum. Die Topologie $\varepsilon(E'', E)$ ist die feinste polare Topologie auf E'' in $\langle E'', E' \rangle$ für die $\kappa : (E, \mathcal{T}) \to E''$ stetig ist.

Beweis: Im Folgenden bezeichne $^\bullet$ Polare in $\langle E'', E' \rangle$ und $^\circ$ Polare in $\langle E, E' \rangle$.

(i). $\kappa : (E, \mathcal{T}) \to (E'', \varepsilon(E'', E))$ ist stetig: Für $U \in \mathcal{U}$ ist $(U^\circ)^\bullet \cap E = U^{\circ\circ} \supseteq U$, also ist $U^{\circ\bullet} \cap E$ eine Nullumgebung.

(ii). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$ eine polare Topologie auf E'' mit $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{B}_\sigma(E', E'')$ und κ stetig. Sei $B \in \mathcal{M}'$, dann $B^\bullet$ $\mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$-Nullumgebung und daher nach Voraussetzung $B^\circ = B^\bullet \cap E$ eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung. Daher $B \subseteq B^{\circ\circ} \in \mathcal{M}$, somit $B^\bullet \supseteq (B^{\circ\circ})^\bullet$ Nullumgebung in $\mathcal{T}_\mathcal{M}$, also $\mathcal{T}_{\mathcal{M}'} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{M}$. □

Bemerkung (i). Da $\varepsilon(E'', E)$ polare Topologie für $\langle E'', E' \rangle$ ist, gilt immer $\varepsilon(E'', E) \subseteq \beta(E'', E')$.

(ii). Satz 6.6 gilt auch, falls E nicht separiert. Ersetze dazu im Beweis $U^{\circ\bullet} \cap E$ durch $\kappa^{-1}(U^{\circ\bullet}) = U^{\circ\circ}$.

6.7 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex. Dann äquivalent:

(i). $\beta(E'', E') = \varepsilon(E'', E)$

(ii). Jede $\beta(E', E)$-beschränkte Menge ist $\mathcal{T}$-gleichgradig stetig.

(iii). Ist $A \subseteq W$ absolutkonvex, abgeschlossen und bornivor (d.h. A absorbiert jede beschränkte Menge), dann ist A eine Nullumgebung in E.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $B \subseteq E'$ $\beta(E', E)$-beschränkt, d.h. B ist $\sigma(E', E'')$-beschränkt (Satz von Mackey). Dann ist $B^\bullet$ eine $\beta(E'', E')$-Nullumgebung, daher $B^\circ = \kappa^{-1}(B^\bullet)$ eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung, d.h. B ist gleichgradig stetig (siehe Bemerkung nach Folgerung 3.7).

- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei A abgeschlossen, absolutkonvex und bornivor. Genügt zu zeigen: A° ist gleichgradig stetig. (Dann ist $A \overset{3.3}{=} (A^\circ)^\circ$ Nullumgebung.)

  Sei V eine $\beta(E', E)$-Nullumgebung, dann ist $V = B^\circ$ mit $B \subseteq E$ beschränkt (Satz von Mackey). Dann: A absorbiert B, also $V = B^\circ$ absorbiert A°. Daher A° $\beta(E', E)$-beschränkt, also gleichgradig stetig nach Voraussetzung.

- (iii) $\Rightarrow$ (i): Es genügt zu zeigen, dass $\kappa : (E, \mathcal{T}) \to (E'', \beta(E'', E'))$ stetig (wegen Satz 6.6 und $\varepsilon(E'', E) \subseteq \beta(E'', E')$).

  Sei U eine $\beta(E'', E')$-Nullumgebung, ohne Einschränkung $U = B^\bullet$ mit $B \subseteq E'$ $\sigma(E', E'')$-beschränkt ($\Leftrightarrow \beta(E', E)$-beschränkt). Zu zeigen: $\kappa^{-1}(U) = \kappa^{-1}(B^\bullet) = B^\circ$ ist $\mathcal{T}$-Nullumgebung. Dazu zeige, dass B° absolutkonvex, abgeschlossen und bornivor.

  (1) B° absolutkonvex, abgeschlossen folgt aus Lemma 3.2(ii).

  (2) B° bornivor: Sei $B_1 \subseteq E$ $\mathcal{T}$-beschränkt ($\Leftrightarrow \sigma(E, E')$-beschränkt). Dann ist B_1° $\beta(E', E)$-Nullumgebung, also absorbiert B_1° die Menge B (da B beschränkt) und daher wird $B_1^{\circ\circ} \supseteq B_1$ von B° absorbiert.

$\square$

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex.

(i). $B \subseteq E$ heißt Tonne $:\Leftrightarrow$ B absolutkonvex, abgeschlossen und absorbierend.

(ii). E heißt tonneliert $:\Leftrightarrow$ Jede Tonne ist eine Nullumgebung.

(iii). E heißt quasitonneliert (infratonneliert) $:\Leftrightarrow$ Jede bornivore Tonne ist Nullumgebung (d.h. (iii) von Satz 6.7 ist erfüllt).

(iv). E heißt bornologisch $:\Leftrightarrow$ Jede absolutkonvexe bornivore Menge ist Nullumgebung.

6.8 Satz

Sei E lokalkonvex und E ein Baire-Raum. Dann ist E tonneliert. Insbesondere sind Fréchet-Räume (vollständig metrisierbare lokalkonvexe Räume) und Banach-Räume tonneliert.

Beweis: Sei B eine Tonne, dann ist $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot B$ mit $n \cdot B$ abgeschlossen, daher $\operatorname{int} B \neq \varnothing$ (da B Baire-Raum). Sei $x_0 \in \operatorname{int} B$, dann existiert eine Nullumgebung U mit U absolutkonvex und $x_0 + U \subseteq B$. Dann auch $-x_0 + U \subseteq B$ (wegen B absolutkonvex) und somit

$$U = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}(x_0 + U) + \frac{1}{2}(-x_0 + U) \subseteq B$$

$\square$

Beispiel (i). Tonnelierte Räume: $C(K)$ für K kompakt, $C(\Omega)$ für Ω σ-kompakt, $C^\infty(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

(ii). Quasitonneliert, aber nicht tonneliert ist zum Beispiel $(c_c, \|\cdot\|_\infty)$: Sei $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ mit $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann ist $B := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; |x_n| \le \alpha_n\}$ eine Tonne, aber keine Nullumgebung. Ist A (eine) bornivor(e Tonne), dann wird Einheitskugel absorbiert, daher A Nullumgebung.

6.9 Proposition

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und metrisierbar. Dann ist jede bornivore Menge $A \subseteq E$ eine Nullumgebung. Insbesondere E quasitonneliert.

Beweis: Es gibt eine absteigende Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E. Sei $A \subseteq E$ keine Nullumgebung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x_n \in U_n \backslash n \cdot A$. Dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und A absorbiert nicht $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also A nicht bornivor. $\square$

6.10 Proposition

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvexer quasitonnelierter Raum. Dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}(E, E')$.

Beweis: • „$\subseteq$“: Klar, Satz 5.3.

- „$\supseteq$“: Sei U eine $\mathcal{T}(E,E')$-Nullumgebung. Ohne Einschränkung: U Tonne. Dann ist U bornivor für $\mathcal{T}$ nach Satz von Mackey. Da E quasitonneliert ist, folgt, dass U $\mathcal{T}$-Nullumgebung.

$\square$

6.11 Lemma

Sei E lokalkonvex und $B \subseteq E$. Dann gilt: B Tonne $\Leftrightarrow$ Es existiert $A \subseteq E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt mit $B = A^\circ$.

Beweis: • „$\Rightarrow$“: $A := B^\circ$

- „$\Leftarrow$“: A° ist Tonne nach Lemma 3.2 und Folgerung 2.7(i).

$\square$

6.12 Satz

Sei $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex. Dann äquivalent:

(i). E tonneliert

(ii). $B \subseteq E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt $\Rightarrow$ B gleichgradig stetig

(iii). $\mathcal{T} = \beta(E,E')$

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $B \subseteq E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt. Dann ist B° eine Tonne, daher Nullumgebung, da E tonneliert.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $B \subseteq E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt, dann B gleichgradig stetig ($\Leftrightarrow$ B° $\mathcal{T}$-Nullumgebung). Damit $\mathcal{T} \supseteq \beta(E,E')$. Sowieso gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E,E') \subseteq \beta(E,E')$ nach Satz 5.3.

- (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei B eine Tonne, dann nach Bipolarensatz $B = (B^\circ)^\circ$ $\beta(E,E')$-Nullumgebung, daher $\mathcal{T}$-Nullumgebung.

$\square$

Bemerkung Für $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex seien

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &:= \{B \subseteq E'; B \,\text{gleichgradig stetig}\}\\
\mathcal{C} &:= \{B \subseteq E'; \overline{\operatorname{aco} B}^{\sigma}\ \sigma(E',E) - \text{kompakt}\}\\
\mathcal{B}_\beta &:= \{B \subseteq E'; B\,\beta(E',E) - \text{beschränkt}\}\\
\mathcal{B}_\sigma &:= \{B \subseteq E'; B\,\sigma(E',E) - \text{beschränkt}\}
\end{aligned}$$

6.13 Lemma

Sei $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex. Dann gilt

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\sigma$$

Beweis: • $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$: Satz von Alaoglu

- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_\beta$: Sei $C = C^{\circ\circ} \in \mathcal{C}$, dann ist C° eine $\mathcal{T}$-Nullumgebung und absorbiert daher jede beschränkte Menge B. Somit: B° absorbiert $C^{\circ\circ} = C$. Also ist C $\beta(E',E)$-beschränkt (denn $\{B^\circ; B \text{ beschränkt}\}$ ist $\beta(E',E)$-Nullumgebungsbasis.)

- $\mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\sigma$: Klar wegen $\beta(E',E) \supseteq \sigma(E',E)$.

$\square$

Bemerkung Für $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex gilt:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{metrisierbar} \arrow[d, "6.9"] & \text{vollständig metrisierbar} \arrow[d] \\
\text{vollständig} & \text{bornologisch} \arrow[l, "8.16"'] \arrow[d, "\text{Def}"] & \text{Baire'sch} \arrow[d, "6.8"] \\
 & \text{quasitonneliert} \arrow[d, "6.10"] \arrow[ddl, shift left] & \text{tonneliert} \arrow[l] \arrow[d, shift left, "6.12"] \\
 & \mathcal{T} = \mathcal{T}(E,E') \arrow[d, shift left, "\text{Def}"] & \mathcal{T} = \beta(E,E') \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left, "6.12"] \\
\mathcal{E} = \mathcal{C} = \mathcal{B}_\beta \arrow[uur, shift left, "6.7"] & \mathcal{E} = \mathcal{C} \arrow[u, shift left] & \mathcal{E} = \mathcal{C} = \mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}_\sigma \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

6.14 Proposition

Sei $(E,\mathcal{T})$ lokalkonvex. Dann sind äquivalent:

(i). E bornologisch

(ii). Für jeden lokalkonvexen Raum F ist jede beschränkte lineare Abbildung $u : E \to F$ stetig (beschränkt: $A \subseteq E$ beschränkt $\Rightarrow u(A)$ beschränkt).

(iii). Für jeden halbnormierten Raum F ist jede beschränkte lineare Abbildung $u : E \to F$ stetig (beschränkt: $A \subseteq E$ beschränkt $\Rightarrow u(A)$ beschränkt).

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei F lokalkonvex und $u : E \to F$ beschränkt. Sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung in F. Sei $A \subseteq A$beschränkt, dann $u(A)$ beschränkt in F und wird daher von U absorbiert. Daher $A \subseteq u^{-1}(u(A))$ wird von $u^{-1}(U)$ absorbiert, somit $u^{-1}(U)$ Nullumgebung in E nach Voraussetzung.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.
- (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $A \subseteq E$ absolutkonvex und bornivor und p_A das Minkowski-Funktional von A. Dann ist id : $(E,\mathcal{T}) \to (E, p_A)$ beschränkt ($B \subseteq E$ beschränkt, dann wird B von $A \subseteq \{x \in E; p_A(x) \leq 1\}$ absorbiert, somit B in (E, p_A) beschränkt.) Nach Voraussetzung ist also id stetig, damit A $\mathcal{T}$-Nullumgebung.

$\square$

7
Reflexivität

- Erinnerung: Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex. Dann heißt
  (i). E halbreflexiv $:\Leftrightarrow$ E separiert, $\kappa : E \to E''$ ist surjektiv.
  (ii). E reflexiv $:\Leftrightarrow$ E halbreflexiv, κ stetig ($\beta(E'', E')$ auf E'')
- Aus §6: E reflexiv $\Leftrightarrow$ E halbreflexiv, quasitonneliert $\Leftrightarrow$ E halbreflexiv, $\mathcal{T} = \beta(E, E')$ $\Leftrightarrow$ E halbreflexiv, tonneliert.

7.1 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und separiert. Dann äquivalent:

(i). E halbreflexiv

(ii). Jede beschränkte Menge in E ist relativ $\sigma(E, E')$-kompakt.

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): „Halbreflexiv" bedeutet, dass $\beta(E', E) = \mathcal{T}(E', E)$. Ist $B \subseteq E$ beschränkt, dann ist B° $\beta(E', E)$-Nullumgebung und es gibt $\mathcal{T}$-Nullumgebung C° mit C absolutkonvex, $\sigma(E, E')$-kompakt mit $C^\circ \subseteq B^\circ$. Also $B \subseteq B^{\circ\circ} \subseteq C^{\circ\circ} = C$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i): Aus (ii) folgt $\mathcal{T}(E', E) = \beta(E', E)$, damit (i).

□

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum. Dann heißt

(i). E Semi-Montelraum $:\Leftrightarrow$ E lokalkonvex und jede beschränkte Menge in E ist relativ kompakt.

(ii). E Montelraum $:\Leftrightarrow$ E Semi-Montelraum, quasitonneliert.

7.2 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ Semi-Montelraum. Dann ist E halbreflexiv. Ist E Montelraum, dann E reflexiv.

Beweis: Klar mit 7.1. □

Beispiel (i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist $C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha f \in C_0(\Omega)\}$ mit Menge von Halbnormen $\{p_m; m \in \mathbb{N}_0\}$,

$$p_m(f) := \sup\{\|\partial^\alpha f\|_\infty; |\alpha| \le m\}$$

ein Montelraum.

Beweis: $C_0^\infty(\Omega)$ ist vollständig metrisierbar, also tonneliert. Noch zu zeigen: Jede beschränkte Menge ist relativ kompakt. Es gilt

$$B \subseteq C_0^\infty(\Omega) \text{ beschränkt} \overset{3.4}{\Leftrightarrow} \exists (C_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \text{ in } (0, \infty) : \sup_{f \in B} p_m(f) \le C_m$$

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B und $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Es gibt Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ p_m-Cauchy-Folge.

Für $m = 0$: Es gilt $\sup\{\|f\|_\infty, \|\partial_1 f\|_\infty, \ldots, \|\partial_n f\|_\infty; f \in B\} \leq C_1$, daher B beschränkt. Außerdem ist B gleichgradig stetig, denn für alle $f \in B$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |x-y|$$

wegen

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dt} f(x + t\cdot(y-x))}_{\sum_{j=1}^n \partial_j f(x+t\cdot(y-x))\cdot(y_j - x_j)} \quad dt\right|$$
$$\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^n (\partial_j f(x+t\cdot(y-x)))^2\right|^{\frac{1}{2}} \cdot |y-x|$$

Satz von Arzelà-Ascoli: Es existiert Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Folge.

Fortgesetzte Auswahl von Teilfolgen und Diagonalverfahren gibt Behauptung: p_m-Cauchy-Folge für alle $m \in \mathbb{N}_0$, daher konvergent (da vollständig). □

Was ist $C_0^\infty(\Omega)'$ (auch ohne Ω beschränkt)? Sei $\eta \in C_0^\infty(\Omega)'$, dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$, sodass

$$\forall f \in C_0^\infty(\Omega) : |\eta(f)| \leq c \cdot p_m(f) = c \cdot \sup\{\|\partial^\alpha f\|_\infty; |\alpha| \leq m\}$$

Definiere $\Phi : C_0^\infty(\Omega) \to C_0(\Omega)^{\{\alpha;|\alpha|\leq m\}}, f \mapsto (\partial^\alpha f)_{|\alpha|\leq m}$. dann Φ stetig, also existiert $\tilde{\eta} \in (C_0(\Omega)^{\{\alpha;|\alpha|\leq m\}})'$ mit $\tilde{\eta}$ Fortsetzung von $\eta\circ\Phi^{-1}$, $\|\tilde{\eta}\| = \|\eta\|$ nach Satz von Hahn-Banach. Maßtheorie (Ries-Markov): Es gibt endliche Borel-Maße μ_α auf Ω, sodass

$$\tilde{\eta}((f_\alpha)_\alpha) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha \, d\mu_\alpha$$
$$\Rightarrow \eta(f) = \sum_{|\alpha|\leq m} \underbrace{\int_\Omega \partial^\alpha f \, d\mu_\alpha}_{\mu_\alpha(\partial^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}\cdot\partial^\alpha_{\mu_\alpha}(f)}$$

für $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Somit

$$\eta = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^\alpha_{\mu_\alpha}$$

(Nicht eindeutig!)

