

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Skript:

Theoretische Mechanik

Verfasser

Franziska Kühn

Daten

Prof. Dr. Roland Ketzmerick  
Sommersemester 2009  
Grundstudium

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Newtonsche Mechanik</b>                              | <b>4</b>  |
| 1.1      | Newtonsche Axiome . . . . .                             | 4         |
| 1.2      | Eindimensionale Bewegungen . . . . .                    | 8         |
| 1.3      | Erhaltungssätze . . . . .                               | 16        |
| 1.4      | Planetenbewegung . . . . .                              | 22        |
| 1.5      | Galilei-Transformation . . . . .                        | 26        |
| 1.6      | Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .                   | 27        |
| 1.7      | System von Punktmassen . . . . .                        | 29        |
| <b>2</b> | <b>Lagrangesche Formulierung der Mechanik</b>           | <b>34</b> |
| 2.1      | Einführung am Beispiel ebenes Pendel . . . . .          | 34        |
| 2.2      | Zwangsbedingungen . . . . .                             | 35        |
| 2.3      | Zwangskraft, D'Alembert-Prinzip . . . . .               | 36        |
| 2.4      | Lagrange-Gleichung 1.Art . . . . .                      | 37        |
| 2.5      | Lösungsmethode der Lagrange-Gleichung 1.Art . . . . .   | 39        |
| 2.6      | Lagrange-Gleichungen 2.Art . . . . .                    | 43        |
| 2.7      | Hamilton-Prinzip . . . . .                              | 47        |
| 2.8      | Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .                | 50        |
| 2.9      | Reibungskräfte . . . . .                                | 52        |
| <b>3</b> | <b>Hamiltonsche Formulierung der Mechanik</b>           | <b>53</b> |
| 3.1      | Hamilton-Funktion, kanonische Gleichungen . . . . .     | 53        |
| 3.2      | Grundlegende Beispielsysteme . . . . .                  | 55        |
| 3.3      | Kanonische Transformation . . . . .                     | 56        |
| 3.4      | Poisson-Klammer . . . . .                               | 59        |
| 3.5      | Satz von Liouville . . . . .                            | 60        |
| <b>4</b> | <b>Starre Körper</b>                                    | <b>62</b> |
| 4.1      | Kinematik . . . . .                                     | 62        |
| 4.2      | Rotationsenergie und Trägheitstensor . . . . .          | 64        |
| 4.3      | Steinerscher Satz . . . . .                             | 65        |
| 4.4      | Trägheitsmoment . . . . .                               | 65        |
| 4.5      | Drehimpuls und Trägheitstensor . . . . .                | 66        |
| 4.6      | Hauptachsentransformation . . . . .                     | 66        |
| 4.7      | Kontinuierliche Masseverteilung . . . . .               | 66        |
| 4.8      | Eulersche Gleichungen . . . . .                         | 69        |
| 4.9      | Rotation um freie Achse . . . . .                       | 70        |
| 4.10     | Kräftefreier symmetrischer Kreisel . . . . .            | 71        |
| <b>5</b> | <b>Relativitätstheorie</b>                              | <b>73</b> |
| 5.1      | Relativitätsprinzip . . . . .                           | 73        |
| 5.2      | Herleitung der Lorentz-Transformation . . . . .         | 74        |
| 5.3      | Konsequenzen aus Lorentz-Transformation . . . . .       | 76        |
| 5.4      | Minkowski-Diagramm . . . . .                            | 78        |
| 5.5      | Formulierung der Mechanik in kovarianter Form . . . . . | 79        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>6 Nichtlineare Dynamik</b>                      | <b>83</b> |
| 6.1 Linearisierte Dynamik . . . . .                | 84        |
| 6.2 Hamiltonsche Systeme . . . . .                 | 85        |
| <b>7 Anhang: Herleitung Lorentz-Transformation</b> | <b>87</b> |
| 7.1 Geschwindigkeitsaddition . . . . .             | 88        |

# 1

## Newton'sche Mechanik

### 1.1 Newton'sche Axiome

#### 1.1.1 Wortlaut

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
2. Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht längs jener geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.
3. Die Reaktion auf eine Aktion ist immer entgegengesetzt gerichtet und gleich, d.h. die Aktionen (Kraftwirkungen) zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

#### 1.1.2 Begriffe der Kinematik

- Kinematik: Beschreibung der Bewegung
- Körper:
  1. Punktmechanik: Massepunkt ohne räumliche Ausdehnung
  2. später: starre Körper

- Bahnkurve:  $\vec{r}(t)$
- Geschwindigkeit: Vektor (Betrag + Richtung)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- Richtung von  $\vec{v}$ : parallel zu  $d\vec{r}$ , d.h. in Tangentialrichtung
- Betrag von  $\vec{v}$ :  $v = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2}$

- Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}$$

- „Zustand der Ruhe“:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 = \text{const.}$$

- „gleichförmige Bewegung“:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \text{const.} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$$

- „Änderung der Bewegung“:  $\vec{a}(t) \neq 0$

### 1.1.3 Koordinatensysteme

In einem Koordinatensystem kann die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  durch Koordinaten dargestellt werden.

#### 1. Kartesische Koordinaten

- Basisvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  mit folgenden Eigenschaften:

(a) Normierung:  $|\vec{e}_x|^2 = |\vec{e}_y|^2 = |\vec{e}_z|^2 = 1$

(b) orthogonal:  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$

- (c) überall im Raum die gleiche Richtung (i.A. nicht so, z.B. Polarkoordinaten)

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

- Die kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  kann man als Spaltenvektor zusammenfassen. Aber:  $\vec{r}$  ist nicht gleich dem Spaltenvektor, da der Spaltenvektor nur zusammen mit den Basisvektoren einen Punkt im Raum beschreibt.
- In anderem kartesischen Koordinatensystem  $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$  hat  $\vec{r}$  die Koordinaten  $x', y', z'$ .

$$\vec{r}(t) = x'(t) \cdot \vec{e}'_x + y'(t) \cdot \vec{e}'_y + z'(t) \cdot \vec{e}'_z$$

- Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{e}_z + x(t) \cdot \frac{d\vec{e}_x}{dt} + y(t) \cdot \frac{d\vec{e}_y}{dt} + z(t) \cdot \frac{d\vec{e}_z}{dt} \\ &= \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z \\ |v| &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

#### 2. Polarkoordinaten: $(\rho, \varphi)$ 2 Dimensionen

- Zusammenhang mit  $(x, y)$ :

$$x = \rho \cdot \cos \varphi \quad y = \rho \cdot \sin \varphi$$

- Basisvektoren  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ :

- $\vec{e}_\rho$  zeigt in Richtung der Änderung von  $\vec{r}$  für  $\rho \rightarrow \rho + d\rho$
- $\vec{e}_\varphi$  zeigt in Richtung der Änderung von  $\vec{r}$  für  $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$
- Normierung:  $|\vec{e}_\rho| = |\vec{e}_\varphi| = 1$
- orthogonal:  $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0$
- ortsabhängig (genauer:  $\varphi$ -abhängig)

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi) = \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y$$

- zeitliche Änderung entlang der Bahnkurve  $(\rho(t), \varphi(t))$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (-\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y) \cdot \dot{\varphi} \\ &= \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (-\cos \varphi \cdot \vec{e}_x - \sin \varphi \cdot \vec{e}_y) \cdot \dot{\varphi} \\ &= -\vec{e}_\rho \cdot \dot{\varphi} \end{aligned}$$

- Ort:

$$\vec{r}(t) = \varrho \cdot \vec{e}_\varrho = \varrho(t) \cdot \vec{e}_\varrho(\varphi(t))$$

- Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\varrho}(t) \cdot \vec{e}_\varrho + \varrho(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

- Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\varrho}(t) \cdot \vec{e}_\varrho + 2 \cdot \dot{\varrho}(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi - \varrho(t) \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{e}_\varrho + \varrho(t) \cdot \ddot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \\ &= (\ddot{\varrho} - \varrho \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\varrho + (\varrho \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- Bsp.: Bewegung auf Kreis mit Radius R, Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

| kartesische Koordinaten  | Polarkoordinaten                                       |
|--|--|
| $x(t) = R \cdot \cos \omega t$   | $\varrho(t) = R$                                       |
| $y(t) = R \cdot \sin \omega t$   | $\varphi(t) = \omega t$                                |
| $\vec{r}(t) = R \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + R \cdot \sin \omega t \cdot \vec{e}_y$           | $\vec{r}(t) = R \cdot \vec{e}_\varrho$                 |
| $\vec{v}(t) = R \cdot \omega \cdot (-\sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \cos \omega t \cdot \vec{e}_y)$   | $\vec{v}(t) = R \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi$    |
| $\vec{a}(t) = R \cdot \omega^2 \cdot (-\cos \omega t \cdot \vec{e}_x + \sin \omega t \cdot \vec{e}_y)$ | $\vec{a}(t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_\varrho$ |

### 3. Zylinderkoordinaten: $(\varrho, \varphi, z)$

- Zusammenhang mit  $(x,y,z)$

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi \quad z = z$$

- Basisvektoren: rechtshändiges Dreibein  $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

- Ort:

$$\vec{r} = \varrho \cdot \vec{e}_\varrho + z \cdot \vec{e}_z$$

- Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \dot{\varrho} \cdot \vec{e}_\varrho + \varrho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

- Beschleunigung:

$$\vec{a} = (\ddot{\varrho} - \varrho \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\varrho + (\varrho \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

### 4. Kugelkoordinaten: $(r, \vartheta, \varphi)$

- Zusammenhang mit  $(x,y,z)$ :

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta$$

- Basisvektoren: rechtshändiges Dreibein  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

- Ort:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

- Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot (\dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)$$

- Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{e}_r \cdot (\ddot{r} - R \cdot \dot{\vartheta}^2 - R \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\vartheta \cdot (2\dot{r} \cdot \dot{\vartheta} + R \cdot \ddot{\vartheta} - R \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) \\ &\quad + \vec{e}_\varphi \cdot (2\dot{r} \cdot \sin \vartheta + 2R \cdot \dot{\vartheta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta + R \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \vartheta) \end{aligned}$$

- Volumenelement:

$$dV = dx dy dz = r^2 \cdot \cos \vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

### 1.1.4 Begleitendes Dreibein

Ist der Bahnkurve angepasst (natürliche Koordinaten)

1. Tangentenvektor  $\vec{\tau}$

- gleiche Richtung wie  $\vec{v}$ , normiert:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

2. Normalenvektor  $\vec{n}$

- senkrecht zu  $\vec{\tau}$
- Betrachte Beschleunigung mit  $v = |\vec{v}|$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) \\ &= \underbrace{\dot{v} \cdot \vec{\tau}}_{a_T} + \underbrace{v \cdot \dot{\vec{\tau}}}_{a_N} \end{aligned}$$

$a_N$  ... Beschleunigung senkrecht zur Tangente (Normalbeschleunigung)

$a_T$  ... Beschleunigung entlang Bahnkurve (Tangentialbeschleunigung)

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^2 &= 1 \\ 2\vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{\tau} &\perp \dot{\vec{\tau}} \end{aligned}$$

- Also:

$$\vec{n} := \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|}$$

- Man kann zeigen:

$$|\dot{\vec{\tau}}| = \frac{v}{R}$$

3. Binormalenvektor  $\vec{b}$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$$

### 1.1.5 Diskussion der Newtonschen Axiome

1. Es gibt Bezugssysteme, in denen sich eine kräftefreie Punktmasse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, d.h.  $\vec{v} = \text{const.}$  (Galileisches Trägheitsgesetz)

Definition: Ein solches Bezugssystem heißt Inertialsystem.

Beispiele:

- (a) Bezugssystem, dass sich mit Karussell dreht: Widerspruch!
- (b) Bezugssystem im Hörsaal: Dreht sich mit Erde, also wirken von Scheinkräften. Nur näherungsweise Inertialsystem.
- (c) Bezugssystem rel. zu Fixstern: recht genau

Bemerkungen:

- Zu einem Inertialsystem gibt es unendlich viele andere Inertialsysteme, mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit.
- Keines davon ist ausgezeichnet. (Relativitätsprinzip)

- Vollständige Kräftefreiheit ist nicht realisierbar, da Gravitationskraft langreichweitig ( $\sim \frac{1}{r^2}$ ) und nicht abschirmbar.

2. Im Inertialsystem gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Hierbei ist  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  der Impuls mit Proportionalitätskonstante träge Masse  $m$ . Es gilt oft:  $m$  zeitlich konstant.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a}$$

Bemerkungen:

- definiert träge Masse  $m$
- Experiment: Masse ist positiv und extensiv
- definiert  $\vec{F}$
- Kraft hängt ab von
  - (a) Zeit  $t$
  - (b) Ort  $\vec{r}$  (Gravitation)
  - (c) Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  (Reibung, Lorentz-Kraft)
  - (d) nicht von Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}$  oder höhere Zeitableitung

3. Es gilt:

$$F_{12} = -F_{21}$$

$F_{12}$  ... Kraft, die aufgrund des Körpers 2 auf Körper 1 wirkt.

Beispiele:

- (a) Erdanziehung
- (b) Tauziehen
- (c) Coulomb-Kraft

Gegenbeispiel: Lorentz-Kraft

Zusätze in der Mechanik:

- Kräfte, die zwei Punktmassen aufeinander ausüben, wirken in Richtung der Verbindungslinie

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = 0$$

- Kräfte addieren sich vektoriell.

## 1.2 Eindimensionale Bewegungen

- Bewegung entlang einer Geraden

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t)$$

- Aufgabenstellung:

- gegebenen  $x(t)$ , gesucht  $F(x, \dot{x}, t)$
- gegeben  $F(x, \dot{x}, t)$ , bestimme  $x(t)$ 
  1. DGL aufstellen und lösen
  2. Integrationskonstanten deuten

- Ziel:

- grundlegende physikalische Beispiele für Kraftgesetzte  $F(x)$ ,  $F(\dot{x})$ ,  $F(t)$
- grundlegende DGL und ihre Lösungen



### 1.2.1 Kräftefreie Bewegung

$$F = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

Lösung:

- DGL für  $v = \dot{x}$ :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 0 \\ \int_0^t \dot{v}(t') dt' &= 0 \\ v(t) - v(0) &= 0 \\ v(t) &= v(0) \end{aligned}$$

- Bestimmung von  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}(t') dt' &= \int_0^t v(t') dt' \\ x(t) - x(0) &= v_0 \cdot t \\ \Rightarrow x(t) &= v_0 \cdot t + x_0 \end{aligned}$$

- Deutung der Integrationskonstanten:

- Anfangsort  $x_0$
- Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

- Andere Varianten:

1. Zeit  $t_0$  mit  $x(t_0) = 0$ :

$$x(t) = v_0 \cdot (t - t_0)$$

2. Anfangsort  $x_0$ , Endort  $x(T)$

$$x(t) = x_0 + \frac{t}{T} \cdot (x(T) - x_0)$$

### 1.2.2 Bewegung im homogenen Schwerfeld

$$F = -m \cdot g \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \Rightarrow \ddot{x} = -g$$

- Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, inhomogen
- Allgemeine Lösung einer linearen inhomogenen DGL = allg. der homogenen DGL  $\ddot{x}_h = 0$  + spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $\ddot{x}_s = -g$

$$\begin{aligned} x_h &= v_0 \cdot t + x_0 \\ x_s &= -\frac{g}{2} \cdot t^2 \\ \Rightarrow x(t) &= x_h(t) + x_s(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \end{aligned}$$

### 1.2.3 Reibung

Stokesche Reibung ( $\gamma \cdot \dot{x}$ , entgegen  $\dot{x}$ )

$$\begin{aligned} F &= -\gamma \cdot \dot{x} \\ m \cdot \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, homogen

1. Lösungsweg:

- DGL für  $v = \dot{x}$

$$\dot{v} + \frac{\gamma}{m} \cdot v = 0$$

- Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}}{v} &= -\frac{\gamma}{m} \\ \int_0^t \frac{\dot{v}(t')}{v(t')} dt' &= \int_0^t -\frac{\gamma}{m} dt' \\ &= -\frac{\gamma}{m} \cdot t \end{aligned}$$

Substitution mit  $z = v(t')$ :

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{z} dz &= -\frac{\gamma}{m} \cdot t \\ \ln \frac{v(t)}{v_0} &= -\frac{\gamma}{m} \cdot t \\ \Rightarrow v(t) &= v_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t} \end{aligned}$$

- Bestimmung von  $x(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}(t') dt' &= \int_0^t v_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t'} dt' \\ x(t) - x_0 &= -\frac{m}{\gamma} \cdot v_0 \cdot (e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t} - 1) \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{m}{\gamma} \cdot v_0 \cdot (e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t} - 1) + x_0 \end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Exponentialansatz  $x = e^{\lambda \cdot t}$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{\gamma}{m} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} &= 0 \\ e^{\lambda \cdot t} \cdot (\lambda^2 + \frac{\gamma}{m} \cdot \lambda) &= 0 \\ \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 &= -\frac{\gamma}{m} \end{aligned}$$

allgemeine Lösung durch Superposition:

$$x(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t}$$

### 1.2.4 Bewegung im homogenen Schwerfeld mit Reibung

$$\begin{aligned} F &= -m \cdot g - \gamma \cdot \dot{x} \\ m \cdot \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} &= -m \cdot g \\ \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x} &= -g \end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, inhomogen

Allgemeine Lösung:

$$x = x_h + x_s$$

Physikalische Reibungskraft ist irgendwann = Schwerkraft, also keine Beschleunigung ( $\ddot{x}_s = 0$ )

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x}_s &= -g \\ x_s(t) - x_s(0) &= -\frac{m \cdot g}{\gamma} \cdot t \\ x_s(t) &= x_s(0) - \frac{m \cdot g}{\gamma} \cdot t\end{aligned}$$

mit  $x_s(0) = 0$  (kann bei spezieller Lösung beliebig gewählt werden). Also gilt:

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{\gamma} \cdot t$$

### 1.2.5 Harmonischer Oszillator

Kraft proportional zur Auslenkung:

$$\begin{aligned}F &= -k \cdot x \quad (k > 0) \\ \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x &= 0\end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, homogen

Exponentialansatz:  $x = e^{\lambda \cdot t}$

$$\begin{aligned}e^{\lambda \cdot t} \cdot \left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1/2} &= \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \cdot \omega_0 \\ x(t) &= c_1 \cdot e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \\ x(t) &= b_1 \cdot \sin \omega_0 t + b_2 \cdot \cos \omega_0 t \quad (b_1, b_2 \in \mathbb{R}) \\ x(t) &= A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (A, \varphi \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Charakteristikum des Harmonischen Oszillators: Frequenz  $\omega_0$  ist unabhängig von Amplitude A; lösbar (auch in Quantenmechanik); untypisch, aber oft gute Näherung

### 1.2.6 Harmonischer Oszillator mit Reibung

$$\begin{aligned}F &= -k \cdot x - \gamma \cdot \dot{x} \\ \ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{2r} \cdot \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} \cdot x &= 0 \\ \ddot{x} + 2r \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x &= 0\end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, homogen (r: Dämpfungskonstante)

Exponentialansatz:  $x = e^{\lambda t}$ :

$$\begin{aligned}e^{\lambda t} \cdot (\lambda^2 + 2r \cdot \lambda + \omega_0^2) &= 0 \\ \lambda_{1/2} &= -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1.  $r > \omega_0$ : starke Dämpfung

$$\begin{aligned}\lambda_1 / \lambda_2 &< 0 \\ x(t) &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

max. 1 Nulldurchgang

2.  $r < \omega_0$ : schwache Dämpfung

$$\lambda_{1/2} = -r \pm i\sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

$$x(t) = A \cdot e^{-rt} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \varphi)$$

verkleinerte Frequenz  $\sqrt{\omega_0^2 - r^2} < \omega$

3.  $r = \omega_0$ : aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -r$$

$$x(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) \cdot e^{-rt}$$

qualitativ ähnlich zu 1., max. 1 Nulldurchgang

### 1.2.7 Harmonischer Oszillator mit Reibung und Antrieb

$$F = k \cdot x - \gamma \cdot \dot{x} + k \cdot A_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{2r} \cdot \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} \cdot x = \frac{k}{m} \cdot A_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

$$\ddot{x} + 2r \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 A_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, inhomogen

1. homogene Lösung: siehe 1.2.6
2. spezielle Lösung: Ansatz einer erzwungenen Schwingung mit Frequenz  $\omega_E$  des Antriebs (A... Amplitude,  $\eta$ ... Phasenverschiebung)

$$x_s(t) = A \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \eta)$$

Einsetzen in DGL. (Übung 3.4)

$$\eta = \arctan \frac{2r \cdot \omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

$$A = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4r^2 \cdot \omega_E^2}} \cdot A_E$$

3. allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = x_h(t) + A \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \eta)$$

Bemerkungen:

- homogene Lösung beschreibt Einschwingvorgang
- Amplitude  $A = A(A_E, \omega_E, r, \omega_0)$
- maximale Amplitude bei  $\omega_R$ :

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2r^2} < \omega_0$$

für  $r < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

- Grenzfall  $r \ll \omega_0$ , dann  $\omega_R \approx \omega_0$ , also  $A \rightarrow \infty$  (Resonanzkatastrophe)
- Getriebene 1D-Systeme i.A. nicht lösbar

### 1.2.8 Allgemeine zeitabhängige Kraft

$$m \cdot \ddot{x} = F(t) \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F(t)}{m}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, linear, inhomogen

1. allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ x_h(t) &= x_0 + v_0 \cdot t \end{aligned}$$

2. spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$x_s = \int_0^t dt' \int_0^{t'} \frac{F(t'')}{m} dt''$$

3. allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} \frac{F(t'')}{m} dt''$$

### 1.2.9 Allgemeine geschwindigkeitsabhängige Kraft

$$\begin{aligned} F &= F(\dot{x}) \cdot f(t) \\ m \cdot \ddot{x} &= F(\dot{x}) \cdot f(t) \\ \ddot{x} - \frac{F(\dot{x}) \cdot f(t)}{m} &= 0 \end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, i.A. nicht linear, homogen

Lösung:

- DGL für  $v = \dot{x}$

$$\dot{v} = \frac{F(v) \cdot f(t)}{m}$$

- Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}}{F(v)} &= \frac{f(t)}{m} \\ \int_0^t dt' \frac{\dot{v}}{F(v)} &= \int_0^t \frac{f(t')}{m} dt' \end{aligned}$$

Substitution:  $z = v(t')$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dz}{F(z)} = \int_0^t dt' \frac{f(t')}{m}$$

nach Integration:  $v(t)$  (zunächst implizit  $g(v(t)) = h(t)$ )

Beispiel:  $F = -\gamma \cdot \dot{x}$  (Reibung 1.2.3)

### 1.2.10 Allgemeine ortsabhängige Kraft

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= F(x) \\ \ddot{x} - \frac{F(x)}{m} &= 0 \end{aligned}$$

Charakterisierung: DGL 2. Ordnung, i.A. nicht-linear, homogen

Lösung:

- Energiemethode (Multiplikation mit  $\dot{x}$ )

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} = F(x) \cdot \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2 \right) = -\frac{d}{dt} U(x)$$

mit

$$U(x) = - \int^{x(t)} F(x') dx'$$

Bemerkung: Untere Grenze in Definition von U beliebig wählbar.

Integration:

$$\frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2 = -U(x) + E$$

Bemerkung: E ist Integrationskonstante (enthält Beliebigkeit in Definition von U(x))

$$\dot{x} = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(x))}}_{f(x)}$$

Fall 1:  $\dot{x} \geq 0$ , Trennung der Variablen:

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$$

$$\frac{dx}{f(x)} = dt$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(x))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

$$\Rightarrow t = t(x)$$

Durch Umkehrung erhält man  $x = x(t)$ .