(ii). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C^\infty(\Omega)$ mit Halbnormen

$$p_{K,m}(f) := \sup\{\|\partial^\alpha f\|_K; |\alpha| \leq m\}$$

mit $K \subseteq \Omega$ kompakt, $m \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^\infty(\Omega)$, Montelraum und somit reflexiv.

Beweis:
- Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine „Standard-Ausschöpfung" von Ω, d.h. $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1} \subseteq \Omega$ offen und Ω_k relativ kompakt in Ω_{k+1}, $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ (zum Beispiel $\Omega_k := \left\{x \in \Omega; |x| < k, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n\backslash\Omega) > \frac{1}{k}\right\}$). Dann wird die Topologie erzeugt durch $\{p_{\overline{\Omega_k},m}; k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$, also $C^\infty(\Omega)$ vollständig metrisierbar. Damit $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ tonneliert.
- $C^\infty(\Omega)$ ist Semi-Montelraum: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ mit

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\|\partial^\alpha f\|_{\overline{\Omega_{k+1}}}; |\alpha| \leq 1\} < \infty$$

Dann ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt auf $\overline{\Omega_{k+1}}$ und auf $\overline{\Omega_k}$ gleichgradig (lipschitz)stetig. Nach Arzelà-Ascoli: Es gibt auf $\overline{\Omega_k}$ konvergente Teilfolge.

Sei $B \subseteq C^\infty(\Omega)$ beschränkt. Für $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\sup_{f\in B} p_{\overline{\Omega_{k+1}},k+1}(f) < \infty$$

Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in B. Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem ersten Teil eine Teilfolge, die $p_{\overline{\Omega_k},k}$-Cauchy-Folge ist. Wahl von Teilfolgen ergibt Teilfolge, die Cauchy-Folge für alle $p_{\overline{\Omega_k},k}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist.

□

(iii). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $\mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}; f \text{ holomorph}\}$ mit Halbnormen $p_K(f) := \|f\|_K$ für $K \subseteq \Omega$ kompakt ein Montelraum, daher reflexiv. Folgt aus Satz von Montel.

(iv). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $H(\Omega) = \{f \in C^2(\Omega); f \text{ harmonisch}\} = \{f \in C(\Omega); \Delta f = 0\}$ mit Halbnormen $p_K(f) := \|f\|_K$ für $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist $H(\Omega)$ Montelraum, also reflexiv.

Beweis:
- Sei $P := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$ und $E_p := \{f \in C^\infty(\Omega); Pf = 0\}$. E_p ist abgeschlossener Teilraum von $C^\infty(\Omega)$, daher Montelraum (siehe Satz 7.6).
- Somit $H(\Omega) = E_\Delta$ (als Menge!) Montelraum. Noch zu zeigen: Topologien gleich. Sei $k \in \mathbb{N}$. Schätze $p_{\overline{\Omega_k},k}$ durch $p_{\overline{\Omega_{k+1}}}$ ab: Sei $d := \operatorname{dist}(\overline{\Omega_k}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_{k+1})$, $\varrho \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} \varrho \subseteq B(0,d)$, $\varrho \geq 0$, $\|\varrho\|_1 = 1$, ϱ orthogonal invariant. Für $f \in H(\Omega)$, $x \in \Omega_k$ folgt aus der Mittelwerteigenschaft:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Omega_{k+1}} f(y) \cdot \varrho(x-y)\,dy \\ \Rightarrow \partial^\alpha f(x) &= \int_{\Omega_{k+1}} f(y) \cdot \partial^\alpha \varrho(x-y)\,dy \\ \Rightarrow \|\partial^\alpha f\|_{\Omega_k} &\leq \|f\|_{\overline{\Omega_{k+1}}} \cdot \|\partial^\alpha \varrho\|_1 \end{aligned}$$

□

(v). Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\Omega); \forall m \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n : x \mapsto (1+|x|^2)^m \cdot \partial^\alpha f(x) \text{ beschränkt}\}$ mit Halbnormen

$$p_{m,k}(f) := \sup\{(1+|x|^2)^m \cdot \partial^\alpha f(x); |\alpha| \leq k\}$$

für $k, m \in \mathbb{N}_0$. Ziemlich klar: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Fréchet-Raum. Auch: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Montelraum.

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} p_{m+1,m+1}(f_k) < \infty$. Ziel: $p_{m,m}$-Cauchy-Teilfolge. Sei $\varepsilon > 0$, $R > 0$ mit $\frac{M}{1+R^2} < \varepsilon$. Dann

$$\begin{aligned} &\sup\{(1+|x|^2)^m \cdot |\partial^\alpha f_k(x)|; |x| \geq R, |\alpha| \leq m, k \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\left\{(1+x|^2)^{m+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+|x|^2}}_{\leq \frac{1}{1+R^2}} \cdot |\partial^\alpha f_k(x)|; |x| \geq R, |\alpha| \leq m, k \in \mathbb{N}\right\} \leq \frac{M}{1+R^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Für $|\alpha| \leq m$ ist $\{\partial^\alpha f_k; k \in \mathbb{N}\}$ auf $B[0,R]$ gleichgradig stetig. Arzelà-Ascoli: Es gibt Teilfolge mit

$$\forall j, \ell \in \mathbb{N} : p_{m,m}(f_{k_j} - f_{k_\ell}) < 3\varepsilon$$

Teilfolgen …

□

7.3 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und reflexiv. Dann ist $E' = (E, \beta(E, E'))'$ reflexiv.

Beweis: Nach Voraussetzung und Satz 6.7 ist $(E, \mathcal{T}) = (E'', \beta(E'', E'))$, Also $(E')'' = (E'', \beta(E'', E'))' = (E, \mathcal{T})' = E'$ mit $\beta(E''', E'') = \beta(E', E)$. □

Bemerkung Sei E ein halbreflexiver normierter Raum. Dann $E = E''$ Banachraum. (Beachte, dass E quasitonneliert, also reflexiv.)

7.4 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein Montelraum. Dann ist E' ein Montelraum.

Beweis: Nach Satz 7.3 ist $(E', \beta(E', E))$ reflexiv, also tonneliert. Sei $B \subseteq E'$ $\beta(E', E)$-beschränkt, konvex und abgeschlossen. Nach Satz 6.7 ist B τ-gleichgradig stetig (da E quasitonneliert), daher $\sigma(E', E)$-kompakt (Satz von Alaoglu-Bourbaki). Aus Proposition 7.5 wird folgen: B ist $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$-kompakt mit $\mathcal{C} := \{A \subseteq E; A \text{ kompakt}\}$. Da E Montelraum gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \beta(E', E)$. □

Bemerkung (i). $B \subseteq E'$ gleichgradig stetig (in 0) $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists U \in \mathcal{U}_0 \forall x \in U, f \in B : |f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}_0 \forall x, y \in E, (x - y) \in U \forall f \in B : |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| < \varepsilon \Leftrightarrow:$ B gleichmäßig gleichgradig stetig.

(ii). Sei E ein topologischer Vektorraum. Auf $C(E)$ sei $\mathcal{T}_s$ die Einschränkung der Produkttopologie von $\mathbb{K}^E$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ die Topologie der kompakten Konvergenz.

7.5 Proposition

Sei $B \subseteq C(E)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Dann $\mathcal{T}_s \cap B = \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \cap B$. Insbesondere: B $\mathcal{T}_s$-kompakt $\Leftrightarrow$ B $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$-kompakt.

Beweis:
- „$\subseteq$“: Klar.
- „$\supseteq$“: Sei $f \in B$ und V eine $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$-Umgebung von f, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, $C \subseteq E$ kompakt mit

$$V_{C,\varepsilon} := \left\{ g \in B; \sup_{x \in C} |g(x) - f(x)| < \varepsilon \right\} \subseteq V$$

Es gibt eine kreisförmige Nullumgebung $U \subseteq E$, sodass für alle $g \in B$, $x, y \in E$ mit $x - y \in U$ gilt:

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es gibt $F \subseteq C$ endlich mit $C \subseteq F + U$ (da C kompakt). Dann ist

$$V_{F,\frac{\varepsilon}{3}} = \left\{ g \in B; \sup_{x \in F} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

eine $\mathcal{T}_s$-Umgebung von f und es gilt $V_{F,\frac{\varepsilon}{3}} \subseteq V_{C,\varepsilon}$, denn: Sei $g \in V_{F,\frac{\varepsilon}{3}}$. Zu $y \in C$ gibt es $x \in F$ mit $x - y \in U$, daher

$$|g(y) - f(y)| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$ □

7.6 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt:

(i). E halbreflexiv $\Rightarrow$ F halbreflexiv

(ii). E Semi-Montelraum $\Rightarrow$ F Semi-Montelraum.

Beweis: (i). Folgt aus Satz 7.1, da $\sigma(F, F') = \sigma(E, E') \cap F$ nach Folgerung 3.8.

(ii). Klar nach Definition.

□

Bemerkung Entsprechende Aussagen für „reflexiv“ bzw. „Montel“ wohl nicht wahr. In vorherigen Beispielen war F tonneliert.

8
Vollständigkeit

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$.

(i). Ein Filter $\mathcal{F}$ auf A heißt Cauchy-Filter :⇔ Für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{T}$ gibt es $X \in \mathcal{F}$ mit $X - X \subseteq U$.

(ii). A heißt vollständig :⇔ Jeder Cauchy-Filter auf A ist konvergent in A.

(iii). E heißt quasivollständig :⇔ Jede beschränkte abgeschlossene Menge ist vollständig.

Bemerkung Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$.

(i). Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf A, konvergent gegen $a \in A$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter.

Beweis: Sei U eine Nullumgebung. Dann gibt es eine Nullumgebung V mit $V - V \subseteq U$. $a + V$ ist Umgebung von a und daher $a + V \in \mathcal{F}$,

$$(a + V) - (a + V) = V - V \subseteq U \qquad \square$$

(ii). Ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf A und $a \in A$ ein Häufungswert von $\mathcal{F}$, d.h. für jede Umgebung U von a und jedes $X \in \mathcal{F}$ gilt $U \cap X \neq \varnothing$ ($\Leftrightarrow a \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} \bar{X}$), dann $\mathcal{F} \to a$.

Beweis: Sei U eine Nullumgebung. Dann gibt es Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$ und $X \in \mathcal{F}$ mit $X - X \subseteq V$. Dann

$$X \cap (a + V) \neq \varnothing$$

da a Häufungswert. Sei $x \in X \cap (a + V)$. Für $y \in X$ folgt dann $y - x \in V$, daher

$$y \in x + V \subseteq a + V + V \subseteq a + U$$

Damit $X \subseteq a + U$. $\square$

(iii). Ist E separiert und $A \subseteq E$ vollständig, dann A abgeschlossen.

Beweis: Ist $x \in \bar{A}$, so gibt es einen Filter $\mathcal{F}$ in A mit $\mathcal{F} \to x$. Dann $\mathcal{F}$ Cauchy-Filter nach (i) und daher in A konvergent. Somit $x \in A$, da Grenzwert eindeutig. $\square$

(iv). Ist A vollständig und $B \subseteq A$ abgeschlossen, dann ist B vollständig.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter in B, dann ist $\mathcal{F}$ Cauchy-Filterbasis in A und somit konvergent in A. Da $B \in \mathcal{F}$ liegen alle Häufungswerte in $B = \bar{B}$. $\square$

(v). Sei E vollständig metrisierbar. Dann ist E vollständig.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter. Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis mit $U_n \downarrow$. Es gibt $X_n \in \mathcal{F}$ mit $X_n - X_n \subseteq U_n$, $X_n \downarrow$. Sei $x_n \in X_n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, also $x_n \to x$. Sei $\hat{\mathcal{F}}$ der von der Filterbasis $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Filter. Dann x Häufungswert von $\hat{\mathcal{F}}$ (da $x \in \bigcap_n \overline{X_n}$). Da $\hat{\mathcal{F}}$ Cauchy-Filter ist, gilt $\hat{\mathcal{F}} \to x$. Wegen $\mathcal{F} \supseteq \hat{\mathcal{F}}$ folgt $\mathcal{F} \to x$. $\square$

(vi). Seien $(E,\mathcal{T})$, $(F,\mathcal{S})$ topologische Vektorräume und $f : E \to F$ linear, stetig. Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter in E. Dann $f(\mathcal{F})$ Cauchy-Filter in F.

8.1 Satz

Sei E ein separierter topologischer Vektorraum. Dann gibt es einen vollständigen separierten topologischen Vektorraum $\hat{E}$, sodass E isomorph zu einem dichten Teilraum von $\hat{E}$ ist. $\hat{E}$ ist eindeutig (bis auf Isomorphie) und heißt Vervollständigung von E.

Beweis: siehe Horváth, Schaefer □

8.2 Proposition (i). Sei $(E_\iota)_{\iota\in I}$ Familie von topologischen Vektorräumen. Dann gilt: $\forall \iota \in I : E_i$ (quasi)vollständig $\Rightarrow E := \prod_{\iota\in I} E_\iota$ (quasi)vollständig.

(ii). Sei I eine Menge. $\mathbb{K}^I$ ist vollständig.

(iii). Sei E ein Vektorraum. Dann ist $(E^*, \sigma(E^*, E))$ vollständig.

Beweis: (i). Für vollständig: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter in E, dann $\mathrm{pr}_\iota(\mathcal{F})$ Cauchy-Filter in E_ι, also konvergent gegen $x_\iota \in E_\iota$ ($\iota \in I$). Dann $\mathcal{F} \to (x_\iota)_{\iota\in I}$ nach Proposition 4.3. Für quasivollständig: Entsprechend.

(ii). Klar mit (i).

(iii). E^* ist abgeschlossen in Produkttopologie von $\mathbb{K}^E$ nach Lemma 4.5, daher vollständig.

□

Ziel: Topologischer Raum E, der quasivollständig, aber nicht vollständig ist.

8.3 Lemma

Sei E lokalkonvex und tonneliert. Dann ist $(E', \sigma(E', E))$ quasivollständig.

Beweis: Sei $B \subseteq E'$ $\sigma(E', E)$-beschränkt, dann B gleichgradig stetig (Satz 6.12), d.h. es gibt $U \in \mathcal{U}_0(E)$ mit $B \subseteq U^\circ$. Nach Satz von Alaoglu-Bourbaki ist U° $\sigma(E', E)$ kompakt, somit vollständig. ($\mathcal{F}$ Cauchy-Filter auf $U^\circ \Rightarrow$ Es existiert $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ Ultra-Filter, dann $\mathcal{F}' \to x$ in U° (Proposition 4.2), daher x Häufungswert von $\mathcal{F}$, also $\mathcal{F} \to x$.) □

8.4 Lemma

Sei $\langle E, F\rangle$ ein duales trennendes Paar. Dann ist E dicht in $(F^*, \sigma(F^*, F))$. Somit F^* Vervollständigung von $(E, \sigma(E, F))$.

Beweis: Mit $\mathcal{A} := \{A \subseteq F; A \text{ endlich}\}$ gilt $\mathcal{T}_\mathcal{A} = \sigma(F^*, F)$. Sei $y \in F^*$, $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $y|_{\mathrm{lin}\,A}$ $\sigma(F, E)$-stetig. Nach Folgerung 3.8 gibt es $x \in E$, sodass $\langle x, \cdot\rangle|_{\mathrm{lin}\,A} = y|_{\mathrm{lin}\,A}$, d.h. $q_A(x - y) = 0$. Da $\mathcal{A}$ nach oben gerichtet ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung (i). In Lemma 8.4 sei $y \in F^* \backslash E$. Sei $\mathcal{F} := \{X_G; G \subseteq F \text{ Teilraum mit } \dim G < \infty\}$ wobei $X_G := \{x \in E; \langle x, \cdot\rangle|_G = y|_G\}$. Dann $\mathcal{F}$ Cauchy-Filter-Basis bzgl. $\sigma(E, F)$, nicht konvergent in E.

(ii). Ist E ein Banachraum mit $\dim E = \infty$, so ist $(E', \sigma(E', E))$ quasivollständig (Lemma 8.3), aber nicht vollständig (Lemma 8.4).

8.5 Satz

Sei E ein Vektorraum und $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ Topologien auf E mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ besitze eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ aus $\mathcal{S}$-abgeschlossenen Mengen.