Bemerkungen:

- Das Integral muss ggf. numerisch ausgewertet werden.
- Wahl der Integrationskonstanten  $E, x(t_0)$  beliebig
- später:  $U(x)$  Potential der Kraft  $F(x)$ ,  $E$  Energie der Punktmasse - bis auf additive Konstante definiert

Definition: Phasenraum  $(p, x)$  mit Impuls  $p = m \cdot v = m \cdot \dot{x}$

$$p = \pm \sqrt{2m \cdot (E - U(x))}$$

Qualitative Diskussion der Dynamik:

1. Harmonischer Oszillator (lineare Kraft)

$$F = -k \cdot x$$

$$U(x) = - \int^x (-k \cdot x') dx' = \frac{k}{2} \cdot x^2 + c_1$$

mit  $c_1 = 0$ . Es folgt:

$$\frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2 = E - \frac{k}{2} \cdot x^2$$

Charakterisierung der Bewegung:

- Bei gegebenen  $E = E_1$  findet Bewegung im Bereich  $[-x_1, x_1]$  statt mit

$$\frac{k}{2}x_1^2 = E_1$$

- Umkehrpunkte: Orte mit  $\dot{x} = 0$ , hier  $x_1, -x_1$
- Differenz  $E - \frac{k}{2}x^2$  bestimmt Geschwindigkeit
- Phasenraum:

$$\frac{1}{2m} \cdot p^2 + \frac{k}{2} \cdot x^2 = E$$

(Ellipsengleichung)

- Periodendauer:

$$T = 2 \cdot \int_{t(-x_1)}^{t(x_1)} dt'$$

Substitution  $x = x(t')$

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-x_1}^{x_1} \frac{dx}{\dot{x}} \\ &= 2 \cdot \int_{-x_1}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_1 - U(x))}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot E_1}} \cdot \int_{-x_1}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E_1} \cdot x^2}} \end{aligned}$$

Substitution  $z = \sqrt{\frac{k}{2E_1}} \cdot x$  mit  $z(x_1) = 1$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot E_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2E_1}}} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{w_0} \end{aligned}$$

unabhängig von  $E_1$

## 2. harmonische Kraft

$$\begin{aligned} F &= F_0 \cdot \sin kx \\ U(x) &= - \int^x (F_0 \cdot \sin(k \cdot x')) dx' \\ &= \frac{F_0}{k} \cdot \cos kx + c_1 \quad (c_1 = 0) \end{aligned}$$

- $-E_{\max} \leq E \leq E_{\max}$ : gebundene Bewegung
- $E > E_{\max}$ : ungebundene Bewegung
- $E = E_{\max}$ : Separatrix,  $T = \infty$

Äquivalenz zum Pendel:

$$\begin{aligned} \vec{F}_G &= F_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho + F_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ F_\varphi &= -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (\varphi \hat{=} k \cdot x + \phi) \end{aligned}$$

### 1.2.11 Pendel mit Antrieb

$$F = -F_0 \cdot \sin \varphi + A \cdot \sin \omega t$$

### 1.3 Erhaltungssätze

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\
 \Leftrightarrow m \cdot \ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\
 m \cdot \ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\
 m \cdot \ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- 3 gekoppelte DGL 2. Ordnung, i.A. nicht analytisch lösbar
- Für spezielle, aber häufig vorkommende Kräfte gibt es Erhaltungssätze, die vollständig oder teilweise analytische Lösung der DGL ermöglichen.

#### 1.3.1 Impuls

Impulssatz:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

Impulserhaltungssatz:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0, \vec{p} = \text{const.} \Leftrightarrow \vec{F} = 0$$

Bahnkurve: Punktmasse bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden.

#### 1.3.2 Drehimpuls

- Drehmoment:

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$$

- Bemerkungen:

- Auswirkung der Kraft  $F$  bei  $\vec{r}$  auf Drehung um Ursprung
- Vektor senkrecht zu  $\vec{r}, \vec{F}$
- hängt von der Wahl des Ursprungs ab

- Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- Bemerkungen:

- Betrag beschreibt Impuls am Ort  $\vec{r}$  bzgl. Drehung um Ursprung
- Vektor senkrecht zu  $\vec{r}, \vec{p}$
- hängt von der Wahl des Ursprungs ab

- Drehimpulssatz:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \\
 &= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\
 &= m \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= \vec{M}
 \end{aligned}$$



- Drehimpulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} = 0, \vec{L} = \text{const.} &\Leftrightarrow \vec{M} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{F} \parallel \vec{r} \end{aligned}$$

- Zentralkraft: Kraft, für die  $\vec{F} \parallel \vec{r}$  gilt. Allgemeinste Zentralkraft:  $\vec{F} = \vec{e}_r \cdot f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
- Folgerung: In einem Zentralkraftfeld gilt immer Drehimpulserhaltung. (Bsp.: Coulomb-Kraft, Gravitationskraft)
- Bahnkurve:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \quad | \cdot \vec{r} \\ \vec{r} \cdot \vec{L} &= \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \\ \Leftrightarrow x \cdot L_x + y \cdot L_y + z \cdot L_z &= 0 \end{aligned}$$

(Ebenengleichung)

- Folgerung: Drehimpulserhaltung  $\Leftrightarrow \vec{L} = \text{const.} \Leftrightarrow L_x, L_y, L_z$  konstant  $\Rightarrow$  Bewegung in einer Ebene durch Ursprung  $\perp$  zu  $\vec{L}$

Gilt die Umkehrung auch? I.A. nicht!

- Flächensatz:  $\vec{L} = \text{const.} \Leftrightarrow$  Der Fahrstrahl überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.

Beweis:

- Flächenstück:

$$|d\vec{A}| = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt| \cdot \frac{1}{2}$$

zeitliche Änderung:

$$\left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2m} \cdot |\vec{r} \times \vec{p}| = \text{const.}$$

### 1.3.3 Energie

(Beschränkung auf nicht explizit zeitabhängige Kräfte  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ )

- Arbeit

$$W := \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

abhängig von:

- Feld  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$
- Anfangs-/Endpunkt  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$
- Weg C
- Geschwindigkeit, mit der C durchlaufen wird

Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= y \cdot \vec{e}_x \\ W_C &= \int_C \vec{F} d\vec{r} = 0 \\ W_B &= \int_B \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_0^b \vec{e}_y \cdot y \cdot \vec{e}_x dy + \int_0^a \vec{e}_x \cdot y \cdot \vec{e}_x dx + \int_b^0 \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x \cdot y dy \\ &= a \cdot b \\ W_A &< 0 \end{aligned}$$

- Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Folgerung:

$$P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} T$$

- Kinetische Energie:

$$T := \frac{m}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2$$

- Konservative Kraft :  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$  heißt konservativ, falls ortsabhängige Funktion  $U(\vec{r})$  existiert mit

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

- Dissipative Kraft: Anteil  $\vec{F}_{Diss}$  der Kraft  $\vec{F} = \vec{F}_{kons} + \vec{F}_{diss}$ , der nicht konservativ ist.
- Potential oder potentielle Energie zu einer konservativen kraft:  $U(\vec{r})$  mit:

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = (\vec{F}_{Diss} + \vec{F}_{kons}) \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{F}_{diss} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{F}_{kons} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) + \vec{F}_{diss} \cdot \dot{\vec{r}} \\ \frac{d}{dt} (T + U) &= \vec{F}_{diss} \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

- Energie:

$$E = T + U = \frac{m}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

Energiesatz:

$$\frac{d}{dt} E = \vec{F}_{diss} \cdot \dot{\vec{r}}$$

zeitliche Änderung der Energie = Leistung der dissipativen Kräfte

- Energieerhaltungssatz:

$$\frac{d}{dt} E = 0; E = \text{const.} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{F}_{kons}$$

Energieerhaltung, falls nur konservative Kräfte wirken

- Bemerkung: E beschreibt nur mechanische Energie. Dissipative Kräfte wandeln diese z.B. in Wärmeenergie um.

### Einschub: Gradient:

- gegeben: Skalarfeld  $\varphi(\vec{r})$
- gesucht: Stärke und Richtung des steilsten Anstieges bei Punkt  $\vec{r}$

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi(\vec{r}) &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \varphi(\vec{r}) \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_i \end{aligned}$$

- Bemerkungen:

- grad  $\varphi$  steht senkrecht auf Linien mit  $\varphi = \text{const.}$
- koordinatenunabhängige Definition: Wähle beliebige Richtung  $d\vec{r}$ :

$$\frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \text{grad } \varphi := \lim_{|d\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r})}{|d\vec{r}|}$$

Komponente in  $d\vec{r}$

### Einschub: Rotation:

- gegeben: Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r})$
- gesucht: Wirbelstärke und Wirbeldrehachse an Ort  $\vec{r}$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) := \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(\vec{r}) \\ E_y(\vec{r}) \\ E_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

- koordinatenunabhängige Definition: Wähle bel. kleine eben Fläche mit der Flächennormale  $\vec{n}$  mit  $\|\vec{n}\| = 1$ , Randkurve C, Fläche A. (Rechtsschraubenregel liefert Orientierung von  $\vec{n}$  und C)

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) := \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \cdot \underbrace{\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{\text{Zirkulation}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Wirbelstärke}}$$

Komponente in Richtung  $\vec{n}$

### Satz von Stokes:

$$\iint d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

für  $C^1$ -einfach geschlossene Wege.

Bemerkung:

- Flächenintegral der Rotation = Zirkulation von  $\vec{E}$  entlang Rand C
- gilt für beliebige orientierbare Flächen A

### 1.3.4 Allgemeine konservative Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} &= -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) \\ &= -\frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) \\ &= -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right) \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -\text{grad } U \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

für alle  $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{\text{kons}}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -\text{grad } U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit beliebigem Vektorfeld  $\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ .

Bemerkung:

- Konservative Kraft ist i.A. orts-, geschwindigkeits- und zeitabhängig. Bsp.: Lorentzkraft

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

- Spezialfall: ortsabhängige konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r})$$

### 1.3.5 Ortsabhängige konservative Kräfte

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $\vec{F}$  ist konservativ, d.h.  $\exists U(\vec{r})$  mit  $\frac{d}{dt}U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$
2.  $\exists U(\vec{r})$  mit  $\vec{F} = -\text{grad } U(\vec{r})$
3.  $\text{rot } \vec{F} = 0$
4.  $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$  für alle geschlossenen Wege C
5.  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  ist unabhängig vom Weg C

Beweis:

- 1)  $\Leftrightarrow$  2): siehe Abschnitt 1.3.4
- 2)  $\Rightarrow$  3):
  - $U(x,y,z)$  ist Funktion mehrere Veränderlicher
  - 2. gemischte Ableitungen vertauschen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \Leftrightarrow (\text{rot } \vec{F})_z &= 0 \end{aligned}$$

- gleiche Methode auf andere gemischte Ableitungen ergibt:

$$(\text{rot } \vec{F}) = 0$$

- 3)  $\Rightarrow$  4)

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \stackrel{\text{Stokes}}{\Rightarrow} \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

für beliebige C

- 4)  $\Rightarrow$  3)
  - $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$  für beliebige Wege C. Wähle beliebig kleine ebene Flächen mit Normale  $\vec{n}$  bei Ort  $\vec{r}$ . Dann nach Definition:  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{F} = 0$  mit  $\vec{n}, \vec{r}$  beliebig. Also  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .
- 4)  $\Rightarrow$  5)
  - Wähle Punkte  $r_1, r_2$  und beliebige Wege  $C_1, C_2$ . Dann existiert ein geschlossener Weg  $C = C_1 \cup (-C_2)$

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} \end{aligned}$$

- 5)  $\Rightarrow$  4)

– Wähle beliebige geschlossene Kurve  $C$ . Es existieren  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  auf  $C$ , zwei Wege  $C_1, C_2$  mit  $C_1 \cup (-C_2) = C$ . Also:

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

- 5)  $\Rightarrow$  2): siehe *Analysis 3, Jürgen Voigt (Satz 3.1)*

### 1.3.6 Virialsatz

- Ziel: Aussage zu zeitlichem Mittelwert von  $T$  und  $U$
- Betrachtung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2} \dot{\vec{p}} \cdot \vec{r} \\ &= -\frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

- zeitliche Mittelung:

$$\bar{f} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t') dt'$$

Angewendet auf kinetische Energie:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \vec{p} \cdot \vec{r} \right)}_{[\vec{p} \cdot \vec{r}]_0^T} dt - \frac{1}{2} \cdot \overline{\vec{F} \cdot \vec{r}}$$

Annahme:  $|\vec{p}(t)|$  und  $|\vec{r}(t)|$  beschränkt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\vec{p} \cdot \vec{r}]_0^T = 0$$

- Virialsatz:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\vec{F} \cdot \vec{r}}$$

- Für eine homogene Funktion vom Grad  $k$  gilt:

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha^k \cdot f(x)$$

Eulersche Gleichung:

$$x \cdot \frac{df}{dx} = k \cdot f(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} f(\alpha x) &= \frac{df}{d(\alpha x)} \cdot \frac{d(\alpha x)}{d\alpha} \\ \frac{d}{d\alpha} (\alpha^k f(x)) &= k \cdot \alpha^{k-1} \cdot f(x) \\ \alpha = 1 : f' \cdot x &= k \cdot f(x) \end{aligned}$$