(i). Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{T}$-Cauchy-Filter und $x \in E$, sodass $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{S}} x$. Dann gilt $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

(ii). Sei $A \subseteq E$ $\mathcal{S}$-vollständig. Dann ist A $\mathcal{T}$-vollständig. Insbesondere: $(E, \mathcal{S})$ vollständig $\Rightarrow$ $(E, \mathcal{T})$ vollständig.

Beweis: (i). Sei $U \in \mathcal{U}$. Dann gibt es $A \in \mathcal{F}$ mit $A - A \subseteq U$. Für $y \in A$ gilt also $y - A \subseteq U$, damit auch

$$y - \overline{A}^{\mathcal{S}} \subseteq U \quad \Rightarrow \overline{A}^{\mathcal{S}} \subseteq y - U$$

somit $x \in y - U$, also $A - x \subseteq U$ ($\Rightarrow A \subseteq x + U$). Damit $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

(ii). Klar mit (i), da jeder $\mathcal{T}$-Cauchy-Filter auch $\mathcal{S}$-Cauchy-Filter ist.

□

Beispiel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist vollständig (Lemma 8.2). ℓ_p mit Norm-Topologie $\mathcal{T}$, Einschränkung $\mathcal{S}$ = Produkttopologie $\cap \ell_p$ (mit $\ell_p \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$). B_{ℓ_p} ist abgeschlossen in Produkttopologie (Komplement offen), somit $\mathcal{S}$-vollständig. Somit B_{ℓ_p} auch $\mathcal{T}$-vollständig nach Satz 8.5.

Bemerkung Satz 8.5(ii) gilt auch mit folgenvollständig.

8.6 Satz

Sei E lokalkonvex und quasivollständig. Sei $B \subseteq E'$ $\sigma(E', E)$-beschränkt, dann ist B $\beta(E', E)$-beschränkt, d.h. $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_\beta$.

8.7 Folgerung

Sei E quasivollständig, lokalkonvex und quasitonneliert. Dann ist E tonneliert.

Beweis: Aus E quasivollständig folgt $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_\beta$ nach Satz 8.6. Satz 6.7: E quasitonneliert $\Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{B}_\beta$. Daher $\mathcal{E} = \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_\beta$ und somit E tonneliert (Satz 6.12). □

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und $B \subseteq E$ absolutkonvex, beschränkt und abgeschlossen. Definiere $E_B \coloneqq \operatorname{lin} B$ mit Halbnorm p_B (Norm, falls E separiert, da B beschränkt). Dann $(E, p_B) \hookrightarrow (E, \mathcal{T})$ stetig (da B beschränkt).

8.8 Lemma

Sei $(E, \mathcal{R})$ lokalkonvex und $B \subseteq E$ absolutkonvex, beschränkt, abgeschlossen und vollständig.

(i). (E_B, p_B) ist vollständig.

(ii). Sei $D \subseteq E$ eine Tonne. Dann wird B von D absorbiert.

Beweis: (i). Folgt aus Satz 8.5 mit $E \hat{=} E_B$, $\mathcal{S} \hat{=} \mathcal{R} \cap E_B$, $\mathcal{T} \hat{=} \mathcal{T}_{p_B}$. Die Kugel $\{x \in E_B; p_B(x) \le 1\} = B$ (da B abgeschlossen) ist somit p_B-vollständig.

(ii). (E_B, p_B) ist vollständig und halbmetrisch, daher Baire-Raum (Satz von Baire gilt auch für halbmetrische vollständige Räume.) und somit tonneliert nach §6. $D \cap E_B$ ist Tonne in (E_B, p_B), daher Nullumgebung, also wird B absorbiert.

□

Beweis: (von Satz 8.6)
B° ist eine Tonne. Ist $A \subseteq E$ beschränkt, dann $\overline{\operatorname{aco} A}$ abgeschlossen und beschränkt, also nach Voraussetzung vollständig. Somit wird A von B° absorbiert (Lemma 8.8), also wird $B \subseteq B^{\circ\circ}$ von A° absoriert. Damit B $\beta(E', E)$-beschränkt. □

8.9 Satz (Grothendieck)

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und $\mathcal{A}$ eine gerichtete Überdeckung von E, bestehend aus abgeschlossenen absolutkonvexen beschränkten Mengen. Sei $F := \{y \in E^*; \forall A \in \mathcal{A} : y|_A \text{ stetig}\}$, dann ist $(F, \mathcal{T}_\mathcal{A})$ Vervollständigung von $(E', \mathcal{T}_\mathcal{A})$.

8.10 Lemma

Sei E lokalkonvex, $A \subseteq E$ absolutkonvex und abgeschlossen. Sei $u \in E^*$ mit $u|_A$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $x' \in E'$, sodass $|u(x) - \langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $x \in A$.

Beweis: (Polarenbildung in $\langle E, E^*\rangle$)
Da $u|_A$ stetig ist, existiert $U \in \mathcal{U}_0(E)$ abgeschlossen und absolutkonvex, sodass $|u(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in U \cap A$. Nach Satz von Alaoglu-Bourbaki ist $U^\circ \subseteq E'$ $\sigma(E', E)$-kompakt, damit auch $\sigma(E^*, E)$-kompakt. Außerdem A° absolutkonvex und $\sigma(E^*, E)$-abgeschlossen. Daher ist $A^\circ + U^\circ$ $\sigma(E^*, E)$-abgeschlossen (nach Lemma 8.11). Da $A^\circ + U^\circ$ absolutkonvex ist, folgt aus dem Bipolarensatz:

$$(A^\circ + U^\circ) = (A^\circ + U^\circ)^{\circ\circ}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \cdot u \in (U \cap A)^\circ &= (A^{\circ\circ} \cap U^{\circ\circ})^\circ = (A^\circ \cup U^\circ)^{\circ\circ} \\ &\overset{0 \in A^\circ \cap U^\circ}{\subseteq} (A^\circ + U^\circ)^{\circ\circ} = A^\circ + U^\circ \end{aligned}$$

Es existieren also $w \in A^\circ$, $v \in U^\circ \subseteq E'$ mit

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot u = v + w \quad (\Leftrightarrow u = \varepsilon \cdot (v + w))$$

Damit folgt mit $x' := \varepsilon \cdot v$

$$\forall x \in A : |u(x) - \langle x', x\rangle| = \varepsilon \cdot \underbrace{|\langle w, x\rangle|}_{\leq 1} \leq \varepsilon$$

□

8.11 Lemma

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A, B \subseteq E$ mit A kompakt, B abgeschlossen.

(i). Gilt $A \cap B = \emptyset$, so existiert $U \in \mathcal{U}_0$, sodass $(A + U) \cap B = \emptyset$.

(ii). $A + B$ ist abgeschlossen.

Beweis: (i). Sei $x \in A$, dann gibt es eine Nullumgebung V_x mit $(x + V_x) \cap B = \emptyset$. Sei U_x eine offene Nullumgebung mit $U_x + U_x \subseteq V_x$. Dann gilt

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} (x + U_x)$$

und somit existiert $F \subseteq A$ endlich mit

$$A \subseteq \bigcup_{x \in F} (x + U_x)$$

Definiere $U := \bigcap_{x \in F} U_x$. Ist $y \in A$, so existiert $x \in F$ mit $y \in x + U_x$. Also

$$y + U \subseteq x + U_x + \underbrace{U}_{\subseteq U_x} \subseteq x + V_x \subseteq B^c$$

(ii). Sei $x \in E \backslash (A + B)$. Dann ist $(x - A) \cap B = \emptyset$. Nach (i) gibt es eine Nullumgebung U, sodass $(x - A + U) \cap B = \emptyset$. Also $(x + U) \cap (A + B) = \emptyset$, d.h. $E \backslash (A + B)$ offen.

□

8.12 Lemma

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$C_b(X, \mathcal{A}) := \{f : X \to \mathbb{K}; \forall A \in \mathcal{A} : f|_A \text{ stetig, beschränkt}\}$$

versehen mit Halbnormensystem

$$p_A(f) := \sup_{x \in A} |f(x)| \qquad (A \in \mathcal{A}, f \in C_b(X, \mathcal{A}))$$

vollständig.

Beweis:

- Die Topologie auf $C_b(X, \mathcal{A})$ ist die Initialtopologie bzgl.

  $$\varrho_A : C_b(X, \mathcal{A}) \to C_b(A), f \mapsto f|_A \quad (A \in \mathcal{A})$$

  Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter in $C_b(X, \mathcal{A})$. Dann ist für alle $A \in \mathcal{A}$ der Bildfilter $\varrho_A(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter in $C_b(A)$. Da $C_b(A)$ vollständig ist, existiert für $A \in \mathcal{A}$ ein $g_A \in C_b(A)$, sodass $\varrho_A(\mathcal{F}) \to g_A$.

- Nach Proposition 4.3:

  $$\mathcal{F} \to g \in C_b(X, \mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} : \varrho_A(\mathcal{F}) \to \varrho_A(g) = g|_A$$

  Wir zeigen: Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B \neq \varnothing$ gilt $g_A|_{A\cap B} = g_B|_{A\cap B}$. Betrachte dazu

  $$\mu_B : C_b(A) \to C_b(A \cap B), f \mapsto f|_{A\cap B} \qquad \mu_A : C_b(B) \to C_b(A \cap B), f \mapsto f|_{A\cap B}$$

  (sind stetig). Damit $\mu_B(\varrho_A(\mathcal{F})) \to g_A|_{A\cap B}$ und $\mu_A(\varrho_B(\mathcal{F})) \to g_B|_{A\cap B}$ und $\mu_B(\varrho_A(\mathcal{F})) = \mu_A(\varrho_B(\mathcal{F}))$. Da $C_b(A \cap B)$ separiert ist, folgt $g_A|_{A\cap B} = g_B|_{A\cap B}$. Setze

  $$g(x) := \begin{cases} g_A(x) & x \in A \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in C_b(X, \mathcal{A})$$

  Hiermit folgt $\mathcal{F} \to g$, da $\varrho_A(g) = g_A$.

□

Beweis: (von Satz 8.9, Polarenbildung in $\langle E, F\rangle$)

(i). $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\sigma(E, F)$ (damit ergibt $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ auf F Sinn): Sei $A \in \mathcal{A}$, $u \in F$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$, sodass $|u(x)| \le 1$ für alle $x \in U \cap A$. Da A $\mathcal{T}$-beschränkt ist, gibt es $\lambda_0 > 1$ mit $A \subseteq \lambda_0 \cdot U$. Für $x \in A$ folgt daher $\frac{1}{\lambda_0} \cdot x \in U \cap A$, somit $|u(x)| \le \lambda_0$. Also

$$\forall \lambda \ge \lambda_0 : A \subseteq u^{-1}(B[0, \lambda])$$

Diese Urbilder bilden Nullumgebungsbasis in E, also A $\sigma(E, F)$-beschränkt. (Hiermit auch gezeigt: $F \subseteq C_b(E, \mathcal{A})$.)

(ii). E' dicht in F: Sei $\mathcal{U} := \{\varepsilon \cdot A^\circ; A \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0\}$. $\mathcal{U}$ ist Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ und es folgt aus Lemma 8.10, dass E' dicht in F bzgl. $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ liegt.

(iii). Vollständigkeit von $(F, \mathcal{T}_\mathcal{A})$: Betrachte $\mathrm{id} : C_b(E, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}^E$. Dann ist id stetig, da $\mathcal{A}$ eine Überdeckung ist. Denn: Sei $\varepsilon > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in E$, $U := \{f \in \mathbb{K}^E; \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i)| \le \varepsilon\}$. Dann ist

$$\mathrm{id}^{-1}(U) = \{f \in C_b(E, \mathcal{A}); \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i)| \le \varepsilon\}$$

Da A gerichtete Überdeckung ist, existiert $A \in \mathcal{A}$ mit $x_i \in A$ für $i = 1, \dots, n$. Daher $B_{p_A}(0, \varepsilon) \subseteq \mathrm{id}^{-1}(U)$.

E^* ist abgeschlossener Teilraum von $\mathbb{K}^E$ (Lemma 4.5), damit auch abgeschlossen in $C_b(E, \mathcal{A})$. Somit $F = C_b(E, \mathcal{A}) \cap E^*$ vollständig als abgeschlossener Teilraum von $C_b(E, \mathcal{A})$ (Lemma 8.12).

□

8.13 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und separiert. Dann ist

$$\hat{E} := \{u \in (E')^*; \forall B \subseteq E' \text{ glgr. stetig} : u|_B \, \sigma(E', E) - \text{stetig}\}$$

eine Vervollständigung von E. Hierbei trägt $\hat{E}$ die Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} := \{B \subseteq E'; B \text{ gleichgradig stetig}\}$.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := \{U^\circ; U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine gerichtete Überdeckung von E', bestehend aus abgeschlossenen absolutkonvexen beschränkten Mengen. Es gilt $\mathcal{T}_\mathcal{A} = \mathcal{T}_\mathcal{E}$ und $\mathcal{T}_\mathcal{A} \cap E = \mathcal{T}$ (denn $\{U \subseteq U_0(\mathcal{T}); U \text{ Tonne}\}$ ist Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$). Behauptung folgt aus 8.9 mit $E = (E', \sigma(E', E))'$. □

8.14 Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und separiert. E ist vollständig $\Leftrightarrow$ E ist isomorph zu $\hat{E}$ aus Folgerung 8.13.

Beweis: Klar mit Satz 8.1 und Folgerung 8.13. □

8.15 Folgerung

Sei E ein Banachraum und $u \in (E')^*$ $\sigma(E', E)$-stetig auf $B_{E'}$. Dann ist u $\sigma(E', E)$-stetig, also selbst ein Element von E.

Beweis: Nach Folgerung 8.14 genügt es zu zeigen: $u \in \hat{E}$. Dafür genügt $u|_{U^\circ}$ ist $\sigma(E', E)$-stetig für alle $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. Es gilt $B_E(0, \varepsilon)^\circ = B_{E'}\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Somit folgt die Behauptung, da $\{B_E(0, \varepsilon); \varepsilon > 0\}$ Nullumgebungsbasis. □

8.16 Satz

Sei E ein bornologischer lokalkonvexer Raum. Dann ist $(E', \beta(E', E))$ vollständig.

8.17 Lemma

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $B \subseteq E$. Dann äquivalent:

(i). B beschränkt

(ii). Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B und Nullfolge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gilt $\lambda_n \cdot x_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{K}$. Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $\lambda \cdot B \subseteq U$ für $|\lambda| \le \varepsilon$. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|\lambda_n| \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Damit $\lambda_n \cdot x_n \in U$ für $n \ge n_0$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i): Annahme B nicht beschränkt, dann gibt es $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ mit $B \nsubseteq n \cdot U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $x_n \in B \backslash n \cdot U$ gilt $\frac{1}{n} \cdot x_n \notin U$ $(n \in \mathbb{N})$, also $\frac{1}{n} \cdot x_n \not\to 0$. Widerspruch!

□

8.18 Lemma

Seien E, F lokalkonvexe Räume, $u : E \to F$ linear und $B \subseteq E$ beschränkt, absolutkonvex mit $u|_B$ stetig. Dann ist $u(B)$ beschränkt.

Beweis: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{K}$. Dann $\lambda_n \cdot x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ nach Lemma 8.17 und $\lambda_n \cdot x_n \in B$ für große n (da B absolutkonvex). Daher

$$\lambda_n \cdot u(x_n) = u(\lambda_n \cdot x_n) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

also $u(B)$ beschränkt nach Lemma 8.17. $\square$

Beweis: (von Satz 8.16)
Anwendung von Satz 8.9 (Grothendieck) mit $\mathcal{A} \coloneqq \{A \subseteq E; A \text{ beschränkt, absolutkonvex, abgeschlossen}\}$, dann $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \beta(E', E)$. Sei $y \in E^*$ mit $y|_A$ stetig für $A \in \mathcal{A}$. Nach Lemma 8.18 ist $y(A)$ beschränkt. Aus Proposition 6.14 folgt, dass y stetig ist, d.h. $y \in E'$. Nach Satz 8.9 ist somit $(E', \beta(E', E))$ vollständig. $\square$

Bemerkung Da metrisierbare lokalkonvexe Räume bornologisch sind, folgt die Vollständigkeit der Duale von $C_0^\infty(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $C(\Omega)$ für σ-kompakte Ω.

9
Lokalkonvexe Finaltopologien & Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in C_C^\infty(\Omega); \operatorname{spt} f \subseteq K\} = C_0^\infty(\operatorname{int} K)$$

der Fréchet-Raum bzgl. des Halbnormsystems

$$p_k(f) := \sup\{|\partial^\alpha f(x)|; x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k\}$$

Die Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega) := C_C^\infty(\Omega)$ soll die feinste lokalkonvexe Topologie sein, für die alle Einbettungen

$$\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

stetig sind. Wir versehen $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der lokalkonvexen Finaltopologie bzgl. $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}$ für $K \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 9.1).

9.1 Satz

Sei E ein Vektorraum und $(X_\iota, F_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Seien $f_\iota : X_\iota \to E$ für $\iota \in I$.