- Annahme:

1. ortsabhängige konservative Kraft  $\vec{F} = -\text{grad } U(\vec{r})$

2. Potential  $U(\vec{r})$  sei eine homogene Funktion vom Grad  $k$ , d.h.  $U(\alpha \cdot \vec{r}) = \alpha^k \cdot U(\vec{r})$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} -\vec{F} \cdot \vec{r} &= \vec{r} \cdot \text{grad } U(\vec{r}) = k \cdot U(\vec{r}) \\ \bar{T} &= \frac{k}{2} \cdot \overline{U(\vec{r})} \end{aligned}$$

• Beispiele:

1. Harmonischer Oszillator:

$$\begin{aligned} U(x) &= c \cdot x^2 \quad (k = 2) \\ \Rightarrow \bar{T} &= \bar{U} \\ E &= \bar{T} + \bar{U} = 2 \cdot \bar{T} = 2 \cdot \bar{U} \end{aligned}$$

2. Gravitation, Coulomb

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{c}{x} \quad (k = -1) \\ \bar{T} &= -\frac{1}{2} \bar{U} \\ E &= \bar{T} + \bar{U} = \frac{1}{2} \cdot \bar{U} = -\bar{T} < 0 \end{aligned}$$

## 1.4 Planetenbewegung

Masse  $M$  sei fixiert im Ursprung. Masse  $m$  bewegt sich unter Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Allgemeiner: Kugelsymmetrische Zentralkraft:

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r}$$

### 1.4.1 Kugelsymmetrische Zentralkraft

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r}$$

• Erhaltungssätze:

- Impuls: -
- Drehimpuls: ✓
- Energie: ✓, da  $\text{rot } \vec{F} = 0$

also konservatives Zentralkraftfeld

• Potential:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= - \int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}' \\ &= - \int^{\vec{r}} f(|\vec{r}'|) \cdot \vec{r}' \cdot d\vec{r}' \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} r' \cdot dr' & \text{für } d\vec{r}' \parallel \vec{r}' \\ 0 & \text{für } d\vec{r}' \perp \vec{r}' \end{cases}$$

Also:

$$U(\vec{r}) = - \int^r f(r') \cdot r' \cdot dr'$$

speziell Gravitation:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \\ U(r) &= \int_{\infty}^r (-\gamma \cdot m \cdot M) \cdot \frac{1}{r'^3} \cdot r' dr' \quad (U(\infty) = 0) \\ &= \gamma \cdot m \cdot M \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r \\ &= -\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r} \end{aligned}$$

- Ziel: Bahnkurve

- Drehimpulserhaltung, Richtung: Wähle o.B.d.A.  $\vec{L} = L \cdot \vec{e}_z$ , also Bahnkurve in x-y-Ebene durch Ursprung. Wähle Polarkoordinaten  $(\varrho, \varphi)$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \varrho \cdot \vec{e}_{\varrho} \\ \vec{v} &= \dot{\varrho} \cdot \vec{e}_{\varrho} + \dot{\varphi} \cdot \varrho \cdot \vec{e}_{\varphi} \end{aligned}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2 + U \\ &= \frac{m}{2} \cdot (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \cdot \dot{\varphi}^2) + U(\varrho) \end{aligned}$$

- Drehimpulserhaltung, Betrag:

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= |\vec{r} \times \vec{p}| = m \cdot |\vec{r} \times \vec{v}| \\ &= m \cdot \varrho^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \underbrace{|\vec{e}_{\varrho} \times \vec{e}_{\varphi}|}_{|\vec{e}_z|=1} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} &= \frac{|\vec{L}|}{m \cdot \varrho^2} \end{aligned}$$

- Betrachte  $\varrho(t)$ : Eliminiere  $\varphi$  in Gleichung für Energie

$$E = \frac{m}{2} \cdot \dot{\varrho}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2 \cdot m \cdot \varrho^2}}_{U_{eff}} + U(\varrho)$$

Effektives 1D-Potential  $U_{eff}(\varrho)$  für 3D-Problem.

Integration der DGL mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}^2 &= \frac{2}{m} \cdot (E - U_{eff}(\varrho)) \\ \Rightarrow t - t_0 &= \int_{\varrho(t_0)}^{\varrho(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U_{eff}(\varrho))}} \\ \Rightarrow t(\varrho) &\Rightarrow \varrho(t) \end{aligned}$$

- Betrachte  $\varphi(t)$ : Trennung der Variablen:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{|\vec{L}|}{m \cdot \varrho^2} dt'$$

Substitution  $t = \varrho(t')$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varrho(t_0)}^{\varrho(t)} \frac{dr \cdot \frac{|\vec{L}|}{m \cdot r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U_{eff})}}$$

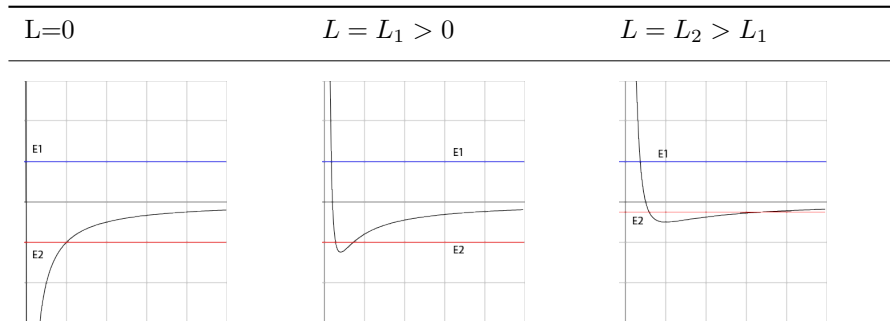
## 1.4.2 Qualitative Diskussion der Bewegung im effektiven Potential

Beispiel Gravitation

$$U(\varrho) = -\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{\varrho}$$

$$U_{eff}(\varrho) = \frac{L^2}{2 \cdot m \cdot \varrho^2} - \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{\varrho}$$

Betrachte 1D-Radialbewegung bei Energieerhaltung  $T + U_{eff} = E$



- Charakterisierung der Bewegung:

1.  $E \geq 0$ : ungebunden:

- Für  $L > 0$  kann das Teilchen nicht zum Ursprung gelangen (Drehimpulsbarriere).
- Für größeres  $L$  weiter weg vom Ursprung

2.  $E < 0$ : gebunden:

- Für  $L > 0$  Schwingung in  $\varrho$  zwischen den Umkehrpunkten  $\varrho_{min}$  und  $\varrho_{max}$ .
- Für größeres  $L$ : Schwingung weiter vom Ursprung entfernt und kleinerer Bereich  $E < 0$

3.  $E = E_{min}$ : nur bei  $L > 0$

- $\varrho = \text{const.}$ , also Kreisbahn (stabil)

- Konsequenzen für Satellit:

- sollte niemals Erde treffen, also  $\varrho_{min} > R_{Erde}$ . Mindestgeschwindigkeit: 1. kosmische Geschwindigkeit (7,9km/s)
- Mindestgeschwindigkeit an Erdoberfläche um  $\varrho = \infty$  zu erreichen:

$$E = 0 = T + U_{eff}(R_{Erde})$$

2. kosmische Geschwindigkeit (11,2km/s)

- Bahnkurve  $\varrho, \varphi$ :

- $E > 0$ : Hyperbel
- $E = 0$ : Parabel
- $E < 0$ : Ellipse
- $E = E_{min}$ : Kreis



### 1.4.3 Gravitation: Bahnkurven sind Kegelschnitte

$$U(r) = -\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}$$

einsetzen und berechnen der Integrale von 1.4.1

Alternativweg: Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} \cdot \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2 \cdot m \cdot \varrho^2} - \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{\varrho} = E$$

- neue Variable  $s = \varrho^{-1}$

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{s(\varphi)} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{s(\varphi)} \right) \cdot \dot{\varphi} \\ &= -s' \cdot \varrho^2 \cdot \dot{\varphi} \\ &= -\frac{L}{m} \cdot s' \end{aligned}$$

- Einsetzen liefert nichtlineare DGL 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2m} \cdot s'^2 + \frac{L^2}{2m} \cdot s^2 - \gamma \cdot m \cdot M \cdot s &= E \\ s'^2 + s^2 &= \frac{2m}{L} \cdot (E + \gamma \cdot m \cdot M \cdot s) \end{aligned}$$

- Anwenden von  $\frac{1}{2s'} \cdot \frac{d}{d\varphi}$ :

$$s'' + s = \frac{\gamma \cdot m^2 \cdot M}{L^2}$$

lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

- Allgemeine Lösung:

$$s(\varphi) = A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \varphi + \frac{\gamma \cdot m^2 \cdot M}{L^2}$$

- Wähle  $\varrho(\varphi = 0) = \varrho_{min}$ . Also  $s(\varphi = 0)$  ist maximal. Dann:  $A = 0, B > 0$ .
- Definiere

$$\begin{aligned} k &:= \frac{L^2}{\gamma \cdot M \cdot m^2} \\ \varepsilon &= B \cdot k \end{aligned}$$

- Dann:

$$\varrho(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

(Polargleichung der Kegelschnitte bzgl. der Brennpunkte)

- Exzentrizität

- $\varepsilon = 0$ : Kreis
- $0 < \varepsilon < 1$ : Ellipse
- $\varepsilon = 1$ : Parabel
- $\varepsilon > 1$ : Hyperbel

### 1.4.4 Keplersche Gesetze

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Beweis: 1.4.3)
2. In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl Sonne-Planet die gleiche Fläche. (Beweis: Flächensatz)
3. Für alle Planeten:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} = \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot M}$$

(T... Umlaufzeit a... große Halbachse)

Beweis: Flächensatz:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2m} &= \frac{dA}{dt} = \text{const.} \\ &= \frac{A_{\text{Ellipse}}}{T} = \frac{\pi \cdot ab}{T} \\ \Rightarrow T &= \frac{2\pi \cdot ab \cdot m}{L} \\ a &= \frac{k}{1 - \varepsilon^2} \quad b = \frac{k}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot M} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Aus KEPLERSchen Gesetzen lässt sich das Kraftgesetz  $\vec{F} \propto -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$
- Bisher nur ein Körper, da Masse M fest. Zweikörperproblem:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot (m + M)}$$

### 1.5 Galilei-Transformation

- Gegeben sei ein Inertialsystem, d.h. nach 1. NEWTONSchen Axiom gilt bei Kräftefreiheit  $\ddot{\vec{r}} = 0$ , und kartesisches Koordinatensystem KS.
- Ereignis  $(x_1, x_2, x_3, t)$   
Gleiches Ereignis hat in IS' die Koordinaten  $x'_1, x'_2, x'_3, t'$ .
- GALILEI-Transformation beschreibt den Zusammenhang der Koordinaten des gleichen Ereignisses in IS und IS'.
- Spezielle GALILEI-Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= x - v \cdot t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

- Allgemeine GALILEI-Transformation:

$$\begin{aligned} x'_i &= \underbrace{\alpha_{ij} \cdot x_j}_1 - \underbrace{v_i \cdot t - x_{0,i}}_2 \\ t' &= \underbrace{t - t_0}_3 \end{aligned}$$

1: Drehung der KS    2: räumliche Verschiebung    3: zeitliche Verschiebung

orthogonale Matrizen  $\alpha$  mit  $\alpha \cdot \alpha^T = E$

- Bemerkungen:
  - Dies ist die allgemeinste Transformation zwischen zwei Inertialsystemen.
  - Hintereinanderausführung ergibt wieder GALILEI-Transformation (GALILEI-Gruppe)
- Herleitung 2. Axiom in IS'

$$\begin{aligned}
 IS : m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \\
 m \cdot \ddot{x}_i &= F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\
 IS' : m \cdot \ddot{x}'_i &= m \cdot \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} \\
 &= m \cdot \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \quad \left( \frac{dt'}{dt} = 1 \right) \\
 &= \alpha_{ij} \cdot m \cdot \underbrace{\frac{d^2 x_j}{dt^2}}_{F_j} \\
 &= F'_i(x'_1, x'_2, x'_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3, t') \\
 \Rightarrow m \cdot \ddot{\vec{r}}' &= \vec{F}'
 \end{aligned}$$