(i). Es existiert die feinste lineare (lokalkonvexe) Topologie $\mathcal{T}$ auf E, sodass alle Abbildungen $f_\iota : (X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, \mathcal{T})$ ($\iota \in I$) stetig sind. $\mathcal{T}$ heißt lineare (lokalkonvexe) Finaltopologie auf E bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$.

(ii). Sei $(F, \mathcal{S})$ ein topologischer linearer (lokalkonvexer) Vektorraum und $g : E \to F$ linear. $\mathcal{T}$ sei die lineare (lokalkonvexe) Finaltopologie auf E bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Dann

$$g : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{S}) \,\text{stetig} \Leftrightarrow \forall \iota \in I : g \circ f_\iota : (X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (F, \mathcal{S}) \,\text{stetig}$$

Beweis: (i). Sei $M := \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E); \mathcal{S}$ lineare (lokalkonvexe) Topologie auf E, $\forall \iota \in I : f_\iota : (X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, \mathcal{S})$ stetig$\}$. Da $\{\varnothing, E\} \in M$ gilt $M \neq \varnothing$. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie auf E bzgl.

$$\mathrm{id} : E \to (E, \mathcal{S}) \qquad (\mathcal{S} \in M)$$

Dann ist $\mathcal{T}$ eine lineare (lokalkonvexe) Topologie auf E (Satz 1.3, Beispiele vor 2.4). Aus Stetigkeit folgt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ für alle $\mathcal{S} \in M$. Noch zu zeigen: $\mathcal{T} \in M$. Nach Satz 1.1 gilt:

$$f_\iota : (X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, \mathcal{T}) \,\text{stetig} \Leftrightarrow \forall \mathcal{S} \in M : f_\iota(X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, \mathcal{S}) \,\text{stetig}$$

für $\iota \in I$. Dies gilt nach der Definition von M.

(ii). „$\Rightarrow$“ ist klar. „$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{T}'$ die Initialtopologie auf E bzgl. $g : E \to (F, \mathcal{S})$. Dann $\mathcal{T}'$ linear (lokalkonvex). Nach Satz 1.1 ist $f_\iota : (X_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, \mathcal{T}')$ stetig für $\iota \in I$, daher $\mathcal{T}' \in M$ und somit $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

□

9.2 Folgerung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ linear. Dann äquivalent:

(i). u stetig

(ii). $\forall K \subseteq \Omega$ kompakt: $u|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ stetig

(iii). Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spt} f_k$ relativ kompakt in Ω, $\partial^\alpha f_k \to 0$ gleichmäßig ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n$). Dann gilt $u(f_k) \to 0$ $(k \to \infty)$.

Beweis:
- (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Klar mit Satz 9.1(ii).
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): In (iii) ist die Folgenstetigkeit von u in 0 auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ mit $K := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spt} f_k}$ formuliert. Da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ metrisierbar ist, ist dies äquivalent zur Stetigkeit von $u|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ in 0. Da u linear ist, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung (i). In der „Distributionentheorie ohne Topologie“ wird (iii) als Stetigkeitsbedingung formuliert. $\mathcal{D}(\Omega)'$ ist der Raum der Distributionen auf Ω.

(ii). Weitere Äquivalenz in Folgerung 9.2:

(iv) $\forall K \subseteq \Omega$ kompakt $\exists m \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$:

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |u(f)| \le c \cdot \max\{\|\partial^\alpha f\|_\infty ; \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m\}$$

Klar, da Halbnormsysten auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ gerichtet.

Definition (i). Sei E ein Vektorraum und I eine gerichtete halbgeordnete Menge. Sei $(E_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von Teilräumen von E mit $E_\iota \subseteq E_\kappa$ für $\iota \le \kappa$, $E = \bigcup_{\iota\in I} E_\iota$. Für $\iota \in I$ sei $\mathcal{T}_\iota$ eine lokalkonvexe Topologie auf E_ι, sodass die Einbettung $(E_\iota, \mathcal{T}_\iota) \hookrightarrow (E_\kappa, \mathcal{T}_\kappa)$ für $\iota \le \kappa$ stetig sind. Sei $\mathcal{T}$ die lokalkonvexe Finaltopologie auf E bzgl. $\mathrm{id} : (E_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to E$ $(\iota \in I)$. $(E, \mathcal{T})$ heißt lokalkonvexer induktiver Limes von $((E_\iota, \mathcal{T}_\iota))_{\iota\in I}$. Dieser heißt strikt genau dann wenn $\mathcal{T}_\kappa \cap E_\iota = \mathcal{T}_\iota$ für alle $\iota \le \kappa$.

(ii). Ist $(E, \mathcal{T})$ ein strikter lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Banachräumen (Fréchet-Räumen), so heißt $(E, \mathcal{T})$ LB-Raum (LF-Raum).

Beispiel (i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein LF-Raum. (Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Standardausschöpfung von Ω. Dann ist $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ strikter lokalkonvexer induktiver Limes von $(\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}, \mathcal{T}_{\overline{\Omega_k}})$.)

(ii). Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $D^m(\Omega) := C_C^m(\Omega)$ ein LB-Raum.

(iii). Sei Ω ein lokalkompakter topologischer Raum. Sei $C_C(\Omega)$ versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz $\mathcal{T}_c$. Dann ist $(C_C(\Omega), \mathcal{T}_c)$ ein strikter lokalkonvexer induktiver Limes von $((C_0(\operatorname{int} K), \|\cdot\|_\infty))_{K\subseteq\Omega \text{ kompakt}}$. Wenn Ω σ-kompakt ist, so ist $(C_C(\Omega), \mathcal{T}_c)$ ein LB-Raum.

(iv). $E := \mathcal{H}(\{0\})$ seien Keime der bei $0 \in \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen,

$$\mathcal{H}(\{0\}) := \{f : U \to \mathbb{C}; 0 \in U \text{ offen}\}_{/\sim}$$
$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists V \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}, 0 \in V : f|_V = g|_V$$

Betrachte $((\mathcal{H}_b(B(0, \frac{1}{n}))_{/\sim}, \|\cdot\|_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$. Ist Folge von Banachräumen. Sei $(\mathcal{H}(\{0\}), \mathcal{T})$ der lokalkonvexe induktive Limes dieser Folge von Banachräumen, dann ist dies kein LB-Raum, da nicht strikt.

9.3 Satz

Sei E ein Vektorraum und $(E_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, $f_\iota : E \to E_\iota$ linear für $\iota \in I$. Sei $\mathcal{T}$ die lokalkonvexe Finaltopologie auf E bzgl. $(f_\iota)_{\iota\in I}$. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{U \subseteq E; U \text{ abskvx, absorbierend}, \forall \iota \in I : f_\iota^{-1}(U) \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_\iota)\}$$

Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$.

Beweis: Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ absolutkonvex, dann ist $U \in \mathcal{B}$. Noch zu zeigen: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. Sei $U \in \mathcal{B}$. Dann ist (E, p_U) lokalkonvex und für alle $\iota \in I$ ist $f_\iota : (E_\iota, \mathcal{T}_\iota) \to (E, p_U)$ stetig. Damit $\mathcal{T}_{p_U} \subseteq \mathcal{T}$ (nach Definition der Finaltopologie) und somit $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. □

Bemerkung Eine Nullumgebungsbasis der linearen Finaltopologie ist schwieriger anzugeben.

9.4 Lemma

Sei E lokalkonvex, $F \subseteq E$ ein Teilraum und $V \in \mathcal{U}_0(F)$ absolutkonvex. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}_0(E)$ absolutkonvex mit $V = U \cap F$. Ist $x_0 \in E \backslash \bar{F}$, so kann U so gewählt werden, dass $x_0 \notin U$.

Beweis: Es gibt $\check{U} \in \mathcal{U}_0(E)$ absolutkonvex, sodass $\check{U} \cap F \subseteq V$. Dann ist $U := \operatorname{co}(\check{U} \cup V)$ absolutkonvex (da $\check{U} \cup V$ kreisförmig). Weiterhin gilt $U \cap F = V$: Ist $x \in \check{U}$, $y \in V$, $t \in (0,1)$ mit $(1-t) \cdot x + t \cdot y \in F$, dann $x \in F \cap \check{U} \subseteq V$, also $(1-t) \cdot x + t \cdot y \in V$.
Falls $x_0 \in E \backslash \bar{F}$, so sei $\check{U}$ so gewählt, dass $(x_0 + \check{U}) \cap F = \varnothing$. Dann $x_0 \notin U$: Aus $x_0 = (1-t) \cdot x + t \cdot y$ würde $x_0 - (1-t) \cdot x \in F \cap (x_0 - (1-t)\check{U}) \subseteq F \cap (x_0 + \check{U}) \neq \varnothing$ folgen. Widerspruch! □

9.5 Satz (Dieudonné-Schwartz)

Sei $(E, \mathcal{T})$ strikter lokalkonvexer induktiver Limes einer aufsteigenden Folge $((E_n, \mathcal{T}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ von lokalkonvexen Teilräumen.

(i). $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{T} \cap E_n = \mathcal{T}_n$

(ii). Sind alle E_n für $n \in \mathbb{N}$ separiert, dann auch E.

(iii). Sei E_n abgeschlossen in E_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$. Für $B \subseteq E$ gilt dann:

$$B \ \mathcal{T}-\text{beschränkt} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : B \subseteq E_n, B \ \mathcal{T}_n - \text{beschränkt}$$

Beweis: (i). „$\subseteq$“: Klar, da $(E_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (E, \mathcal{T})$ stetig nach Definition.

„$\supseteq$“: Sei $U_n \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_n)$ absolutkonvex. Mit Lemma 9.4: Es gibt $(U_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $U_{n+k} \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_{n+k})$, $U_{n+k} = U_{n+k+1} \cap E_{n+k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} U_{n+k} \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ nach Satz 9.3. Außerdem $U_n = U \cap E_n$.

(ii). Sei $x \in E$, $x \neq 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in E_n$. Da $\mathcal{T}_n$ separiert ist, gibt es $U_n \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_n)$ absolutkonvex mit $x \notin U_n$. Nach (i) gibt es $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ mit $U_n = U \cap E_n$, also $x \notin U$.

(iii). „$\Leftarrow$“: Bekannt.

„$\Rightarrow$“: Annahme $B \nsubseteq E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B und eine aufsteigende Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in E_{k_{n+1}} \backslash E_{k_n}$$

Nach Lemma 9.4 gibt es $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U_n \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_{k_n})$ absolutkonvex mit $U_n = U_{n+1} \cap E_{k_n}$, $\frac{1}{n} \cdot x_n \notin U_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ (Satz 9.3), jedoch $x_n \notin n \cdot U$, d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ wird von U nicht absorbiert, damit B nicht beschränkt. Widerspruch!

Somit gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $B \subseteq E_n$. Aus $E_n \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ folgt, dass B beschränkt in E_n ist. □

9.6 Folgerung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $B \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt: B $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$-beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists K \subseteq \Omega$ kompakt $\forall f \in B$: $\operatorname{spt} f \subseteq K$,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{f \in B} \|\partial^\alpha f\|_\infty < \infty$$

Beweis: Klar mit Satz 9.5(iii). □

9.7 Folgerung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \neq \varnothing$. Dann ist $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ nicht metrisierbar.

Beweis: Annahme doch. Dann gibt es eine Nullumgebungsbasis $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $U_k \supseteq U_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Standardausschöpfung von Ω. Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\varphi_k \in U_k$ mit $\operatorname{spt}\varphi_k \cap \overline{\Omega_k} = \varnothing$. Dann $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt (wird von allen U_k absorbiert). Widerspruch zu Folgerung 9.6. □

9.8 Satz (L. Schwartz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Standardausschöpfung von Ω, $\Omega_0 := \varnothing$. Für $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ mit $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{N}_0$ mit $m_k \uparrow \infty$ setze

$$U((m_k)_k, (\varepsilon_k)_k) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \sup_{\substack{x\notin\overline{\Omega_k} \\ |\alpha|\le m_k}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \le \varepsilon_k \right\}$$

Dann ist $\mathcal{U} := \{U((m_k)_k, (\varepsilon_k)_k),\ (m_k)_k,\ (\varepsilon_k)_k \text{ wie oben}\}$ eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$.

Beweis: (i). $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_{\mathcal{D}})$: Ist $U \in \mathcal{U}$, so ist U absolutkonvex und absorbierend. Weiterhin gilt: $U \cap \mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}(\Omega)$ ist Nullumgebung in $\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}$, denn: Sei $U = U((m_k)_k, (\varepsilon_k)_k)$, dann

$$\begin{aligned} U \cap \mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}} &= \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \forall j \le k: \sup_{\substack{x\notin\overline{\Omega_j} \\ |\alpha|\le m_j}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \le \varphi_j\} \\ &\supseteq \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \sup_{|\alpha|\le m_k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \le \varepsilon_k\} \end{aligned}$$

ist Nullumgebung in $\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}(\Omega)$.

(ii). $\mathcal{U}$ ist Basis: Sei $W \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ absolutkonvex. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $W \cap \mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}$ Nullumgebung in $\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}$ und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \exists m_k \in \mathbb{N}_0, \delta_k > 0\ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega_{k+2}}}, p_{m_k}(\varphi) \le \delta_k : \varphi \in W \tag{$*$}$$

Ohne Einschränkung $m_k \uparrow$, $\delta_k \downarrow$. Es gilt

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \overline{\Omega_{k+1}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} (\Omega_{k+2} \backslash \overline{\Omega_k})$$

also gibt es $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\alpha_k \ge 0$, $\operatorname{spt}\alpha_k \subseteq \Omega_{k+2}\backslash\overline{\Omega_k}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \alpha_k = 1$ (Partition der Eins, siehe Lemma 9.9). Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot (2^{k+1} \cdot \alpha_k \cdot \varphi)$$

(endliche Summe!). Falls $(2^{k+1} \cdot \alpha_k \cdot \varphi) \in W$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\varphi \in W$, da W absolutkonvex. Nun gilt

$$p_{m_k}(2^{k+1} \cdot \alpha_k \cdot \varphi) \le \ldots \le c_k \cdot \sup_{\substack{x\in\Omega_{k+2}\backslash\overline{\Omega_k} \\ |\alpha|\le m_k}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Ohne Einschränkung $c_k \uparrow$. Setze $\varepsilon_k := \frac{\delta_k}{c_k}$, dann $\varepsilon_k \downarrow 0$ und aus $\varphi \in U((m_k)_k, (\varepsilon_k)_k)$ folgt

$$p_{m_k}(2^{k+1} \cdot \alpha_k \cdot \varphi) \le c_k \cdot \sup_{\substack{x\in\Omega_{k+2}\backslash\overline{\Omega_k} \\ |\alpha|\le m_k}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \le c_k \cdot \varepsilon_k = \delta_k$$

also $(2^{k+1} \cdot \alpha_k \cdot \varphi) \in W$ nach $(*)$. Somit $U((m_k)_k, (\varepsilon_k)_k) \subseteq W$.

□

9.9 Lemma (Partition der Eins)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine lokal endliche Überdeckung von Ω durch relativ kompakte Mengen. Dann gibt es $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\alpha_k \geq 0$, $\operatorname{spt}\alpha_k \subseteq U_k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k = 1$.

Beweis: Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Standardausschöpfung von Ω, $\Omega_0 := \varnothing$. Für $x \in \Omega$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, $r_x > 0$, sodass $B(x, 2r_x) \subseteq U_m$. Es gibt eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sowie eine aufsteigende Folge $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $j_0 := 0$ mit

$$\begin{aligned} \overline{\Omega_{k+1}}\backslash\Omega_k &\subseteq \bigcup_{j=j_k+1}^{j_{k+1}} B(x_j, r_j) \\ \forall j = j_k+1, \dots, j_{k+1}: \quad \left(\overline{\Omega_{k+1}}\backslash\Omega_k\right) &\cap B(x_j, r_{x_j}) \neq \varnothing \end{aligned}$$

(für erste Bedingung: $\overline{\Omega_{k+1}}\backslash\Omega_k$ ist kompakt). Für $j \in \mathbb{N}$ sei β_j in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{spt}\beta_j = B[x_j, r_{x_j}]$, $\beta_j(x) > 0$ für $x \in B(x_j, r_{x_j})$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\tilde{\alpha}_k := \sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ B(x_j, 2r_{x_j})\subseteq U_k}} \beta_j$$

(Endliche Summe, da $U_m \subseteq \Omega_k$ für große k und daher $B(x_j, 2r_{x_j}) \subseteq U_m$ nur für $j \leq j_k$ möglich.) Daher $\tilde{\alpha}_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{spt}\tilde{\alpha}_k \subseteq U_k$. Definiere $\tilde{\alpha} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\alpha}_k \in C^\infty(\Omega)$ (lokal endliche Summe), dann $\tilde{\alpha}(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$. Mit $\alpha_k := \frac{\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}}$ folgt die Behauptung. □

9.10 Satz

Sei E ein Vektorraum und $(E_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$ lokalkonvexe Räume. Seien $f_\iota : E_\iota \to E$linear und $\mathcal{T}$ die lokalkonvexe Finaltopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in E. E_ι sei tonneliert bzw. quasitonneliert bzw. bornlogisch $(\iota \in I)$. Dann ist $(E, \mathcal{T})$ tonneliert bzw. quasitonneliert bzw. bornologisch.

Beweis: (i). Sei $V \subseteq E$ eine Tonne. Dann $f_\iota^{-1}(V)$ eine Tonne in E_ι, also $f_\iota^{-1}(V) \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_\iota)$ für $\iota \in I$. Damit $V \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ nach Satz 9.3.

(ii). Quasitonneliert bzw. bornologisch: Entsprechend. Man beachte: Ist $V \subseteq E$ bornivor und $B \subseteq E_\iota$ beschränkt, dann $f_\iota(B)$ in E beschränkt und wird somit von V absorbiert, d.h. $f_\iota(B) \subseteq \lambda \cdot V$. Damit

$$B \subseteq f_\iota^{-1}(f_\iota(B)) \subseteq \lambda \cdot f_\iota^{-1}(V)$$

□

9.11 Folgerung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $(\mathcal{D}(\Omega)', \beta(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ ist vollständig.

Beweis: $\mathcal{D}(\Omega)$ ist bornologisch nach Satz 9.10 (wegen $\mathcal{D}_K(\Omega) = C_0^\infty(\operatorname{int} K)$ bornologisch, da metrisierbarer Raum, Satz 6.3). Daher $\mathcal{D}(\Omega)'$ vollständig nach Satz 8.16. □

9.12 Satz (i). Sei $(E, \mathcal{T})$ strikter lokalkonvexer Limes einer Folge $((E_n, \mathcal{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilräumen wobei E_n Semi-Montelraum $(n \in \mathbb{N})$ und E_n abgeschlossen in E_{n+1}. Dann ist E ein Semi-Montelraum.

(ii). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist Montelraum, also insbesondere reflexiv.

Beweis: (i). Sei $B \subseteq E$ abgeschlossen und beschränkt. Nach Satz 9.5 gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass $B \subseteq E_n$ und B $\mathcal{T}_n$-beschränkt. B ist in E_n abgeschlossen, somit B kompakt in E_n, da E_n Semi-Montelraum. Damit kompakt in E.

(ii). Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Standardausschöpfung von Ω. Nach einem Beispiel in §7 (nach Folgerung 7.2) ist $\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}} = C_0^\infty(\operatorname{int}\Omega_k)$ ein Montelraum. Aus Satz 9.10 und (i) folgt die Behauptung.

□

9.13 Satz

Sei $(E,\mathcal{T})$ strikter lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge $((E_n,\mathcal{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von vollständigen lokalkonvexen Räumen. Dann ist E vollständig.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf E.

(i). Sei $\hat{\mathcal{G}} := \{B+V; B\in\mathcal{F}, V\in\mathcal{U}_0(E)\}$. Dann ist $\hat{\mathcal{G}}$ eine Filterbasis, denn
$$(B+V)\cap(B'+V') \supseteq \underbrace{(B\cap B')}_{\in\mathcal{F}} + \underbrace{(V\cap V')}_{\in\mathcal{U}_0}$$
Der erzeugte Filter $\mathcal{G}$ ist ein Cauchy-Filter: Zu $U\in\mathcal{U}_0(E)$ gibt es $V\in\mathcal{U}_0(E)$ mit $V+V-V\subseteq U$. Es gibt $B\in\mathcal{F}$ mit $B-B\subseteq V$. Daher
$$(B+V)-(B+V)\subseteq V+V-V\subseteq U$$
Offenbar gilt $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{G}$. Wir zeigen in (ii):
$$\exists n\in\mathbb{N}\,\forall A\in\mathcal{G}: A\cap E_n\neq\varnothing \tag{1}$$
Es folgt, dass $\mathcal{G}\cap E_n$ Cauchy-Filter auf E_n und daher konvergent, $\mathcal{G}\cap E_n\to x\in E_n$. Dann $\mathcal{G}\to x$ und somit $\mathcal{F}\to x$, da $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{G}$.

(ii). Annahme (1) gilt nicht. Dann gibt es $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ und $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_0(E)$, sodass
$$\forall n\in\mathbb{N}: (B_n+V_n)\cap E_n=\varnothing$$
mit V_n absolutkonvex und $V_{n+1}\subseteq V_n$ ($n\in\mathbb{N}$). Wir zeigen in (iii):
$$\exists V\in\mathcal{U}_0(E)\,\forall n\in\mathbb{N}: (B_n+V)\cap E_n=\varnothing \tag{2}$$
Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, gibt es $B\in\mathcal{F}$ mit $B-B\subseteq V$. Daher
$$B-\underbrace{B_n\cap B}_{\neq\varnothing}\subseteq V \qquad \Rightarrow B\subseteq(B_n\cap B)+V\subseteq B_n+V$$
also $B\cap E_n=\varnothing$ für $n\in\mathbb{N}$, also $B=\varnothing\notin\mathcal{F}$. Widerspruch!

(iii). Zeige (2). Für $n\in\mathbb{N}$ sei
$$W_n := \operatorname{co}\left(V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap E_k)\right)$$
Dann gilt (immernoch) $(B_n+W_n)\cap E_n=\varnothing$ (Annahme nicht: Dann gibt es $x\in B_n$, $y\in V_n$, $z\in E_{n-1}$, $t\in[0,1]$ mit $x+t\cdot y+z\in E_n$. Dann $t\cdot y\in V_n$, daher $x+t\cdot y\in(B_n+V_n)\cap E_n=\varnothing$. Widerspruch!) Definiere
$$V:=\operatorname{co}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(V_k\cap E_k)\right)$$
Dann V absolutkonvex und $V\supseteq V_k\cap E_k$ für $k\in\mathbb{N}$, somit V Nullumgebung in E (Satz 9.3). Außerdem ist
$$V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap E_k)\supseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(V_k\cap E_k) \qquad (n\in\mathbb{N})$$
also $W_n\supseteq V$ und somit
$$(B_n+V)\cap E_n\subseteq(B_n+W_n)\cap E_n=\varnothing \qquad (n\in\mathbb{N})$$
□

9.14 Folgerung

Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\mathcal{D}(\Omega)$ vollständig.

Beweis: Klar mit 9.13. □

Bemerkung Leichter als 9.13: E strikter lokalkonvexer Limes einer Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von quasivollständigen (bzw. folgenvollständigen) Räumen mit E_n abgeschlossen in E_{n+1}. Dann ist E quasivollständig (folgenvollständig). Klar mit Satz 9.5(iii).

10
Präkompaktheit

Definition Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$. A heißt präkompakt

$$:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})\, \exists B \subseteq E \,\text{endlich} : A \subseteq B + U \left(= \bigcup_{b \in B} (b + U) \right)$$

Bemerkung (i). A präkompakt $\Rightarrow \bar{A}$ präkompakt. *(Betrachte abgeschlossene Nullumgebungsbasis in Definition.)*

(ii). $\bar{A}$ präkompakt $\Rightarrow$ A präkompakt

(iii). Teilmengen und skalare Vielfachen von präkompakten Mengen sind präkompakt.

(iv). Endliche Vereinigung und Summen präkompakter Mengen sind präkompakt.

(v). A präkompakt $\Rightarrow A$ beschränkt

10.1 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$. Äquivalent:

(i). A präkompakt

(ii). Zu jedem Filter auf A gibt es einen feineren Cauchy-Filter.

(iii). Jeder Ultrafilter auf A ist ein Cauchy-Filter.

Beweis:

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Klar, da jeder Filter einen feineren Ultrafilter besitzt.
- (i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf A und $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. Dann gibt es $B \subseteq E$ endlich mit $A \subseteq B + U$. Dann gehört eine der Mengen $(b + U) \cap A$, $b \in B$, zu $\mathcal{F}$ (da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt für $C \subseteq A$ entweder $C \in \mathcal{F}$ oder $A \backslash C \in \mathcal{F}$). Daher $\mathcal{F}$ Cauchy-Filter: Sei $V \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$, dann existieren $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$, $b \in B$ mit $U - U \subseteq V$ und $(b + U) \cap A \in \mathcal{F}$ und somit

$$((b + U) \cap A) - ((b + U) \cap A) \subseteq U - U \subseteq V$$

- (ii) $\Rightarrow$ (i): Annahme A ist nicht präkompakt. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$, sodass $A \backslash (B + U) \neq \varnothing$ für $B \subseteq E$ endlich. Somit ist

$$\{A \backslash (B + U); B \subseteq E \,\text{endlich}\}$$

eine Filterbasis auf A und nach Voraussetzung gibt es einen feineren Cauchy-Filter $\mathcal{F}$. Daher gibt es $C \in \mathcal{F}$ mit $C - C \subseteq U$. Für $x \in C$ folgt $C \subseteq x + U$, also $(x + U) \cap A \in \mathcal{F}$. Aber auch $A \backslash (x + U) \in \mathcal{F}$ nach Konstruktion, also $\varnothing \in \mathcal{F}$. Widerspruch!

□

10.2 Satz

Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$. Äquivalent:

(i). A kompakt

(ii). A präkompakt, vollständig

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Präkompakt ist klar. Vollständig: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf A. Nach Satz 4.2 besitzt $\mathcal{F}$ einen Häufungswert x. Daher $\mathcal{F} \to x$, da $\mathcal{F}$ Cauchy-Filter.
- (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf A, dann $\mathcal{F}$ Cauchy-Filter nach Satz 10.1, also konvergent. Mit Proposition 4.2 folgt die Behauptung.

□

10.3 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$ präkompakt.

(i). Die kreisförmige Hülle $\operatorname{cir} A$ von A ist präkompakt.

(ii). Ist E lokalkonvex, so sind $\operatorname{co} A$ und $\operatorname{aco} A$ präkompakt.

Beweis: (i). Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ kreisförmig. Dann gibt es $B \subseteq E$ endlich mit $A \subseteq B + U$. Dann

$$\operatorname{cir} A := \bigcup_{|\lambda|\le 1} \lambda \cdot A \subseteq \bigcup_{|\lambda|\le 1} (\lambda \cdot B + \lambda \cdot U) \subseteq \operatorname{cir} B + U$$

Die Menge $\operatorname{cir} B = \bigcup_{b\in B} B_{\mathbb{K}}[0,1] \cdot b$ ist kompakt (da stetiges Bild einer kompakten Menge), also gibt es $B_1 \subseteq E$ endlich mit $\operatorname{cir} B \subseteq B_1 + U$. Damit

$$\operatorname{cir} A \subseteq \operatorname{cir} B + U \subseteq B_1 + (U + U)$$

(ii). Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ absolutkonvex. Dann gibt es $B \subseteq E$ endlich mit $A \subseteq B + U$. Die Menge

$$\operatorname{aco} A = \left\{ \sum_{b\in B} \lambda_b \cdot b; (\lambda_b) \in B_{\mathbb{K}}[0,1]^B, \sum_{b\in B} |\lambda_b| \le 1 \right\}$$

ist kompakt, da stetiges Bild der kompakten Menge

$$\left\{ (\lambda_b) \in B_{\mathbb{K}}[0,1]^B; \sum_{b\in B} |\lambda_b| \le 1 \right\}$$

Somit gibt es $B_1 \subseteq E$ endlich, sodass $\operatorname{aco} B \subseteq B_1 + U$.

Sei $x \in \operatorname{aco} A$, dann $x = \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot x_j$ mit $x_1, \dots, x_n \in A$, $\sum_{j=1}^n |\mu_j| \le 1$. Es gilt $x_j = b_j + y_j$ für ein $b_j \in B$, $y_j \in U$ $(j = 1, \dots, n)$. Somit

$$x = \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot x_j = \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j \cdot b_j}_{\in \operatorname{aco} B} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j \cdot y_j}_{\in \operatorname{aco} U = U} \in \operatorname{aco} B + U \subseteq B_1 + (U + U)$$

also $\operatorname{aco} A \subseteq B_1 + (U + U)$.

□

10.4 Folgerung

Sei E ein quasivollständiger topologischer Vektorraum und $A \subseteq E$ kompakt.

(i). $\overline{\operatorname{cir}} A := \overline{\operatorname{cir} A}$ ist kompakt.

(ii). Ist E lokalkonvex, so ist $\overline{\operatorname{aco}} A$ kompakt.

Beweis: Satz 10.2, 10.3 □

Definition Sei E ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ das System der präkompakten Teilmengen von E. Dann ist $\mathcal{T}_{pc} := \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ auf E' die Topologie der präkompakten Konvergenz.

10.5 Proposition

Sei E lokalkonvex und $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig. Dann gilt $\mathcal{T}_{pc} \cap M = \sigma(E', E) \cap M$.

Beweis: (i). $\mathcal{T}_{pc} \supseteq \sigma(E', E)$: Klar nach Definition, jede einpunktige Menge ist präkompakt.

(ii). $\mathcal{T}_{pc} \cap M \subseteq \sigma(E', E) \cap M$: Zu zeigen: Zu $x_0' \in M$, $A \in \mathcal{A}$ gibt es $x_1, \ldots, x_n \in E$, sodass

$$\left\{x' \in M; \sup_{j=1,\ldots,n} |\langle x_j, x' - x_0'\rangle| \leq \frac{1}{2}\right\} \subseteq \left\{x' \in M; \sup_{x \in A} |\langle x, x' - x_0'\rangle| \leq 1\right\}$$

Da $M - x_0'$ gleichgradig stetig ist, gibt es $U \in \mathcal{U}_0(E)$, sodass

$$\sup_{\substack{x' \in M \\ x \in U}} |\langle x, x' - x_0'\rangle| \leq \frac{1}{2}$$

Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n (x_j + U)$. Für $x \in A$ gibt es also $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x - x_j \in U$ und daher folgt für $x' \in M$ mit $\sup_j |\langle x_j, x' - x_0'\rangle| \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sup_{x \in A} |\langle x, x' - x_0'\rangle| &\leq \sup_{j=1,\ldots,n} |\langle x_j, x' - x_0'\rangle| + \sup_{y \in U} |\langle y, x' - x_0'\rangle| \\ &\leq 1\end{aligned}$$

□

Bemerkung $\mathcal{T}_{pc}$ wird in §11 für metrische lokalkonvexe Räume benutzt werden.

11

Sätze von Banach-Dieudonné und Krein-Šmulian

11.1 Satz

Sei E ein Banachraum und $F \subseteq E'$ ein Teilraum. Dann gilt: F ist $\sigma(E', E)$-abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $F \cap B_{E'}$ ist $\sigma(E', E)$-abgeschlossen.

Bemerkung (Motivation zu Satz 11.1) Sei E ein komplexer Banachraum und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $f : \Omega \to E$. „Traditionell": f holomorph $\Leftrightarrow$ $\forall x' \in E' : x' \circ f$ holomorph (Satz von Dunford). Weiter mit Satz 11.1: Sei f lokal beschränkt und $F := \{x' \in E'; x' \circ f \text{ holomorph}\}$ sei trennend in E. Dann ist f holomorph.

Beweis: Offenbar ist F ein Teilraum und $\sigma(E', E)$-dicht in E'. Die Menge $B_F := \{x' \in F; \|x'\| \leq 1\} = F \cap B_{E'}$ ist $\sigma(E', E)$-abgeschlossen: Die Abbildung

$$\varphi : E' \to \mathbb{C}^\Omega, x' \mapsto x' \circ f$$

ist stetig bzgl. $\sigma(E', E)$ und der Produkttopologie. Die Menge $H := \{g : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}; \forall z \in \Omega : |g(z)| \leq |f(z)|\}$ ist kompakt in $C(\Omega)$ (kompakte Konvergenz, Satz von Montel), also abgeschlossen in $\mathbb{C}^\Omega$. Dann folgt wegen $B_F = B_{E'} \cap \varphi^{-1}(H)$, dass B_F $\sigma(E', E)$-abgeschlossen. Aus Satz 11.1: F ist $\sigma(E', E)$-abgeschlossen, also $F = E'$, da F dicht. (Grosse-Erdmann, Beweis von Arendt-Nikolki) □

11.2 Proposition

Sei E lokalkonvex und $\mathcal{T}_f := \{A \subseteq E'; \forall M \subseteq E' \text{ gleichgradig stetig: } A \cap M \in \sigma(E', E) \cap M\}$.

(i). $\mathcal{T}_f$ ist eine Topologie auf E' und es gilt $\mathcal{T}_f \supseteq \mathcal{T}_{pc}$. (Offenbar ist $\mathcal{T}_f$ dann die feinste Topologie, die auf gleichgradig stetigen Mengen mit $\sigma(E', E)$ übereinstimmt.)