- Bemerkungen:
  - NEWTONsche Axiome sind unter GALILEI-Transformation kovariant. (forminvariant)
  - $\frac{dt'}{dt} = 1 \Rightarrow$  Uhren gehen in verschiedenen IS gleich schnell für  $v \ll c$

## 1.6 Beschleunigte Bezugssysteme

### 1.6.1 Linear beschleunigte Bezugssysteme

- Gegeben sei ein Inertialsystem IS mit Koordinatensystem KS sowie beschleunigtes Koordinatensystem KS' mit  $t'=t$ .

$$\vec{r}(t) = \vec{d}(t) + \vec{r}'(t)$$

$\vec{d}(t)$ ... Abstandsvektor von Ursprung zu Ursprung

- IS sei kräftefrei:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{\vec{r}} &= 0 \\
 \Rightarrow m \cdot \ddot{\vec{r}}' &= -m \cdot \ddot{\vec{d}} = -m \cdot \vec{a}
 \end{aligned}$$

für z.B.  $\vec{d}(t) = \frac{t^2}{2} \cdot \vec{a}$

Trägheitskraft in KS', also Bewegung in KS' nicht kräftefrei, daher kein IS

### 1.6.2 Rotierendes Bezugssystem

- Inertialsystem und Koordinatensystem KS' haben den gleichen Ursprung.

$$\vec{r}' = \vec{r} \quad t' = t$$

- KS' drehe sich um z-Achse mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$

$$z' = z$$

- Ortsvektor:

$$\vec{r} = x_i \cdot \vec{e}_i = x'_i(t) \cdot \vec{e}'_i(t) = \vec{r}'$$

- Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{x}_i(t) \cdot \vec{e}_i \\ &= \dot{x}'_i(t) \cdot \vec{e}'_i(t) + x'_i(t) \cdot \dot{\vec{e}}'_i(t) \\ &= \dot{x}'_i(t) \cdot \vec{e}'_i(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

(Geschwindigkeit IS = Geschwindigkeit KS' + Korrektur wegen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ )

Beweis:

$$\begin{aligned} d\vec{e}'_x &= e'_y d\varphi = \vec{e}_z \times e'_x d\varphi \\ d\vec{e}'_y &= -e'_x d\varphi = \vec{e}_z \times e'_y d\varphi \\ d\vec{e}'_z &= 0 = \vec{e}_z \times e'_z d\varphi \\ \Rightarrow x'_i \cdot \dot{\vec{e}}'_i &= x'_i \frac{d}{dt} \vec{e}'_i \\ &= x'_i \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z \times \vec{e}'_i \\ &= \vec{\omega} \times (x'_i \cdot \vec{e}'_i) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Schreibweise:

$$\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{IS} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Operatorgleichung:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times$$

anwendbar auf beliebige Vektoren

- Beschleunigung: Operatorgleichung auf Geschwindigkeit anwenden

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \left( \left( \frac{d}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \right) \left[ \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \\ &= \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{KS'} + \left( \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_{KS'} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{KS'} \vec{\omega} \times \vec{r} = \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{KS'} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'}$$

Damit:

$$\left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{IS} = \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{KS'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Abkürzung:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &:= \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS'} \neq \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \\ \vec{a}' &:= \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{KS'} \neq \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &= \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichung:

$$IS: m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$KS': m \cdot \vec{a}' = \vec{F} - \underbrace{m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_1 - \underbrace{2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'}_2 - \underbrace{m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_3$$

Trägheitskräfte:

1. Zentrifugalkraft (1):  $\propto |\vec{\omega}|^2, \perp \vec{\omega}$ , außen
2. Corioliskraft (2):  $\propto |\vec{\omega}|, \propto |\vec{v}'|, \perp \vec{\omega}, \perp \vec{v}'$
3. namenslos (3):  $\perp \dot{\vec{\omega}}$

Beispiele: Karussell, Wetter, Foucaultsches Pendel

- Bemerkung: Newtonsche Axiome gelten nicht im beschleunigten Koordinatensystem  $KS'$ , da Trägheitskräfte wirken.

## 1.7 System von Punktmassen

- N Punktmassen: Masse  $m_i$  (zeitunabhängig), Ort  $\vec{r}_i$ , Kräfte  $\vec{F}_i$  und  $m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$
- Äußere Kraft  $\vec{F}_i^{(a)}$ : Kraft, die von außen auf das i-te Teilchen wirkt
- Abgeschlossenes System:  $\vec{F}_i^{(a)} = 0$  für alle i
- Innere Kraft  $\vec{F}_i^{(i)}$ : Kraft, die durch andere Punktmassen auf i-tes Teilchen wirkt.
- Zweikörperkraft  $\vec{F}_{ij}$ : Kraft, die durch Punktmasse j auf Punktmasse i wirkt.

Nach 3. NEWTONschen Axiom:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Damit:

$$m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$$= \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$$

3N gekoppelte DGL 2. Ordnung, i.A. nicht analytisch lösbar  $\Rightarrow$  numerische Integration, allgemeine Erhaltungssätze

### 1.7.1 Impuls

$$\sum_i m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_i \sum_{j, j \neq i} \vec{F}_{ij}}_0$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^{(a)}$$

- Gesamtmasse:  $M = \sum_i m_i$
- Schwerpunkt:

$$\vec{R} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

Gesamtimpuls:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = M \cdot \dot{\vec{R}}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = M \cdot \ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^{(a)}$$

(Impuls-/Schwerpunktsatz)

• Bemerkungen:

- Schwerpunkt bewegt sich, als ob in ihm die gesamte Masse vereint wäre und alle äußeren Kräfte auf den Schwerpunkt einwirken.  $\Rightarrow$  Rechtfertigung des Begriffs Punktmasse
- Innere Kräfte haben keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes.
- Erhaltung des Gesamtimpuls  $\Leftrightarrow \sum \vec{F}_i^{(a)} = 0$ , z.B. abgeschlossenes System.

### 1.7.2 Drehimpuls

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i,j,i < j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j,i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_0$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)}$$

(Drehimpulssatz)

Bemerkungen:

- Änderung des Gesamtdrehimpulses = Summe der Drehmomente der äußeren Kräfte
- Innere Kräfte haben keinen Einfluss auf  $\vec{L}$ .
- Erhaltung des Gesamtdrehimpulses  $\Leftrightarrow \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} = 0$ , z.B. abgeschlossenes System oder nur Zentralkräfte.

### 1.7.3 Energie

$$\sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Aufteilung in konservative und dissipative Kräfte:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{i,kons} \cdot \dot{\vec{r}}_i &= -\frac{d}{dt}U \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) &= \sum_i F_{i,diss} \cdot \dot{\vec{r}}_i\end{aligned}$$

(Energiesatz)

Bemerkung:

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_n} \cdot \frac{dz_n}{dt}}_{(\nabla_1 U) \cdot (\dot{\vec{r}}_1)} \\ &= \sum_i (\nabla_i U) \cdot \dot{\vec{r}}_i\end{aligned}$$

- oftmals:

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i,j,i \neq j} U_{ij} \cdot (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

#### 1.7.4 Schwerpunktsystem

- Schwerpunkt  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i$$

- Koordinate im Schwerpunktsystem:

$$\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{R}$$

- Bemerkung: i.A. ist Schwerpunktsystem kein Inertialsystem
- Schwerpunkt im Schwerpunktsystem:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{s}_i &= \sum_i \frac{m_i}{M} (\vec{r}_i - \vec{R}) \\ &= \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i - \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{R} = 0\end{aligned}$$

- Impuls im Schwerpunktsystem:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ss} &= \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{s}}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \cdot \vec{s}_i \right) = 0\end{aligned}$$

Gesamtimpuls:

$$\vec{P} = \underbrace{\vec{P}_s}_{M \cdot \dot{\vec{R}}} + \underbrace{\vec{P}_{ss}}_0$$

- Drehimpuls im Schwerpunktsystem:

$$\vec{L}_{ss} = \sum_i \vec{s}_i \times m_i \cdot \dot{\vec{s}}_i$$

Behauptung: Drehimpulssatz gilt auch für Koordinaten im Schwerpunktsystem

Beweis:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(i)} \\
 \sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \\
 \sum_i (\vec{R} + \vec{s}_i) \times m_i \cdot (\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{s}}_i) &= \sum_i (\vec{R} + \vec{s}_i) \times \vec{F}_i^{(a)} \\
 \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i + \vec{R} \times \sum_i m_i \cdot \ddot{\vec{s}}_i + &= \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i^{(a)} + \sum_i \vec{s}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \\
 \left( \sum_i m_i \cdot \vec{s}_i \right) \times \ddot{\vec{R}} + \sum_i \vec{s}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{s}}_i & \\
 \sum_i \vec{s}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{s}}_i &= \sum_i \vec{s}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \\
 \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{s}_i \times m_i \cdot \dot{\vec{s}}_i \right) &= \sum_i \vec{s}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \\
 \frac{d}{dt} L_{ss} &= \sum_i \vec{s}_i \times \vec{F}_i^{(a)}
 \end{aligned}$$

- Bemerkung: Drehimpuls ist immer auf bel. Ursprung bezogen, aber: Schwerpunktsystem kein Inertialsystem.

- Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{ss}$$

mit  $\vec{L}_S = \vec{R} \times M \cdot \dot{\vec{R}}$

- kinetische Energie:

$$T = T_S + T_{ss}$$

mit  $T_S = \frac{1}{2} M \cdot \dot{\vec{R}}^2$  und  $T_{ss} = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \dot{\vec{s}}_i^2$ .

### 1.7.5 Zweikörperproblem

- Das System sei abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  keine äußeren Kräfte. Innere Kräfte:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\
 \vec{F}_{12} &= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot f(r_1, r_2)
 \end{aligned}$$

- Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \vec{R} &= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\
 \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2
 \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} \\
 m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}
 \end{aligned}$$

DGL 2. Ordnung, gekoppelt



Addition:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 &= 0 \\M \cdot \ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \vec{R} &= \vec{R}_0 + \vec{v}_0 \cdot t\end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \vec{F}_{12} \\ \mu \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12}(\vec{r})\end{aligned}$$

Reduzierte Masse  $\mu$

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

- Bemerkung: Zweikörperproblem exakt durch Einkörperproblem mit reduzierter Masse  $\mu$  im Zentralkraftfeld beschrieben

### 1.7.6 N-Körper-Problem

- System sei abgeschlossen (3D)
- Impulserhaltung: 3 Konstanten der Bewegung
- Drehimpulserhaltung: 3 Konstanten der Bewegung
- Energieerhaltung: 1 Konstante der Bewegung
  1. N=1 3 Freiheitsgrade  $\Rightarrow$  integrabel (regulär)
  2. N=2 6 Freiheitsgrade  $\Rightarrow$  integrabel (regulär)
  3. N=3 9 Freiheitsgrade  $\Rightarrow$  i.A. nicht integrabel (chaotisch/regulär)
- N=1 Teilchen, nicht abgeschlossenes System, z.B. Potential  $U(\vec{r})$  in d-dimensionalen Raum
  1. d=1 1 Freiheitsgrad
    - keine Impulserhaltung, falls  $\vec{F} \neq 0$
    - Drehimpuls nicht definiert
    - Energieerhaltung
    - also 1 Konstante der Bewegung, integrabel
  2. d=2 2 Freiheitsgrade
    - Energieerhaltung
    - keine Impulserhaltung, falls  $\vec{F} \neq 0$
    - i.A. keine Drehimpulserhaltung
    - Also 1 Konstante der Bewegung, damit nicht integrabel (chaotische + reguläre Dynamik)

# 2

## Lagrangesche Formulierung der Mechanik

### 2.1 Einführung am Beispiel ebenes Pendel

Es gibt eine unbekannte Zwangskraft  $\vec{z}(t)$ , die dafür sorgt, dass die Zwangsbedingung

$$x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

eingehalten wird.