(ii). $\mathcal{T}_f$ ist separiert und translationsinvariant. Jede Nullumgebung ist absorbierend und enthält eine kreisförmige Nullumgebung.

Beweis: (i). $\mathcal{T}_f$ ist Topologie: Klar. $\mathcal{T}_f \supseteq \mathcal{T}_{pc}$: Proposition 10.5

(ii). (1) $\mathcal{T}_f$ ist separiert, da $\mathcal{T}_f \supseteq \sigma(E', E)$

(2) $\mathcal{T}_f$ ist translationsinvariant, denn das System der gleichgradig stetigen Mengen ist translationsinvariant.

(3) absorbierend: Sei V eine $\mathcal{T}_f$-Nullumgebung und $x' \in E'$. Sei $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig und kreisförmig mit $x' \in M$, dann gibt es eine kreisförmige $\sigma(E', E)$-Nullumgebung W, sodass $W \cap M \subseteq V \cap M$. Es gibt $\alpha \in (0, 1)$, sodass $\lambda \cdot x' \in W$ für $|\lambda| \leq \alpha$, daher

$$\lambda \cdot x' \in W \cap M \subseteq V \cap M \subseteq V$$

(4) kreisförmige Nullumgebung: Sei U eine $\mathcal{T}_f$-Nullumgebung und

$$V := \bigcup \{A \subseteq U; A \text{ kreisförmig}\}$$

der „kreisförmige Kern“ von U. Sei $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig, dann $\operatorname{cir} M (\subseteq M^{\circ\circ})$ gleichgradig stetig. Es gibt $W \in \mathcal{U}_0(\sigma(E', E))$ kreisförmig, sodass

$$W \cap \operatorname{cir} M \subseteq U \cap \operatorname{cir} M \subseteq U$$

Da $W \cap \operatorname{cir} M$ kreisförmig ist, folgt auch $W \cap \operatorname{cir} M \subseteq V$, also

$$\begin{aligned} &W \cap \operatorname{cir} M \subseteq V \cap \operatorname{cir} M \\ &\Rightarrow W \cap M \subseteq (W \cap \operatorname{cir} M) \cap M \subseteq (V \cap \operatorname{cir} M) \cap M = V \cap M \end{aligned}$$

also ist V $\mathcal{T}_f$-Nullumgebung und $V \subseteq U$.

□

Bemerkung Warum in (ii)(4) nur „kreisförmig“? Weil es keinen „absolutkonvexen Kern“ gibt. Im Allgemeinen $\mathcal{T}_f$ keine lineare Topologie.

11.3 Satz (Banach-Dieudonné)

Sei E ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum und $\mathcal{A} := \{\{x_n; n \in \mathbb{N}\}; x_n \text{ Nullfolge in } E\}$. Dann $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_{pc} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}} =: \mathcal{T}_{ns}$.

Beweis: (i). $\mathcal{T}_f \supseteq \mathcal{T}_{pc} \supseteq \mathcal{T}_{ns}$: 1. Inklusion folgt aus Proposition 11.2(i) und 2. Inklusion, da jedes $A \in \mathcal{A}$ präkompakt ist.

(ii). $\mathcal{T}_{ns} \supseteq \mathcal{T}_f$: Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_f)$ offen. Es genügt zu zeigen: Es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $A^\circ \subseteq U$.

Es gibt eine Nullumgebungsbasis $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von E mit $V_0 = E$, $V_{n+1} \subseteq V_n$ und V_n absolutkonvex und abgeschlossen ($n \in \mathbb{N}$). In (iii) zeigen wir:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \, \exists B_n \subseteq V_n \text{ endlich} : A_n^\circ \cap V_n^\circ \subseteq U \text{ mit } A_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k \tag{$*$}$$

Sei $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} B_k$, dann offenbar $A \in \mathcal{A}$ und aus $A^\circ \subseteq A_n^\circ$ folgt

$$A^\circ \cap V_n^\circ \subseteq U$$

Aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} V_n = \{0\}$ folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V_n^\circ = E'$, damit $A^\circ \subseteq U$.

(iii). Zu ($*$): Klar für $n = 0$. Seien $B_0, \ldots, B_{n-1}$ schon gewählt. Zu finden ist $B_n \subseteq V_n$ endlich, sodass

$$\underbrace{(A_n \cup B_n)^\circ}_{A_{n+1}^\circ} \cap V_{n+1}^\circ \subseteq U$$

Annahme: Es gibt kein solches B_n. Setze $C := V_{n+1}^\circ \setminus U$. Dann

$$\varnothing \neq (A_n \cup B)^\circ \cap C = A_n^\circ \cap B^\circ \cap C$$

für $B \subseteq V_n$ endlich, daher ist

$$\{A_n^\circ \cap B^\circ \cap C; B \subseteq V_n \text{ endlich}\}$$

eine Filterbasis auf C. V_{n+1}° ist nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki $\sigma(E', E)$-kompakt, damit auch $\mathcal{T}_f$-kompakt (da V_{n+1}° gleichgradig stetig). Da $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T}_f)$ offen, ist C eine $\mathcal{T}_f$-abgeschlossene Teilmenge von V_{n+1}°, also kompakt.

Alle $A_n^\circ \cap B^\circ \cap C$ sind abgeschlossen ($B \subseteq V_n$ endlich), daher gibt es

$$x' \in \bigcap_{\substack{B \subseteq V_n \\ B \text{ endlich}}} A_n^\circ \cap B^\circ \cap C = A_n^\circ \cap \Bigg(\bigcap_{\substack{B \subseteq V_n \\ B \text{ endlich}}} B^\circ \Bigg) \cap C$$

Aus $V_n = \bigcup_{\substack{B \subseteq V_n \\ B \text{ endlich}}} B$ folgt $V_n^\circ = \bigcap_{\substack{B \subseteq V_n \\ B \text{ endlich}}} B^\circ$ und somit

$$x' \in \underbrace{A_n^\circ \cap V_n^\circ}_{\overset{\text{IV}}{\subseteq} U} \cap C \subseteq U \cap (V_{n+1} \setminus U) = \varnothing$$

Widerspruch!

□

11.4 Folgerung

Sei E lokalkonvex und metrisierbar sowie $A \subseteq E'$. Dann äquivalent:

(i). $A \mathcal{T}_{pc}$-abgeschlossen

(ii). Für jede absolutkonvexe $\sigma(E', E)$-abgeschlossene gleichgradig stetige Menge $M \subseteq E'$ ist $A \cap M$ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen. (Beachte Unterschied zur Definition von $\mathcal{T}_f$!)

Beweis: (i). „⇒“: Klar nach Definition von $\mathcal{T}_f \overset{11.3}{=} \mathcal{T}_{pc}$.

(ii). „⇐“: Sei $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig. Dann $M^{\circ\circ} (\supseteq M)$ absolutkonvex, $\sigma(E', E)$-abgeschlossen und gleichgradig stetig. Also ist nach Voraussetzung $A \cap M = (A \cap M^{\circ\circ}) \cap M$ relativ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen in M und somit ist A $\mathcal{T}_f$-abgeschlossen nach Definition von $\mathcal{T}_f$. Somit auch $\mathcal{T}_{pc}$-abgeschlossen nach Satz 11.3.

□

Definition Sei E lokalkonvex und $\mathcal{A} \coloneqq \{A \subseteq E; A \text{ absolutkonvex, kompakt}\}$. Dann ist $\mathcal{T}_{cc} \coloneqq \mathcal{T}_\mathcal{A}$ eine Topologie auf E'.

Bemerkung (i). $\sigma(E', E) \subseteq \mathcal{T}_{cc} \subseteq \mathcal{T}(E', E)$ und somit $(E', \mathcal{T}_{cc})' = E$, falls E separiert.

(ii). Falls E quasivollständig ist, gilt $\mathcal{T}_{pc} = \mathcal{T}_{cc}$ verträglich mit $\langle E, E' \rangle$.

11.5 Satz (Krein-Šmulian)

Sei E ein Fréchet-Raum und $A \subseteq E'$ konvex. Dann äquivalent:

(i). A $\sigma(E', E)$-abgeschlossen

(ii). Für jede absolutkonvexe $\sigma(E', E)$-abgeschlossene gleichgradig stetige Menge $M \subseteq E'$ ist $A \cap M$ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen.

Beweis:
- (i) ⇒ (ii): Klar.
- (ii) ⇒ (i): Nach Folgerung 11.4 ist A $\mathcal{T}_{pc}$-abgeschlossen, also auch $\mathcal{T}_{cc}$-abgeschlossen, da E vollständig. Da $\mathcal{T}_{cc}$ verträglich mit $\langle E, E' \rangle$ ist, ist A auch $\sigma(E', E)$-abgeschlossen (A konvex).

□

Beweis: (von Satz 11.1, „⇐“) Ist $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig, so ist $M \subseteq B_{E'}[0, r]$ für geeignetes $r > 0$. Dann $F \cap B_{E'}[0, r]$ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen, daher $F \cap M$ relativ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen in M. Aus Satz 11.5 folgt die Behauptung. □

Bemerkung Satz 11.1 stammt von Banach.

12

Convex compactness & Satz von Krein

12.1 Satz (Krein)

Sei E ein Banachraum und $C \subseteq \sigma(E,E')$-kompakt. Dann ist $\overline{\text{co}}C$ $\sigma(E,E')$-kompakt.

Bemerkung (i). Ist E lokalkonvex, quasivollständig und C $\sigma(E,E')$-kompakt, dann ist $\overline{\text{co}}C$ präkompakt und vollständig, also kompakt. Jedoch ist $(E,\sigma(E,E'))$ nicht quasivollständig, falls E nicht reflexiv ist:

$$\overline{B_E}^{\sigma(E'',E')} = B_{E''}$$

(ii). Im reflexiven Banachraum ist Satz 12.1 klar.

Definition Sei E lokalkonvex und separiert. E besitzt die convex compactness property :⇔ Für jede kompakte Menge $C \subseteq E$ ist auch $\overline{\text{co}}C$ kompakt.

Bemerkung E quasivollständig $\overset{10.4}{\Rightarrow}$ E besitzt die convex compactness property.

Definition Sei E lokalkonvex und separiert. Sei (Ω,μ) ein endlicher Maßraum und $f:\Omega\to E$ mit $x'\circ f \in L^1(\mu)$ für alle $x' \in E'$. Dann ist $\int f\,d\mu \in (E')^*$ erklärt durch

$$\int f\,d\mu(x') := \int_\Omega x'\circ f\,d\mu$$

f heißt μ-Pettis-integrierbar :⇔ $\int f\,d\mu \in E$.

12.2 Proposition

Sei E lokalkonvex und separiert und Ω kompakt. Sei $f:\Omega\to E$ stetig. Dann ist

$$\overline{\text{co}\, f(\Omega)}^{\sigma(E'^*,E')} = \left\{\int f\,d\mu;\, \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)\right\}$$

$\sigma(E'^*,E')$-kompakt wobei $\mathcal{M}_1(\Omega) := \{\mu \ge 0 \text{ Borel-Maß auf } \Omega;\ \mu(\Omega)=1\}$.

Beweis: (i). $\overline{\text{co}\, f(\Omega)}^{\sigma(E'^*,E')}$ ist kompakt: $f(\Omega)$ ist kompakt und $(E'^*,\sigma(E'^*,E'))$ vollständig (Proposition 8.2). Behauptung folgt mit Proposition 10.4

(ii). Es gilt

$$\text{co}\, f(\Omega) = \left\{\int f\,d\mu;\, \mu\in\mathcal{M}_1(\Omega), \text{spt}\,\mu\, \text{endlich}\right\} \tag{$*$}$$

Die Menge $\mathcal{M}_1(\Omega)$ ist kompakt für $\sigma(\mathcal{M}(\Omega),C(\Omega))$ (vage Topologie) wobei $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der signierten Borel-Maße auf Ω mit endlicher Totalvariation ($\cong C(\Omega)'$, Satz von Riesz-Markov). $\mathcal{M}_1(\Omega)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $B_{C(\Omega)'}$ nach Satz von Alaoglu-Bourbaki. Die Abbildung

$$\mathcal{M}(\Omega) \ni \mu \mapsto \int f\,d\mu \in E'^*$$

ist vag-$\sigma(E'^*, E')$-stetig: Für jedes $x' \in E'$ ist

$$\mathcal{M}(\Omega) \ni \mu \mapsto \int x' \circ f \, d\mu \in \mathbb{K}$$

vag-stetig (da $x' \circ f$ stetig), dann Satz 1.1. Somit ist die Menge

$$\left\{ \int f \, d\mu ; \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega) \right\}$$

$\sigma(E'^*, E')$-kompakt, daher abgeschlossen und aus $(*)$ folgt „$\subseteq$".

Andererseits trennt $\{\mu \in \mathcal{M}(\Omega); \operatorname{spt} \mu \text{ endlich}\}$ $C(\Omega)$. Daher ist $\{\mu \in \mathcal{M}(\Omega); \operatorname{spt} \mu \text{ endlich}\}$ vag dicht in $\mathcal{M}(\Omega)$. Daraus folgert man, dass $\{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega); \operatorname{spt} \mu \text{ endlich}\}$ dicht in $\mathcal{M}_1(\Omega)$ ist (siehe Bourbaki, Intégration, Abschnitt 3 §2 no. 4). Damit folgt aus $(*)$ die Gleichheit.

□

12.3 Proposition

Sei E lokalkonvex und separiert und $C \subseteq E$ kompakt. Äquivalent:

(i). $\overline{\operatorname{co}}\, C$ kompakt

(ii). Ist Ω kompakt, $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$, $f : \Omega \to C$ stetig, so ist f μ-Pettis-integrierbar.

(iii). Für alle $\mu \in \mathcal{M}_1(C)$ gilt $\int_C x \, d\mu(x) \in E$, d.h. $C \ni x \mapsto x \in E$ ist μ-Pettis-integrierbar.

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Folgt aus Proposition 12.2, da aus (i) folgt, dass $\overline{\operatorname{co}}\, C$ $\sigma(E'^*, E')$-kompakt.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.
- (iii) $\Rightarrow$ (i): Aus Proposition 12.2 folgt, dass $\overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E'^*, E')} \subseteq E$. Somit ist

$$\overline{\operatorname{co}}\, C = \overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E, E')} = \overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E'^*, E')}$$

$\sigma(E, E')$-kompakt, damit $\sigma(E, E')$-vollständig. Aus Satz 8.5(ii) folgt, dass $\overline{\operatorname{co}} C$ vollständig (beachte dazu, dass E Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen $\sigma(E, E')$-abgeschlossenen Mengen besitzt). Da $\operatorname{co} C$ präkompakt ist (Satz 10.3) folgt die Kompaktheit von $\overline{\operatorname{co}} C$.

□

12.4 Satz

Sei E lokalkonvex, separiert und $C \subseteq E$ $\sigma(E, E')$-kompakt.

(i). Sei $x \in \overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E'^*, E')}$ und $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\{x'_n; n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und $x'_n \to x' \in E'$ bzgl. $\sigma(E', E)$. Dann gilt

$$\langle x, x'_n \rangle \to \langle x, x' \rangle \qquad (n \to \infty)$$

(ii). Sei E zusätzlich separabel und $\overline{\operatorname{co}}\, C$ vollständig. Dann ist $\overline{\operatorname{co}}\, C$ $\sigma(E, E')$-kompakt.

Beweis: (i). Proposition 12.3: Es existiert $\mu \in \mathcal{M}_1(\mu)$ mit

$$x = \int_C y \, d\mu(y)$$

Dann

$$\langle x, x'_n \rangle = \int_C \langle y, x'_n \rangle \, d\mu(y) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{dK}}{\to}} \int_C \langle y, x' \rangle \, d\mu(y) = \langle x, x' \rangle$$

(Für dominierte Konvergenz benutze gleichgradige Stetigkeit.)

(ii). Ohne Einschränkung E vollständig: Sei $\hat{E}$ die Vervollständigung. Da $\overline{\operatorname{co}}\, C$ vollständig ist, folgt $\overline{\operatorname{co}}\, C = \overline{\operatorname{co} C}^{\hat{E}}$. Daher ist die Behauptung äquivalent dazu, dass $\overline{\operatorname{co} C}^{\hat{E}}$ $\sigma(\hat{E}, E')$-kompakt ist (beachte $E' = \hat{E}'$).

Sei $M \subseteq E'$ gleichgradig stetig und $\sigma(E', E)$-abgeschlossen. Dann ist M $\sigma(E', E)$-kompakt und daher metrisierbar (da E separabel). Sei $x \in \overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E'^*, E')}$. Aus (i) folgt, dass $x|_M$ $\sigma(E', E)$-stetig ist. Aus Folgerung 8.13: $x \in E$. Somit

$$\overline{\operatorname{co}}\, C = \overline{\operatorname{co} C}^{\sigma(E'^*, E')} \subseteq E$$

$\sigma(E, E')$-kompakt.