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{z}(t)$$

Beobachtung:  $\vec{z}(t)$  steht hier senkrecht auf der Linie der Bewegung

2 Möglichkeiten:

1. Explizite Berücksichtigung der Zwangskraft:

Es gilt  $\vec{z}(t) \parallel \vec{r}(t)$ . Also

$$\vec{z}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{r}(t)$$

Bewegungsgleichung in 2D:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \vec{g} + \lambda(t) \cdot \vec{r}$$

Zwangsbedingung 2D:

$$\vec{r}^2 - l^2 = 0$$

3 Gleichungen, 3 Unbekannte

(LAGRANGE-Methode 1.Art)

2. Eliminierung der Zwangskräfte: Projektion der Bewegungsgleichung auf Linie der erlaubten Bewegung

- (a) Parametrisierung der Bewegung durch Winkel  $\varphi$  (generalisierte Koordinaten)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= l \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \\ \frac{d\vec{r}}{d\varphi} &= l \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Richtung der erlaubten Bewegung

- (b) Projektion: Bewegungsgleichung  $\cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}$

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} &= m \cdot \vec{g} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} + \lambda \cdot \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} &= -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi\end{aligned}$$

1 Gleichung, 1 Unbekannte

(LAGRANGE-Methode 2. Art)

Bemerkung: Zwangskraft eliminiert, kann nachträglich berechnet werden

$$\vec{z}(t) = m \cdot \ddot{\vec{r}} - \vec{F}$$

Die Lagrange-Methoden 1. und 2. Art erlauben das elegante Aufstellen von Differentialgleichungen, auch in komplizierteren Fällen.

## 2.2 Zwangsbedingungen

Beispiele in 3D:

- Bewegungseinschränkung auf Fläche:

– Tisch:  $z - h = 0$

– sphärisches Pendel (Kugelpendel) mit zeitabhängiger Länge  $\ell(t)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0$$

– schiefe Ebene mit Winkel  $\alpha(t)$

$$\tan \alpha = \frac{z}{y} \Rightarrow y \cdot \tan \alpha - z = 0$$

- Bewegungseinschränkung auf Kurve:

– Ebenes Pendel

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - \ell^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

– Perle auf Draht, Sandburg,...

Klassifizierung der Zwangsbedingungen:

1. Holonome Zwangsbedingung:

$$g_\alpha(\vec{r}, t) = 0$$

- (a) Skleronome Zwangsbedingung:

$$g_\alpha(\vec{r}) = 0$$

- (b) rheonome Zwangsbedingung:

$$g_\alpha(\vec{r}, t) = 0$$

2. Anholonome Zwangsbedingung:

Nicht in Form  $g_\alpha(\vec{r}, t) = 0$  schreibbar, z.B.

- geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingung  $g_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
- Ungleichung:

$$g_\alpha(\vec{r}, t) \leq 0$$

Zahl der Freiheitsgrade:

$$f = 3N - R$$

(N... Zahl Massepunkte R...Zahl der holonomen Zwangsbedingungen)

### 2.3 Zwangskraft, D'Alembert-Prinzip

- Zwangskraft  $\vec{z}(t)$  sorgt für die Erfüllung der Zwangsbedingung und tritt auf im 2. NEWTONschen Axiome

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{z}(t)$$

Problem:  $\vec{z}(t)$  unbekannt

Strategie: Was kann über die Richtung von  $\vec{z}(t)$  ausgesagt werden? Ist sie durch Zwangsbedingungen eindeutig festgelegt?

- virtuelle Verrückung: Bei festgehaltener Zeit ( $dt=0$ ) gedachte infinitesimale Verschiebung  $\delta\vec{r}$  der Punktmasse unter Beachtung der Zwangsbedingung
- D'ALEMBERT-Prinzip: Bei virtuellen Verrückungen  $\delta\vec{r}$  leistet die Zwangskraft  $\vec{z}(t)$  keine Arbeit:

$$\begin{aligned}\vec{z} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ (m \cdot \ddot{\vec{r}} - \vec{F}) \cdot \delta\vec{r} &= 0\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Nicht beweisbar (Axiom).
2. Bei mehreren Punktmassen gilt die Aussage für die Summe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \vec{z}_i \delta\vec{r}_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0\end{aligned}$$

- Einfache Anwendungen:

1. Punktmasse in 3D ohne Zwangsbedingung (f=3):

$$(m \cdot \ddot{z} - F_z)\delta z + (m \cdot \ddot{y} - F_y)\delta y + (m \cdot \ddot{x} - F_x)\delta x = 0$$

$\delta x, \delta y, \delta z$  können beliebig und unabhängig gewählt werden, da keine Zwangsbedingungen vorliegen.

(a)  $\delta x \neq 0, \delta y = 0, \delta z = 0$

$$\begin{aligned} \delta x \cdot (m \cdot \ddot{x} - F_x) &= 0 \\ m \cdot \ddot{x} - F_x &= 0 \\ m \cdot \ddot{x} &= F_x \end{aligned}$$

(b)  $\delta x = 0, \delta y \neq 0, \delta z = 0$

$$\begin{aligned} \delta y \cdot (m \cdot \ddot{y} - F_y) &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} - F_y &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} &= F_y \end{aligned}$$

(c)  $\delta x = 0, \delta y = 0, \delta z \neq 0$

$$\begin{aligned} \delta z \cdot (m \cdot \ddot{z} - F_z) &= 0 \\ m \cdot \ddot{z} - F_z &= 0 \\ m \cdot \ddot{z} &= F_z \end{aligned}$$

Also:  $m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

2. Punktmasse auf Tischplatte (f=2)

– Zwangsbedingung:

$$z - h = 0$$

Also  $\delta z = 0$ ,  $\delta x$  und  $\delta y$  beliebig

$$\vec{F} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$$

– D’ALEMBERT:

$$\begin{aligned} (m \cdot \ddot{z} - F_z)\delta z + (m \cdot \ddot{y} - F_y)\delta y + (m \cdot \ddot{x} - F_x)\delta x &= 0 \\ m \cdot \ddot{x} \cdot \delta x + m \cdot \ddot{y} \cdot \delta y &= 0 \end{aligned}$$

z.B.  $\delta x \neq 0, \delta y = 0$ :

$$m \cdot \ddot{x} = 0$$

$\delta x = 0, \delta y \neq 0$ :

$$m \cdot \ddot{y} = 0$$

– Zwangskraft:

$$\vec{z} = m \cdot \ddot{\vec{r}} - \vec{F} = m \cdot g \cdot \vec{e}_z$$

## 2.4 Lagrange-Gleichung 1.Art

Unterscheidung reale zu virtuelle Verrückung:

- Zwangsbedingung:  $g(x, y, z, t) = 0$

totales Differenzial:

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot dt \\ &= \nabla g \cdot d\vec{r} + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot dt = 0 \end{aligned}$$

- reale Verrückung:  $d\vec{r} \neq 0, dt \neq 0$

$$\nabla g \cdot d\vec{r} + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot dt = 0$$

- virtuelle Verrückung:  $\delta\vec{r} \neq 0, dt = 0$

$$\nabla g \cdot \delta\vec{r} = 0$$

identisch nur für skleronome Zwangsbedingung!

- Bemerkung: Bei 2 Zwangsbedingungen  $g_1, g_2$ :

$$\nabla g_1 \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\nabla g_2 \cdot \delta\vec{r} = 0$$

### 1. 1 Punktmasse in 3D, 1 Zwangsbedingung:

- Bewegung auf Fläche (f=2)
- Zwangsbedingung:

$$g(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \nabla g \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \nabla g \perp \delta\vec{r}$$

- D'ALEMBERT:

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow \vec{z} \perp \delta\vec{r} \Rightarrow \vec{z} \parallel \nabla g \\ \Rightarrow \vec{z}(t) &= \lambda(t) \cdot \nabla g(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

- LAGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda(t) \cdot \nabla g(\vec{r}, t) \\ g(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

4 Gleichungen, 4 Unbekannte

### 2. 1 Punktmasse in 3D, 2 Zwangsbedingungen:

- Bewegung auf Kurve (f=1)
- Zwangsbedingungen:

$$g_1(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \nabla g_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \nabla g_1 \perp \text{Linie}$$

$$g_2(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \nabla g_2 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \nabla g_2 \perp \text{Linie}$$

- D'ALEMBERT:

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow \vec{z} \perp \text{Linie} \\ \Rightarrow \vec{z} &= \lambda_1(t) \cdot \nabla g_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t) \cdot \nabla g_2(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

- LAGRANGE-Gleichung 1. Art:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha}(t) \cdot \nabla g_{\alpha}(\vec{r}, t) \\ g_{\alpha}(\vec{r}, t) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

### 3. Allgemeiner Fall: N Punktmassen in 3D, R Zwangsbedingungen (f=3N-R)

- Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} g_{\alpha}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) &= 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \\ \Rightarrow \nabla g_{\alpha} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

- D'ALEMBERT:

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{z} &= \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \cdot \nabla g_{\alpha} \end{aligned}$$

- Notation:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x_1 \ y_1 \ z_1)^T \rightarrow (x_1 \ x_2 \ x_3)^T \\ &\vdots \\ \vec{r}_n &= (x_n \ y_n \ z_n)^T \rightarrow (x_{3N-2} \ x_{3N-1} \ x_{3N})^T \end{aligned}$$

ebenso  $F_1, \dots, F_{3N}$

$$\begin{aligned} m_1 &\rightarrow m_1 \ m_2 \ m_3 \\ &\vdots \\ m_N &\rightarrow m_{3N-2} \ m_{3N-1} \ m_{3N} \end{aligned}$$

- LAGRANGE-Gleichungen 1.Art:

$$\begin{aligned} m_n \cdot \ddot{x}_n &= F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n} \\ g_{\alpha}(x_1, \dots, x_{3N}, t) &= 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \end{aligned}$$

3N+R Gleichungen, 3N+R Unbekannte

- Zwangskräfte:

$$z_n = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \cdot \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n}$$

## 2.5 Lösungsmethode der Lagrange-Gleichung 1.Art

### 2.5.1 Allgemeine Formulierung

1. Formulierung der Zwangsbedingungen

$$g_{\alpha}(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$$

2. Aufstellen der Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$m_n \cdot \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n} \quad n = 1, \dots, 3N$$

3. Elimination von  $\lambda_{\alpha}$

- (a) Zwangsbedingungen zweimal nach Zeit differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\alpha}}{dt} &= \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_{3N}} \cdot \dot{x}_{3N} + \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} = 0 \\ \frac{d^2 g_{\alpha}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_1} \right) \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_1} \cdot \ddot{x}_1 + \dots + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_{3N}} \right) \cdot \dot{x}_{3N} \\ &\quad + \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_{3N}} \cdot \ddot{x}_{3N} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n} \cdot \ddot{x}_n &= \underbrace{- \sum_{n=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n} \right) \cdot \dot{x}_n - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} \right)}_{K_{\alpha}(x, \dot{x}, t)} \end{aligned}$$

für  $\alpha = 1, \dots, R$

(b) Einsetzen LAGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n} \cdot \frac{1}{m_n} (F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}) = K_\beta(x, \dot{x}, t) \quad \beta = 1, \dots, R$$

Gleichungssystem für  $\lambda_\alpha$ : linear, homogen

$$\Rightarrow \lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t)$$

(c) Einsetzen von  $\lambda_\alpha$  in LAGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$m_n \cdot \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad n = 1, \dots, 3N$$

3N DGL 2. Ordnung für 3N Koordinaten  $x_n(t)$ , Zwangskräfte eliminiert

4. Lösen der Bewegungsgleichung

(a) analytisch oder numerisch

(b) Einführung geeigneter Variablen

Beachtung der Anfangs- und Zwangsbedingungen

5. Bestimmung der Zwangskräfte

$$x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) \Rightarrow \lambda_\alpha(t) \Rightarrow \vec{z} = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}$$

### 2.5.2 Beispiel: Ebenes Pendel

1. Zwangsbedingung (2D):

$$g(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

2. LAGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$m \cdot \ddot{x} = \lambda(t) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda(t) \cdot 2x$$

$$\ddot{x} = 2 \frac{\lambda}{m} \cdot x$$

$$m \cdot \ddot{y} = -m \cdot G + \lambda(t) \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = -m \cdot G + 2y \cdot \lambda(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -G + 2 \frac{\lambda}{m} \cdot y$$

3. Elimination der Zwangskraft

(a) Zwangsbedingung zweimal ableiten:

$$\frac{dg}{dt} = 2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y} = 0$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} = 2(\dot{x}^2 + x \cdot \ddot{x} + \dot{y}^2 + y \cdot \ddot{y}) = 0$$

$$x \cdot \ddot{x} + y \cdot \ddot{y} = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