□

Beweis: (von Satz 12.1)

(i). E separabel: Die Behauptung folgt aus Satz 12.4(ii).

(ii). Allgemeiner Fall: Idee: Benutze Satz von Eberlein-Šmulian (5.4) und zeige, dass $\operatorname{co} C$ bedingt schwach folgenkompakt ist.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{co} C$, dann gibt es einen separablen abgeschlossenen Teilraum E_0 von E, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{co}(C \cap E_0)$ liegt. Die Menge $C \cap E_0$ ist $\sigma(E_0, E_0')$-kompakt, daher $\overline{\operatorname{co}}\,(C \cap E_0)$ $\sigma(E_0, E_0')$-kompakt nach (i). Nach Satz 5.4 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\sigma(E_0, E_0')$-konvergente Teilfolge, diese ist dann auch $\sigma(E, E')$-konvergent wegen $\sigma(E_0, E_0') = \sigma(E, E') \cap E_0$. Aus Satz 5.4 folgt die Behauptung.

□

12.5 Satz

Sei X kompakt und $H \subseteq C(X) \subseteq \mathbb{K}^X$. Jede Folge in H besitze einen Häufungswert in $C(X)$ bzgl. der Produkttopologie. Dann ist $\overline{H}^{\mathbb{K}^X}$ kompakt und $\bar{H} \subseteq C(X)$.

Bemerkung (i). Es gilt sogar: Jedes Element von $\bar{H}$ ist Grenzwert einer Folge in H.

(ii). Im Allgemeinen ist $\bar{H}$ nicht kompakt in $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: (i). Für alle $t \in \mathbb{K}$ ist $\{f(t); f \in H\}$ beschränkt, damit folgt Kompaktheit aus Satz von Tychonoff.

(ii). $\bar{H} \subseteq C(X)$: Annahme es gibt $g \in \bar{H}$, dass nicht stetig ist. Dann gibt es $t_0 \in X$, $M \subseteq X$ mit $t_0 \in \bar{M}$, $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall t \in M : |g(t) - g(t_0)| > 5\varepsilon$$

Wir definieren nun Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in X und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H: Wähle $f_1 \in H$ mit

$$|f_1(t_0) - g(t_0)| < \varepsilon$$

Sind $t_0, \dots, t_{n-1}$ und $f_1, \dots, f_n$ schon gewählt, so wähle

$$t_n \in \{t \in M; \forall k = 1, \dots, n : |f_k(t) - f_k(t_0)| < \varepsilon\}$$
$$f_{n+1} \in \{h \in H; \forall k = 0, \dots, n : |h(t_k) - g(t_k)| < \varepsilon\}$$

Dann gelten folgende Ungleichungen:

$$|g(t_n) - g(t_0)| > 5\varepsilon \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{1}$$
$$|f_n(t_k) - f_n(t_0)| < \varepsilon \qquad (k \geq n) \tag{2}$$
$$|f_n(t_k) - g(t_k)| < \varepsilon \qquad (0 \leq k \leq n-1) \tag{3}$$

Nach Voraussetzung hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert $h \in C(X)$. Dann nach (3):

$$|h(t_k) - g(t_k)| \leq \varepsilon \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

Dies zusammen mit (1) ergibt

$$|h(t_n) - h(t_0)| > 3\varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Da X kompakt ist, besitzt $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen Häufungswert $s \in X$ und daher (da h stetig):

$$|h(s) - h(t_0)| \geq 3\varepsilon \tag{4}$$

Es gibt $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_m(t_0) - h(t_0)|\varepsilon \qquad\qquad |f_m(s) - h(s)| < \varepsilon$$

Mit (2) und Stetigkeit von f_m folgt

$$|f_m(s) - f_m(t_0)| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow |h(s) - h(t_0)| < 3\varepsilon$$

Widerspruch zu (4).

□

12.6 Satz (Eberlein)

Sei E lokalkonvex und separiert. Sei $H \subseteq E$ mit $\overline{\text{co}}\, H$ vollständig. Dann äquivalent:

(i). H relativ $\sigma(E, E')$-kompakt

(ii). H bedingt schwach abzählbar kompakt

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Klar.
- (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\hat{E}$ die Vervollständigung von E. Dann $\overline{\text{co}}\, H$ abgeschlossen, daher auch $\sigma(\hat{E}, E')$-abgeschlossen. Daher genügt es zu zeigen, dass $\overline{H}^{\sigma}$ schwach kompakt in $\hat{E}$ ist. Also ohne Einschränkung E vollständig.

  Die Menge $\overline{H}^{\sigma(E'^*, E')}$ ist kompakt in $(E'^*, \sigma(E'^*, E'))$ (Satz von Tychonoff, Vollständigkeit von E'^*). Also zu zeigen: $\overline{H}^{\sigma(E'^*, E')} \subseteq E$, benutze dazu Folgerung 8.13. Ist $X \subseteq E'$ gleichgradig stetig und $\sigma(E', E)$-abgeschlossen (dann $\sigma(E', E)$-kompakt nach Alaoglu-Bourbaki), dann

  $$\overline{H}^{\sigma(E'^*, E')}|_X := \{x|_X ; x \in \overline{H}^{\sigma(E'^*, E')}\} = \overline{H|_X}^{\mathbb{K}^X} \overset{12.5}{\subseteq} C(X)$$

  (Gleichheit: $\overline{H}^{\sigma}$ ist kompakt. Inklusion: Satz 12.5, anwendbar, da H bedingt schwach abzählbar kompakt). Somit ist für jedes $x \in \overline{H}^{\sigma}(E'^*, E')$ $x|_X$ σ-stetig und aus Folgerung 8.13 folgt $x \in E$.

□

12.7 Satz

Sei $(E, \mathcal{T})$ lokalkonvex und separiert und $C \subseteq E$ $\sigma(E, E')$-kompakt. Dann $\overline{\text{co}}\, C$ $\sigma(E, E')$-kompakt $\Leftrightarrow \overline{\text{co}}\, C$ $\mathcal{T}(E, E')$-vollständig.

Beweis:
- „$\Rightarrow$“: Ist $\overline{\text{co}}\, C$ $\sigma(E, E')$-kompakt, dann $\sigma(E, E')$-vollständig nach Satz 10.2 und somit $\mathcal{T}(E, E')$-vollständig nach Satz 8.5.
- „$\Leftarrow$“: Ohne Einschränkung $\mathcal{T} = \mathcal{T}(E, E')$. Nach Satz 12.6 genügt es zu zeigen, dass $\text{co}\, C$ bedingt σ-abzählbar kompakt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\text{co}\, C$. Dann gibt es einen separablen abgeschlossenen Teilraum E_0 von E, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\text{co}(C \cap E_0)$. Satz 12.4(ii) liefert, dass $\overline{\text{co}}\,(C \cap E_0)$ $\sigma(E_0, E_0')$-kompakt ist und somit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert in E_0, damit auch in E.

□

12.8 Folgerung

Sei E lokalkonvex, separiert und $C \subseteq E$ kompakt. Dann: $\overline{\text{co}}\, C$ kompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{\text{co}}\, C$ $\mathcal{T}(E, E')$-vollständig.

Beweis: Da C kompakt ist, ist $\overline{\text{co}}\, C$ präkompakt. Daher $\overline{\text{co}}\, C$ kompakt genau dann, wenn $\overline{\text{co}}\, C$ vollständig ist (Satz 10.2).

- „$\Rightarrow$“: Ist $\overline{\text{co}}\, C$ kompakt, dann vollständig und daher $\mathcal{T}$-vollständig nach Satz 8.5.
- „$\Leftarrow$“: $\overline{\text{co}}\, C$ ist σ-kompakt nach Satz 12.7, damit σ-vollständig, also vollständig nach Satz 8.5.

$\square$

13
Schwach kompakte Mengen in $L^1(\mu)$

In diesem § sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum.

Definition Eine Menge $H \subseteq L^1(\mu)$ heißt gleichgradig integrierbar :⇔ H ist beschränkt und

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f|\, d\mu = 0$$

gleichmäßig für $f \in H$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \delta \forall f \in H : \int_E |f|\, d\mu < \varepsilon$$

13.1 Satz (Dunford-Pettis)

Für $H \subseteq L^1(\mu)$ ist äquivalent:

(i). H relativ schwach kompakt

(ii). H gleichgradig integrierbar

13.2 Satz (Grothendieck-Kriterium)

Sei E ein Banachraum und $C \subseteq E$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiere eine schwach kompakte Menge $C_\varepsilon \subseteq E$, sodass $C \subseteq C_\varepsilon + B(0, \varepsilon)$. Dann ist C relativ schwach kompakt.

13.3 Lemma

Sei E ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E. Für alle $\varepsilon > 0$ existiere eine schwach konvergente Folge $(x_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, $x^\varepsilon := \sigma - \lim_{n\to\infty} x_n^\varepsilon$, sodass

$$\|x_n - x_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent und

$$\sigma - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{\varepsilon\to 0} x^\varepsilon$$

Beweis: Für $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ gilt

$$\|x_n^{\varepsilon'} - x_n^\varepsilon\| \leq \|x_n^{\varepsilon'} - x_n\| + \|x_n - x_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

daher

$$\|x^{\varepsilon'} - x^\varepsilon\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n^{\varepsilon'} - x_n^\varepsilon\| \leq \varepsilon' + \varepsilon$$

also existiert $x := \lim_{\varepsilon\to 0} x^\varepsilon$ und es gilt $\|x - x^\varepsilon\| \leq \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$. Für $x' \in E'$, $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |x'(x - x_n)| &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(|x'(x - x^\varepsilon)| + |x'(x^\varepsilon - x_n^\varepsilon)| + |x'(x_n^\varepsilon - x_n)|\right)\\ &\leq 2\|x'\| \cdot \varepsilon\\ \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |x'(x - x_n)| &= 0\end{aligned}$$

□

Beweis: (von Satz 13.2)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_{\frac{1}{k}}$ mit $\|x_n^k - x_n\| \le \frac{1}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz von Eberlein-Šmulian gibt es eine Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(x_{n_j}^k)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent für alle $k \in \mathbb{N}$ (Diagonalfolge). Aus Lemma 13.3: $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ist schwach konvergent. Satz von Eberlein-Šmulian gibt die Behauptung. □

13.4 Proposition

Sei $H \subseteq L^1(\mu)$. Dann äquivalent:

(i). H gleichgradig integrierbar

(ii). Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in H} \int_{|f|>n} |f| \, d\mu = 0$$

Beweis:

- (i) ⇒ (ii): Sei $c := \sup_{f\in H} \|f\|$ und $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ gemäß der Definition von gleichgradiger Integrierbarkeit. Für $n \in \mathbb{N}$, $f \in H$ gilt

  $$c \ge \int_{|f|>n} |f| \, d\mu \ge n \cdot \mu[|f| > n]$$

  Für $n > \frac{c}{\delta}$ folgt daher

  $$\mu[|f| > n] \le \frac{c}{n} < \delta$$

  und somit folgt die Behauptung aus der Definition.

- (ii) ⇒ (i): Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass

  $$\int_{|f|>n} |f| \, d\mu \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (f \in H)$$

  Für $\delta := \frac{\varepsilon}{2n}$, $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \delta$ folgt

  $$\begin{aligned}\int_B |f| \, d\mu &= \int_{B\cap[|f|>n]} |f| \, d\mu + \int_{B\cap[|f|\le n]} |f| \, d\mu \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \mu(B) \le \varepsilon\end{aligned}$$

  Für $B := \Omega$ folgt analog, dass H beschränkt ist.

□

Beweis: (von Satz 13.1)

- (ii) ⇒ (i): Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\{g \in L^2(\mu); |g| \le n\}$ schwach kompakt in $L^2(\mu)$, da $L^2(\mu)$ reflexiv ist. Da $L^2(\mu) \hookrightarrow L^1(\mu)$ stetig ist, also auch $\sigma-\sigma$-stetig, ist diese Menge auch in $L^1(\mu)$ schwach kompakt. Für $n \in \mathbb{N}$ ist also

  $$H_n := \{f \cdot 1_{[|f|\le n]}; f \in H\}$$

  relativ σ-kompakt. Außerdem

  $$\sup_{f\in H} \|f - f \cdot 1_{[|f|\le n]}\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

  nach Proposition 13.4, damit folgt die Behauptung aus Satz 13.2.

- (i) ⇒ (ii):

  1. Vorbemerkung: Äquivalent zur zweiten Bedingung in der gleichgradigen Integrierbarkeit von H ist

  $$\lim_{\mu(B)\to 0} \sup_{f\in H} \int_B f \, d\mu = 0 \tag{1}$$

„Notwendig" ist klar. „Hinreichend": Ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ entsprechend (1) gewählt. Dann gilt für $f \in H$, $\mu(B) < \delta$:

$$\int_B |f|\,d\mu = \int_{B\cap[f\geq 0]} f\,d\mu - -\int_{B\cap[f<0]} f\,d\mu \leq 2\varepsilon$$

2. Vorbemerkung: Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}$, dann ist

$$L^1(\mu) \ni f \mapsto \left(\int_{B_n} f\,d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mu)$$

linear und stetig, daher ist das Bild von H rel. (schwach) kompakt in $\ell^1(\mu)$ (vgl. Beispiele in §5).

Beschränktheit von H ist klar. Annahme: H ist nicht gleichgradig integrierbar, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\exists B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \delta, f \in H : \left|\int_B f\,d\mu\right| > \varepsilon$$

(siehe 1. Vorbemerkung). Sei $(\varepsilon_j)_{j\geq 2}$ in $(0,\infty)$ mit $\sum_{j\geq 2}\varepsilon_j \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gibt es eine Folge $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, sodass

$$\forall j = 1,\dots,n-1 : \int_{B'_n} |f_j|\,d\mu \leq \varepsilon_n \qquad \left|\int_{B'_n} f_n\,d\mu\right| > \varepsilon$$

Konstruktion: $n = 1$ ist klar. Sind $f_1,\dots,f_n$ schon gefunden, gibt es $\delta > 0$ mit

$$\forall j = 1,\dots,n : \int_B |f_j|\,d\mu \leq \varepsilon_{n+1}$$

für $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) < \delta$ (denn $\{f_1,\dots,f_n\}$ ist gleichgradig integrierbar). Es gibt $B'_{n+1} \in \mathcal{A}$, $\mu(B'_{n+1}) < \delta$ und $f_{n+1} \in H$ mit

$$\left|\int_{B'_{n+1}} f_{n+1}\,d\mu\right| > \varepsilon$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$B_n := B'_n \setminus \bigcup_{j=n+1}^{\infty} B'_j$$

Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkte Folge in $\mathcal{A}$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_n} f_n\,d\mu\right| &= \left|\int_{B'_n} f_n\,d\mu - \int_{B'_n\cap\bigcup_{j=n+1}^{\infty} B'_j} f_n\,d\mu\right| \\ &\geq \underbrace{\left|\int_{B'_n} f_n\,d\mu\right|}_{>\varepsilon} - \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty}\int_{B'_j} |f_n|\,d\mu}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

(also insbesondere $B_n \neq \varnothing$). Dies zeigt, dass die Menge $\left\{\left(\int_{B_n} f\,d\mu\right)_n ; f \in H\right\}$ nicht relativ kompakt in ℓ^1 ist, denn

$$\sup_{f\in H}\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\left|\int_{B_j} f\,d\mu\right|\right\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Widerspruch (s. 2. Vorbemerkung)!

□

Bemerkung (i). Ist μ kein endliches Maß, so gilt Satz 13.1 ebenfalls, wenn gleichgradig integrierbar zusätzlich bedeutet

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty : \sup_{f\in H}\int_{\Omega\setminus B} |f|\,d\mu < \varepsilon$$

Dass für H relativ schwach kompakt auch dies gilt, folgt so: Annahme nicht, dann gibt es $\varepsilon > 0$, eine disjunkte Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, $\mu(B_n) < \infty$, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$\int_{B_n} |f_n| \, d\mu \geq \varepsilon$$

Dann $\left\{ \left(\int_{B_n} f \, d\mu \right)_n ; f \in H \right\}$ nicht relativ kompakt in ℓ^1, Widerspruch! Dass die Bedingung auch hinreichend ist, folgt aus Satz 13.1, 13.2.

(ii). Die gleichgradige Integrierbarkeit einer Menge $H \subseteq L^1(\mu)$ (auch falls $\mu(\Omega) = \infty$) ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists g \in L^1(\mu), g \geq 0 : \sup_{f \in H} \int_{|f| > g} |f| \, d\mu < \varepsilon$$

Es folgt: Ist $H \subseteq L^1(\mu)$ relativ schwach kompakt, dann auch $\{f \in L^1(\mu); \exists g \in H : |f| \leq |g|\}$. Insbesondere: Für $g \in L^1(\mu)$ ist

$$[-|g|, |g|] := \{f \in L^1(\mu); -|g| \leq f \leq |g|\}$$

relativ schwach kompakt. Ebenso: Ist $g \in L^1(\mathbb{R})$, dann $\{g(\cdot - y); 0 \leq y \leq 1\}$ kompakt, daher

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}); \exists y \in [0,1] : |f| \leq |g(\cdot - y)|\}$$

relativ schwach kompakt.