(b) LAGRANGE-Gleichungen 1. Art einsetzen

$$x \cdot \left( 2 \frac{\lambda}{m} \cdot x \right) + y \cdot \left( -G + 2 \frac{\lambda}{m} \cdot y \right) = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$$2 \frac{\lambda}{m} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{l^2} = G \cdot y - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$$2 \frac{\lambda}{m} = \frac{1}{l^2} (G \cdot y - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)$$



(c) Einsetzen von  $\lambda$  in LAGRANGE-Gleichungen 1. Art

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{l^2}(G \cdot y - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) \\ \ddot{y} &= -G + \frac{1}{l^2}(G \cdot y - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) \cdot y\end{aligned}$$

4. Vereinfachung durch Polarkoordinaten  $(\varrho, \varphi)$  mit  $\varrho = l$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{G}{l} \cdot \sin \varphi$$

Kleine Schwingungen:  $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\varphi = A \cdot \sin(\omega t + \eta) \quad \omega = \sqrt{\frac{G}{l}}$$

Polarkoordinaten (von Anfang an):

1. Zwangsbedingung:

$$g(\varrho, \varphi, t) = \varrho - l = 0$$

2. Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \vec{G} + \lambda(t) \cdot \nabla g$$

in Komponenten:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\varrho : m \cdot (\ddot{\varrho} - \dot{\varphi}^2) &= m \cdot G \cdot \cos \varphi + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \varrho} \\ \vec{e}_\varphi : m \cdot (\varrho \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varrho}) &= -m \cdot G \cdot \sin \varphi + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

3. Elimination von  $\lambda$

(a) Ableiten der Zwangsbedingung:

$$\frac{dg}{dt} = \dot{\varrho} = 0 \quad \frac{d^2g}{dt^2} = \ddot{\varrho} = 0$$

(b) Einsetzen der Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned}-\varrho \cdot \dot{\varphi}^2 &= G \cdot \cos \varphi + \frac{\lambda}{m} \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{m} &= -\varrho \cdot \dot{\varphi}^2 - G \cdot \cos \varphi \\ \varrho \cdot \ddot{\varphi} &= -G \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

(c) Einsetzen in Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned}\ddot{\varrho} &= 0 \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{G}{l} \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

4. Zwangskraft:

$$\begin{aligned}z_\varrho &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \varrho} = \lambda = -m \cdot (G \cdot \cos \varphi + l \cdot \dot{\varphi}^2) \\ z_\varphi &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0\end{aligned}$$

### 2.5.3 Beispiel: Perle auf rotierender Stange

1. Zwangsbedingung (rheonom), Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} g_1(\varrho, \varphi, z, t) &= z = 0 \\ g_2(\varrho, \varphi, z, t) &= \varphi - \omega t = 0 \end{aligned}$$

2. Lagrange-Gleichung 1.Art:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \lambda_1(t) \cdot \nabla g_1 + \lambda_2(t) \cdot \nabla g_2$$

in Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varrho : m \cdot (\ddot{\varrho} - \varrho \cdot \dot{\varphi}^2) &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial \varrho} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \varrho} = 0 \\ \vec{e}_\varphi : m \cdot (\varrho \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varrho}) &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} = \lambda_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \\ \vec{e}_z : m \cdot \ddot{z} &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z} = \lambda_1 \end{aligned}$$

3. Elimination von  $\lambda$ :

- (a) Ableiten der Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} g_1 : \dot{z} &= 0 & \ddot{z} &= 0 \\ g_2 : \dot{\varphi} &= \omega & \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Einsetzen der Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ 2m \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varrho} &= \frac{\lambda_2}{\varrho} \end{aligned}$$

- (c) Einsetzen in Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho \cdot \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\varrho} &= \omega^2 \cdot \varrho \\ m \cdot (\varrho \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varrho}) &= \lambda_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \\ \Rightarrow 0 &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

4. Lösen der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} z(t) &= C + D \cdot t = 0 \quad (D = C = 0) \\ \varphi(t) &= \omega t \\ \varrho(t) &= A \cdot e^{\omega t} + B \cdot e^{-\omega t} \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow \infty$ :

- (a)  $A > 0$ :  $\varrho \rightarrow \infty$   
 (b)  $A = 0$ :  $\varrho \rightarrow 0$  für Anfangsbedingung  $\varrho_0, \dot{\varrho}_0 = -\omega \cdot \varrho_0$

5. Zwangskraft:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \lambda_1 \cdot \nabla g_1 + \lambda_2 \cdot \nabla g_2 \\ z_\varrho &= 0 \\ z_\varphi &= \frac{\lambda_2}{\varrho} = 2m \cdot \dot{\varrho} \cdot \omega \\ z_z &= 0 \end{aligned}$$

### 2.5.4 Erhaltungsgrößen

- Impuls:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \dot{\vec{r}}) = \vec{F} + \vec{z} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{z}$$

Beispiel: Bewegung auf Tisch

- Drehimpuls:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times (\vec{F} + \vec{z}) = 0$$

falls  $\vec{F} + \vec{z}$  Zentralkraft ist.

Beispiel: Rotor

- Energie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} (T + U) = \underbrace{(\vec{F}_{diss} + \vec{z})}_{\text{sei } 0} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \sum_{n=1}^{3N} z_n \cdot \dot{x}_n \\ &= \sum_{n=1}^{3N} \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^R -\lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \end{aligned}$$

Also:  $\frac{d}{dt} E = 0$ , falls  $\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$  für alle  $\alpha$  (skleronome Zwangsbedingung)

- Bemerkung: Zwangskraft leistet keine Arbeit bei virtuellen Verrückungen (d'Alembert  $\vec{z} \cdot \delta \vec{r} = 0$ ), aber Arbeit bei realen Verrückungen, da  $\vec{z} \cdot d\vec{r} \neq 0$ , falls  $d\vec{r} \nparallel \delta \vec{r}$ .

### 2.6 Lagrange-Gleichungen 2.Art

- Idee: Wechsel zu Koordinaten, die die Zwangsbedingung automatisch erfüllen
- Verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$ :

1. Legen die Lage aller Punkte eindeutig fest

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f, t) \quad n = 1, \dots, 3N$$

2. Zwangsbedingung sind für beliebige  $q_k$  erfüllt:

$$g_\alpha(x_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f, t), t) = 0$$

für alle  $\alpha, q_k$

$$0 = \frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

für alle  $\alpha, q_k$ .

Bemerkung: Wahl der verallgemeinerten Koordinaten nicht eindeutig

• Beispiele:

1. Ebenes Pendel: Verallgemeinerte Koordinate  $\varphi$

(a)  $x = l \cdot \sin \varphi \quad y = -l \cdot \cos \varphi$

(b)  $x^2 + y^2 = l^2$  für alle  $\varphi$

verallgemeinerte Koordinate  $x$ :

(a)  $x = x \quad y = \pm\sqrt{l^2 - x^2}$  nicht eindeutig

2. Doppelpendel: verallgemeinerte Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2$

(a) Lage der Punktmassen

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \sin \varphi_1 \\ y_1 &= -l_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ x_2 &= l_2 \cdot \sin \varphi_2 + x_1 \\ y_2 &= -l_2 \cdot \cos \varphi_2 + y_1 \end{aligned}$$

(b) Erfüllung der Zwangsbedingung für alle  $\varphi_1, \varphi_2$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

**2.6.1 Herleitung**

• Elimination der Zwangskräfte

$$\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} (m_n \cdot \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n})$$

Projektion der Bewegungsgleichung auf die erlaubte Bewegung bei Variation von  $q_k$

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \ddot{x}_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_0$$

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \ddot{x}_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

f DGL für  $q_k$ , keine Zwangskräfte

• 2. Ziel: Umformung der Gleichung, um  $x_n$  zu eliminieren

1. Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \frac{dx_n(q_1, \dots, q_f, t)}{dt} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \\ &= \dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_n(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \end{aligned}$$

verallgemeinerte (generalisierte) Geschwindigkeit  $\dot{q}_k$

2. kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 T &= T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \cdot \dot{x}_n^2 = T(q, \dot{q}, t) \\
 \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} &= \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \cdot 2 \cdot \dot{x}_n \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \\
 \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \dot{x}_n \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \dot{x}_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \ddot{x}_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \dot{x}_n \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right)}_{= \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}} \\
 &= \sum_{n=1}^{3N} m_n \cdot \ddot{x}_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \\
 &= \sum_{n=1}^{3N} F_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}
 \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right) &= \sum_{l=1}^f \left( \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right) \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{d}{dt} x_n \right) = \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}
 \end{aligned}$$

zusammengefasst:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} =: Q_k$$

verallgemeinerte Kraft  $Q_k$

3. potentielle Energie:

– Beschränkung auf konservative ortsabhängige Kräfte  $F_n$

$$\begin{aligned}
 F_n &= - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_n} \text{ mit } U(x, t) = U(q, t) \\
 \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_k} &= \frac{dU(x, t)}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -Q_k \\
 \frac{\partial U(q, t)}{\partial \dot{q}_k} &= 0
 \end{aligned}$$

Damit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0$$

– Bemerkung: Geschwindigkeitsabhängige Potentiale  $U(q, \dot{q}, t)$  okay, falls

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

- Lagrange-Funktion (der nichtrelativistischen Mechanik):

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, f$$

## 2.6.2 Beispiele

1. Ebenes Pendel:  $f=1$

- skleronome Zwangsbedingung
- verallgemeinerte Koordinate  $\varphi$

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin \varphi & \dot{x} &= l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ y &= -l \cdot \cos \varphi & \dot{y} &= l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \\ U &= m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \cdot l \cdot \cos \varphi \\ \Rightarrow \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{m}{2} \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \cos \varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Lagrange-Gleichung 2. Art:

$$\begin{aligned} m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

2. Perle auf rotierender Stange:

- $f=1$ , rheonom
- verallgemeinerte Koordinate  $\varrho$

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cdot \cos \omega t & \dot{x} &= \dot{\varrho} \cdot \cos \omega t - \omega \cdot \varrho \cdot \sin \omega t \\ y &= \varrho \cdot \sin \omega t & \dot{y} &= \dot{\varrho} \cdot \sin \omega t + \omega \cdot \varrho \cdot \cos \omega t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \cdot (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \cdot \omega^2) \\ U &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \cdot \omega^2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\varrho, \dot{\varrho})}{\partial \dot{\varrho}} &= m \cdot \dot{\varrho} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varrho}} \right) &= m \cdot \ddot{\varrho} \\ \Rightarrow m \cdot \ddot{\varrho} - m \cdot \omega^2 \cdot \varrho &= 0 \\ \ddot{\varrho} &= \omega^2 \cdot \varrho \end{aligned}$$

### 2.6.3 Zyklische Koordinaten

- $q_k$  heißt zyklische Koordinate, falls

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

- Behauptung: Zu jeder zyklischen Koordinate gibt es eine Erhaltungsgröße.
- Beweis: Sei  $q_k$  zyklisch. Also  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ . Nach Lagrange 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.}$$

- Beispiel: Freies Teilchen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m \cdot \dot{x} = \text{const.} \end{aligned}$$

Impulserhaltung in x-Richtung (ebenso für y,z)

- $p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$  heißt verallgemeinerter Impuls.

### 2.6.4 Elektromagnetische Kräfte

- Lorentz-Kraft auf eine Ladung Q:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = Q \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

Behauptung: zugehöriges geschwindigkeitsabhängiges Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = Q \cdot \Phi(\vec{r}, t) - Q \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

- Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= \frac{m}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 - Q \cdot \Phi(\vec{r}, t) + Q \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_L \end{aligned}$$

## 2.7 Hamilton-Prinzip

### 2.7.1 Variationsrechnung

- Funktion  $y(x)$ : ordnet Zahl  $x$  eine Zahl  $y$  zu, Suche nach Extrema:  $y' = 0$
- Funktional  $J[y]$ : ordnet Funktion  $y(x)$  eine Zahl  $J$  zu, z.B. Bogenlänge einer Kurve von  $x_1$  bis  $x_2$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

Extrema:

1. Für welche Funktion  $y(x)$  ist das Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

extremal bei vorgegebenen Randwerten  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$ ?

$$\delta J = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Spezialfall: Lagrange-Gleichungen 2.Art

2. Für welche Funktionen  $y_1(x), \dots, y_N(x)$  ist das Funktional

$$J[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N)$$

extremal bei zusätzlichen Nebenbedingungen  $g_\alpha(y_1, \dots, y_N, x) = 0$  mit  $\alpha = 1, \dots, R$  ( $R < N$ )?