14

$\mathcal{B}_0'' = \mathcal{B}$

- Ziel: Bidual ausrechnen, ohne Dual gut zu kennen.
- Sei $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Normen p_k, $k \in \mathbb{N}_0$,
$$p_k(\varphi) := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\alpha|\le k}} |\partial^\alpha \varphi(x)| = \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty$$
Dann sind $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$ Fréchet-Räume.
- Zur Erinnerung: Ist E lokalkonvex und separiert, so ist
$$E'' = (E', \beta(E',E))' \overset{3.1}{=} \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^\bullet$$
wobei $\mathcal{U}$ Nullumgebungsbasis von E' (Polarenbildung $\bullet$ in $\langle E'^*, E'\rangle$). Wähle $\mathcal{U} := \{B^\circ; B\subseteq E$ beschränkt$\}$, damit
$$E'' = \bigcup_{\substack{B\subseteq E\\ B \text{ beschr}}} B^{\circ\bullet} = \bigcup_{\substack{B\subseteq E\\ B \text{ beschr}}} \overline{\operatorname{aco} B}^{\sigma(E'^*,E')}$$
- Schritte zum Beweis von $\mathcal{B}_0'' = \mathcal{B}$:
  1. Beschränkte Mengen von $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$
  2. Stetigkeitseigenschaften der Elemente von $\mathcal{B}_0'$; Fortsetzung dieser Elemente auf $\mathcal{B}$
  3. Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}_0'^*$; Bestimmung der $\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')$-Abschlüsse beschränkter Mengen von $\mathcal{B}_0$; $\mathcal{B}_0'' = \mathcal{B}$
  4. Bestimmung von $\beta(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0')$

zu (1) Sei $A \in \mathcal{B}_0$. Dann: A beschränkt $\Leftrightarrow \sup_{\varphi\in A} p_k(\varphi) < \infty$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Für jede Folge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $(0,\infty)$ ist daher
$$A_c := \{\varphi \in \mathcal{B}_0; \forall k \in \mathbb{N}_0 : p_k(\varphi) \le c_k\}$$
beschränkt. Sei $\mathcal{A} := \{A_c; c$ Folge in $(0,\infty)\}$. Dann gilt $\beta(\mathcal{B}_0', \mathcal{B}_0) = \mathcal{T}_\mathcal{A}$ und $\{A_c^\circ; c$ Folge in $(0,\infty)\}$ ist eine Nullumgebungsbasis von $\beta(\mathcal{B}_0', \mathcal{B}_0)$.

Entsprechend: $\hat{A} \subseteq B$ beschränkt
$$\Leftrightarrow \hat{A} \subseteq \hat{A}_c := \{\varphi \in \mathcal{B}; \forall k \in \mathbb{N}_0 : p_k(\varphi) \le c_k\}$$
für eine Folge c in $(0,\infty)$.

zu (2) Die Einbettung $C_C^\infty(\mathbb{R}^n) =: \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{B}_0$ ist stetig und $\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{B}_0$ (leicht). Daraus folgt $\mathcal{B}_0' \subseteq \mathcal{D}'$ (in dem Sinne, dass $u|_\mathcal{D} \in \mathcal{D}'$ für $u \in \mathcal{B}_0'$).

14.1 Lemma

Sei $u \in \mathcal{B}_0'$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$, sodass
$$\forall \varphi \in \mathcal{B}_0 : |\langle \varphi, u\rangle| \le c \cdot p_m(\varphi)$$
Für $\varepsilon > 0$ gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit
$$(\varphi \in \mathcal{D}, \operatorname{spt}\varphi \cap K = \varnothing) \Rightarrow |\langle\varphi, u\rangle| \le \varphi \cdot p_m(\varphi)$$

Beweis: 1. Eigenschaft ist klar (Stetigkeit von u). Annahme 2.Eigenschaft nicht wahr. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ mit disjunkten Trägern, $p_m(\varphi_k) = 1$ und $\langle \varphi_k, u\rangle \geq \varepsilon$. Dann ist $\sum_{j=1}^k \varphi_j \in \mathcal{D}$ und

$$p_m\left(\sum_{j=1}^k \varphi_j\right) = 1 \qquad \langle \sum_{j=1}^k \varphi_j, u\rangle \geq k\cdot\varepsilon$$

für $k \in \mathbb{N}$. Widerspruch zur 1. Ungleichung. □

Bemerkung (i). Für $m \in \mathbb{N}_0$ gibt es $M_m \geq 0$, sodass für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$:

$$p_m(\varphi\cdot\psi) \leq M_m \cdot p_m(\varphi)\cdot p_m(\psi)$$

(Konsequenz aus der Produktregel).

(ii). Sei $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine spezielle Approximation der Eins, d.h. $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$, beschränkt in $\mathcal{B}_0$ und für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\eta_k|_K = 1$ für k hinreichend groß. (Zum Beispiel $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta|_{B(0,1)} = 1$, $\eta_k := \eta\left(\frac{\cdot}{k}\right)$.)

14.2 Lemma

Sei $u \in \mathcal{B}_0'$ und $\varphi \in \mathcal{B}$. Dann ist $(\langle \eta_k\cdot\varphi, u\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent,

$$\langle\varphi, u\rangle^* := \lim_{k\to\infty}\langle \eta_k\cdot\varphi, u\rangle$$

(unabhängig von der Wahl von $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$). Ist $\hat{A} \subseteq \mathcal{B}$ beschränkt, so gilt

$$\langle \eta_k\cdot\varphi, u\rangle \to \langle\varphi, u\rangle^* \quad (k\to\infty) \quad \text{glm. für}\, \varphi \in \hat{A}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 14.1 gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, sodass zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2M_m\cdot p_m(\varphi)\cdot\sup_k p_m(\eta_k)}$ eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$(\psi \in \mathcal{D}, \operatorname{spt}\psi \cap K = \varnothing) \Rightarrow |\langle\psi, u\rangle| \leq \varepsilon'\cdot p_m(\psi)$$

Nach Definition von $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\eta_k = 1$ in einer Umgebung von K für $k \geq k_0$. Für $k, k' \geq k_0$ ist daher $(\eta_k - \eta_{k'})\cdot\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{spt}(\eta_k - \eta_{k'})\cdot\varphi \cap K = \varnothing$, somit

$$|\langle \eta_k\cdot\varphi, u\rangle - \langle \eta_{k'}\cdot\varphi, u\rangle| \leq \varepsilon'\cdot \underbrace{p_m((\eta_k - \eta_{k'})\cdot\varphi)}_{\leq M_m\cdot p_m(\eta_k-\eta_{k'})\cdot p_m(\varphi)} \leq \varepsilon$$

(Unabhängig von $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$: Mischen.)
Sei $\hat{A} = \hat{A}_c$ für eine Folge c in $(0,\infty)$. Seien $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ wie oben, $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2M_m\cdot c_m\cdot\sup_k p_m(\eta_k)}$. Mit K, k_0 wie oben folgt dann

$$|\langle \eta_k\cdot\varphi, u\rangle - \langle\varphi, u\rangle|^* \leq \varepsilon'\cdot 2M_m\cdot\sup_{k\in\mathbb{N}} p_m(\eta_k)\cdot\underbrace{p_m(\varphi)}_{\leq c_m} \leq \varepsilon$$

für $\varphi \in \hat{A}_c$, $k \geq k_0$. □

Bemerkung Sei $u \in \mathcal{B}_0'$. Dann gibt es $c > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ wie in Lemma 14.1, d.h. $u \in (\mathcal{B}_0, p_m)'$. Die Abbildung

$$j : (\mathcal{B}_0, p_m) \ni \varphi \mapsto (\partial^\alpha\varphi)_{|\varphi|\leq m} \in C_0(\mathbb{R}^n)^{\{\alpha;|\alpha|\leq m\}} =: E$$

ist isometrisch. Nach Satz von Hahn-Banach gibt es $\hat{u} \in E'$, sodass $u = \hat{u}\circ j$. Wegen $C_0(\mathbb{R}^n)' = \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^n)$ gibt es $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq m$, sodass

$$\begin{aligned}\langle\varphi, u\rangle &= \sum_{|\alpha|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha\varphi\, d\mu_\alpha = \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\cdot\langle\varphi, \partial^\alpha\mu_\alpha\rangle \\ &= \langle\varphi, \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\cdot\partial^\alpha\mu_\alpha\rangle\end{aligned}$$

für $\varphi \in \mathcal{D}$. Insbesondere:

$$\langle 1, u\rangle^* = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \, d\mu_0$$

Die Elemente von $\mathcal{B}_0'$ heißen integrierbare Distributionen.

zu (3) $\langle \cdot, \cdot \rangle^* : \mathcal{B} \times \mathcal{B}_0' \to \mathbb{K}$ ist bilinear. Damit ist $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}_0'^*$ abgebildet:

$$\hat{\kappa}(\varphi)(u) := \langle \varphi, u\rangle^*$$

Zeige $\langle \varphi, u\rangle^* = \langle \varphi, u\rangle$ für $\varphi \in \mathcal{B}_0$, $u \in \mathcal{B}_0'$: Für $\varphi \in \mathcal{B}_0$ gilt $\eta_k \cdot \varphi \to \varphi$ in $\mathcal{B}_0$, denn

$$\|\partial^\alpha((\eta_k - 1)\cdot\varphi)\|_\infty \le \sum_{0\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}(\eta_k - 1)\|_\infty \cdot \underbrace{\|\partial^\beta \varphi\|_{\mathrm{spt}(\eta_k - 1)}}_{\to 0} \to 0$$

für $k \to \infty$, daher $\langle \eta_k \cdot \varphi, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$ für $k \to \infty$.

Dies zeigt, dass $\hat{\kappa}$ die kanonische Einbettung von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_0'^*$ fortsetzt. $\hat{\kappa}$ ist injektiv: Sei $\varphi \in \mathcal{B}$, $\langle \varphi, u\rangle^* = 0$ für alle $u \in \mathcal{B}_0'$. Da δ_x (Auswertungsfunktional) in $\mathcal{B}_0'$ für $x \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$0 = \langle \varphi, \delta_x\rangle^* = \varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Mit $\mathcal{R}$ bezeichne Standardtopologie von $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei c eine Folge in $(0,\infty)$. Da $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{E}$ stetig ist, ist $\hat{A}_c$ auch beschränkt in $\mathcal{E}$ und daher kompakt in $\mathcal{E}$ (leicht zu sehen: abgeschlossen), da $\mathcal{E}$ ein Montelraum ist.

14.3 Lemma

Sei c eine Folge in $(0,\infty)$ und $u \in \mathcal{B}_0'$. Dann ist die Abbildung $\hat{A}_c \ni \varphi \mapsto \langle \varphi, u\rangle^* \in \mathbb{K}$ stetig bzgl. $\mathcal{R} \cap \hat{A}_c$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\varphi \mapsto \langle \eta_k \cdot \varphi, u\rangle$ stetig bzgl. $\mathcal{R}$ (da $\mathcal{E} \ni \varphi \mapsto \eta_k \cdot \varphi \in \mathcal{B}_0$ stetig). Diese Abbildungen konvergieren glm. auf $\hat{A}_c$ gegen $\langle \varphi, u\rangle^*$. □

14.4 Satz

Sei c eine Folge in $(0,\infty)$. Dann

(i). $\hat{A}_c$ ist $\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')$-kompakt und $\overline{A_c}^{\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')} \subseteq \hat{A}_c$

(ii). Es gibt eine Folge c' in $(0,\infty)$ mit $\hat{A}_c \subseteq \overline{A_{c'}}^{\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')}$

(iii). $\mathcal{B}_0'' = \mathcal{B}$ (als Mengen)

Beweis: (i). Für $u \in \mathcal{B}_0'$ ist $\hat{A}_c \ni \varphi \mapsto \langle \varphi, u\rangle^*$ stetig bzgl. $\mathcal{R} \cap \hat{A}_c$ nach Lemma 14.3. Da $\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0') \cap \hat{A}_c$ die Initialtopologie bzgl. der Abbildung $\varphi \mapsto \langle \varphi, u\rangle^*$ ist, folgt die Stetigkeit der Abbildung

$$(\hat{A}_c, \mathcal{R} \cap \hat{A}_c) \hookrightarrow (\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0') \cap \hat{A}_c)$$

aus Satz 1.1. Da $(\hat{A}_c, \mathcal{R} \cap \hat{A}_c)$ kompakt ist, ist $(\hat{A}_c, \sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0') \cap \hat{A}_c)$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen bzgl. $\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')$. Aus $A_c \subseteq \hat{A}_c$ folgt die Behauptung.

(ii). Für $\varphi \in \hat{A}_c$, $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$p_m(\eta_k \cdot \varphi) \le M_m \cdot p_m(\eta_k) \cdot p_M(\varphi) \le M_m \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} p_m(\eta_k) \cdot c_m =: c_m'$$

(iii). Aus der Bemerkung am Anfang dieses § folgt mit (i),(ii):

$$\mathcal{B}_0'' = \bigcup_c \overline{A_c}^{\sigma(\mathcal{B}_0'^*, \mathcal{B}_0')} = \mathcal{B}$$ □

zu (4) Zeige, dass $\beta(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')$ von $\{p_m; m\in\mathbb{N}_0\}$ erzeugt wird. $\mathcal{B}_0$ ist Fréchet-Raum, also tonneliert (Satz 6.8), also insbesondere quasitonneliert. Nach Satz 6.7 ist $\beta(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')$ gleich der natürlichen Topologie. Diese hat Nullumgebungsbasis $\{\overline{\operatorname{aco} U}^{\sigma(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')}; U\in\mathcal{U}\}$ mit $\mathcal{U}$ Nullumgebungsbasis von $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{U} := \{U_{m,\varepsilon}; m\in\mathbb{N}_0, \varepsilon>0\}$ wobei

$$U_{m,\varepsilon} := \{\varphi\in\mathcal{B}_0; p_m(\varphi)\le\varepsilon\}$$

Entsprechend Nullumgebungsbasis $\hat{\mathcal{U}}$ von $\mathcal{B}$ mit Mengen $\hat{U}_{m,\varepsilon}$. Wir zeigen $\overline{U_{m,\varepsilon}}^{\sigma(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')}\subseteq\hat{U}_{m,\varepsilon}$: Für $x\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, $|\alpha|\le m$ ist $\partial^\alpha\delta_x\in\mathcal{B}_0'$,

$$\langle\varphi,\partial^\alpha\delta_x\rangle^* = (-1)^{|\alpha|}\cdot\partial^\alpha\varphi(x)\qquad(\varphi\in\mathcal{B})$$

Daher ist

$$\hat{U}_{m,\varepsilon} = \bigcap_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\alpha|\le m}}\{\varphi\in\mathcal{B}; |\partial^\alpha\varphi(x)|\le\varepsilon\}$$

$\sigma(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')$-abgeschlossen. Wegen $U_{m,\varepsilon}\subseteq\hat{U}_{m,\varepsilon}$ folgt die Behauptung.

Andererseits: Ist $\varphi\in\hat{U}_{m,\varepsilon}$, so ist

$$p_m(\eta_k\cdot\varphi)\le M_m\cdot p_m(\eta_k)\cdot p_m(\varphi)\le N_m\cdot\varepsilon$$

mit $N_m := M_m\cdot\sup_k p_m(\eta_k)(<\infty)$. Daraus folgt $\overline{U_{m,\varepsilon\cdot N_m}}^{\sigma(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')}\supseteq\hat{U}_{m,\varepsilon}$. Damit sind $\{\overline{U_{m,\varepsilon}}^{\sigma(\mathcal{B},\mathcal{B}_0')}; m\in\mathbb{N}_0,\varepsilon>0\}$ und $\hat{\mathcal{U}}$ äquivalent.

Bemerkung (i). Zu $\mathcal{B}_0''=\mathcal{B}$ siehe L. Schwartz: Théorie des distributions, p.203; Dierolf-V.: Calculation of the bidual of some function spaces, Math. Ann. 253 (1980).

(ii). Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{B}_0(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$. Dann

$$\mathcal{B}_0(\Omega)'' = \check{\mathcal{B}}(\Omega) := \{\varphi\in C_b^\infty(\Omega); x\mapsto\begin{cases}\partial^\alpha\varphi(x) & x\in\Omega\\ 0 & x\notin\Omega\end{cases}\text{ ist stetig}\}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{B}_0$. Spezielle Approximation der Eins, regularisierter Randabstand, Whitney.