Lösung:

$$F \rightarrow F + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha g_\alpha$$

mit Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} &= \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_i} & i = 1, \dots, N \\ g_\alpha(\dots) &= 0 \end{aligned}$$

Spezialfall: Lagrange-Gleichungen 1.Art

Welches Funktional gehört zur Mechanik?

## 2.7.2 Wirkungsfunktional

- Wirkungsfunktional (Wirkung) einer Bahnkurve  $q(t)$

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

Bemerkung: Hat keine anschauliche Bedeutung, wie auch  $\mathcal{L}$ .

- Hamilton-Prinzip: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S[q] = 0$$

Die vom System durchlaufene Bahnkurve ist gegenüber anderen denkbaren Bahnkurven dadurch ausgezeichnet, dass die Wirkung extremal ist.

- Behauptung: Hamilton-Prinzip  $\Rightarrow$  Lagrange-Gleichungen 2.Art
- Behauptung: Hamilton-Prinzip  $\Leftrightarrow$  d'Alembert-Prinzip
- Eigenschaften der Vergleichsbahnen:

- gleiche Anfangs- und Endpunkte

$$q^*(t_{1/2}) = q(t_{1/2}) \Leftrightarrow \delta q(t_{1/2}) = 0$$

- kleine Variationen:

$$\begin{aligned} q^*(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ \dot{q}^*(t) &= \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t) \end{aligned}$$

- Vergleich bei fester Zeit  $t$ :  $dt = 0$



### 2.7.3 Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2.Art (Hamilton-Prinzip)

1.  $f=1$

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S[q] \\
 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \underbrace{\mathcal{L}(q^*, \dot{q}^*, t)}_{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2} (\delta q)^2 + \dots} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \delta q + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q}}_{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) \delta q} \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \\
 &= \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}}_0 - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) \delta q
 \end{aligned}$$

Integral = 0, für alle  $\delta q(t) \Rightarrow$  Integrand = 0 für alle t

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

2.  $f > 1$ :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) \delta q_k(t)$$

Wähle für alle  $k \neq l$   $\delta q_k = 0$ , dann Fall  $f=1$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, \dots, f$$

### 2.7.4 Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion

1. additive Konstante:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + c$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial c}{\partial q_k} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

alternativ:

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{\mathcal{L}} = \delta S + \delta \int_{t_1}^{t_2} dt c = \delta S = 0$$

2. multiplikative Konstante:

$$\tilde{\mathcal{L}} = c \cdot \mathcal{L}$$

Beweis:

$$\delta \tilde{S} = c \cdot \delta S = 0$$

3. Addition von  $\frac{d}{dt}f(q, t)$  mit beliebiger Funktion  $f(q, t)$  (Eichtransformation)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f(q, t)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} &= \delta S + \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}f(q, t) \\ &= \delta S + \delta(f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)) = 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Freies Teilchen unter Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &\mapsto \dot{\vec{r}} + \vec{v} \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}} + \vec{v})^2 = \mathcal{L} + m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2 \\ &= \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \left( m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2 \cdot t \right) \end{aligned}$$

## 2.8 Symmetrien und Erhaltungssätze

- Symmetrie bedeutet Invarianz unter einer Operation
  1. diskrete Symmetrie: Spiegelung, Drehung um Winkel  $\alpha$ , Verschiebung um Vektor
  2. kontinuierliche Symmetrie: Drehung um bel. Winkel (isotroper Raum), Verschiebung um bel. Vektor (homogener Raum)
- Noether-Theorem: Jede kontinuierliche Symmetrie, die die Wirkung invariant lässt, führt zu einer Erhaltungsgröße.
- Beispiele:
  1. Homogenität der Zeit  $\Rightarrow$  Energieerhaltung
  2. Homogenität des Raumes  $\Rightarrow$  Impulserhaltung
  3. Isotropie des Raumes  $\Rightarrow$  Drehimpulserhaltung

- Beweise:

1. Homogenität der Zeit:

– Betrachte zeitliche Verschiebung  $t \mapsto t + \varepsilon$ ,  $\mathcal{L}(r_1^{\dot{r}}, \dots, r_N^{\dot{r}}, t + \varepsilon)$

$$\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot \frac{d(t + \varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \dot{r}_i \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \dot{r}_i \right) &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \ddot{q}_k \right] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

– Annahme: Homogenität der Zeit, d.h. eine zeitliche Verschiebung lässt  $\mathcal{L}$  unverändert.

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \dot{r}_i - \mathcal{L} = \text{const.}$$

– Sei  $\mathcal{L} = T - U$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \cdot \dot{r}_i^2 - U(r_1, \dots, r_N) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \dot{r}_i &= 2T \\ \Rightarrow T + U &= E = \text{const.}\end{aligned}$$

2. Homogenität des Raumes:

– Betrachte räumliche Verschiebung:

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \varepsilon \cdot \vec{n} \quad \dot{r}_i \mapsto \dot{r}_i$$

Dann:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}_1 + \varepsilon \cdot \vec{n}, \dots, \vec{r}_N + \varepsilon \cdot \vec{n}, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t)$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}} \cdot \underbrace{\frac{d(\vec{r}_i + \varepsilon \cdot \vec{n})}{d\varepsilon}}_{\vec{n}} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}}_{\vec{p}_i} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{P} \cdot \vec{n})\end{aligned}$$

– Für  $\frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} = 0$ :  $\vec{P} \cdot \vec{n} = \text{const.}$ , also  $\vec{P} = \text{const.}$

3. Isotropie des Raumes:

– Drehung um Achse  $\vec{n}$  um Winkel  $\varepsilon$

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &\mapsto \vec{r}_i + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dot{r}_i &\mapsto \dot{r}_i + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \dot{r}_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\vec{r}_1 + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_1), \dots, \dot{r}_1 + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \dot{r}_1), t)\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \underbrace{\frac{d(\vec{r}_i + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i))}{d\varepsilon}}_{\vec{n} \times \vec{r}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \underbrace{\frac{d(\dot{r}_i + \varepsilon \cdot (\vec{n} \times \dot{r}_i))}{d\varepsilon}}_{\vec{n} \times \dot{r}_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}}_{\frac{d}{dt} \vec{p}_i} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}}_{\vec{p}_i} \cdot (\vec{n} \times \dot{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{p}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i)) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{n} \cdot \underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_i} \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{n})\end{aligned}$$

– Für  $\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ :  $\vec{L} \cdot \vec{n} = \text{const.}$ , also  $\vec{L} = \text{const.}$

- Allgemeine Form:

– kontinuierliche Transformation:

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto q_i^* = \Psi(q, \dot{q}, t) \\ t &\mapsto t^* = \Phi(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

mit Invarianzbedingung (aus  $S[q(t)] = S[q^*(t^*)]$ )

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \mathcal{L} \left( q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^* \right) \frac{dt^*}{dt} \right) = 0$$

Erhaltungsgröße:

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\Psi_i}{d\varepsilon} + \left( \mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \cdot \frac{d\Phi}{d\varepsilon}$$

- erweitertes Noethertheorem: Invarianz von  $\delta S \Rightarrow$  Erhaltungsgröße
- Erraten von  $\mathcal{L}$  aus Symmetrien:

Beispiel: freies Teilchen

– Symmetrien:

1. Homogenität der Zeit (keine Zeitabhängigkeit)
2. Homogenität des Raumes (keine Ortsabhängigkeit)
3. Isotropie des Raumes, nur Abhängigkeit von  $\|\dot{\vec{r}}\|$

– Also:  $\mathcal{L} = f(\dot{r}^2)$ . Einfachste Wahl:

$$\mathcal{L} = \dot{r}^2$$

## 2.9 Reibungskräfte

- Reibungskraft oftmals

$$F_n^{diss} = -\gamma_n \cdot \dot{x}_n$$

(kein Potential:  $F_n = -\frac{\partial U}{\partial x_n}$ )

- Rayleighsche Dissipationsfunktion:

$$D(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \cdot \dot{x}_n^2$$

mit  $F_n^{diss} = -\frac{\partial D(\dot{x})}{\partial \dot{x}_n}$

- verallgemeinerte dissipative Kräfte (2.6.1)

$$Q_k^{diss} = \sum_{n=1}^{3N} F_n^{diss} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

modifizierte Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

# 3

## Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

### 3.1 Hamilton-Funktion, kanonische Gleichungen

- Motivation: alternative Formulierung der Mechanik
- verallgemeinerter (generalisierter) Impuls:

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

Definition sinnvoll, da: 2. Newtonsches Axiom:

$$\frac{d}{dt} p_k = F_k$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$p_k$  sei auflösbar nach  $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, t, p)$

- kanonisch konjugierte Variablen  $q_k, p_k$

Beispiele:  $q$  Ort und  $p$  Impuls;  $q$  Winkel und  $p$  Drehimpuls

- Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot p_k - \mathcal{L} \\ &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k(q, p, t) \cdot p_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \end{aligned}$$

- Einschub: Legendre-Transformation:

Sei  $f(x)$  eine konvexe Funktion. Sei die Steigung  $s = \frac{df}{dx}$ . Gesucht ist die Funktion  $g(s)$  der Variable  $s$  mit gleicher Information wie  $f(x)$ . Legendre-Transformation:

$$g(s) = x \cdot s - f(x) \quad x = x(s)$$

Existenz von  $x(s)$  folgt aus Konvexität. Inverse Legendre-Transformation:

$$f(x) = x \cdot s - g(s) \quad x = \frac{dg}{ds}$$

- Eigenschaften von  $H(q,p,t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_l} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} \cdot p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} - \underbrace{\sum_{k=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} \right)}_{p_l} = -\dot{p}_l \\ \frac{\partial H}{\partial p_l} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} \cdot p_k + \dot{q}_k \cdot \frac{\partial p_k}{\partial p_l} - \underbrace{\sum_{k=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} \\ &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \frac{\partial p_k}{\partial p_l} = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \delta_{kl} = \dot{q}_l\end{aligned}$$

Kanonische (Hamiltonsche) Gleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

- Bemerkungen:
  - 2f DGL 1. Ordnung (Lagrange 2: f DGL 2. Ordnung)
  - Symmetrie der Gleichungen
  - beschreibt Dynamik im Phasenraum  $(q,p)$  mit 2f Dimensionen
  - zyklische Koordinate  $q_k \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$
- Zeitentwicklung der Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t} \cdot p_k - \underbrace{\sum_{k=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot p_k - \mathcal{L} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} \right) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

Also  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H$  const.

- Welche Bedeutung hat diese Erhaltungsgröße  $H$ ? Betrachte folgende Systemklasse:

1. kinetische Energie sei quadratisch in  $\dot{q}_k$

$$T = \sum_{k,l} m_{kl} \cdot \dot{q}_l \cdot \dot{q}_k$$

z.B. Doppelpendel

2. Potential sei nicht von der Geschwindigkeit abhängig:  $U = U(q, t)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k,l} m_{kl} \cdot \dot{q}_l \cdot \dot{q}_k - U(q, t) \\ H &= \sum_i \dot{q}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} - \mathcal{L} \\ &= \sum_i \sum_{k,l} m_{kl} \cdot \dot{q}_i \cdot \left( \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_l + \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathcal{L} \\ &= \sum_i \sum_{k,l} m_{kl} \cdot \dot{q}_i (\dot{q}_i \cdot \delta_{ki} + \delta_{il} \cdot \dot{q}_k) - \mathcal{L} \\ &= 2T - \mathcal{L} = E \end{aligned}$$

H ist die Gesamtenergie.

Beispiel außerhalb dieser Systemklasse: Perle auf rotierender Stange (2.6.2)

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\varrho}^2 + \omega^2 \cdot \varrho^2)$$

### 3.2 Grundlegende Beispielsysteme

1. Massepunkt in 1D-Potential  $U(x, t)$

- verallgemeinerte Koordinate:  $q = x$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} m \cdot \dot{q}^2 - U(q, t) \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \cdot \dot{q} \\ \Rightarrow \dot{q} &= \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \dot{q} \cdot p - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{m} + U(q, t) \\ &= \frac{p^2}{2m} + U(q, t) \end{aligned}$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Lagrange-Gleichung 2.Art:

$$m \cdot \ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

2. Massepunkt im 3D-Potential  $U(\vec{r}, t)$

- Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}, t) \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} &= -\nabla U \end{aligned}$$

Lagrange-Gleichung 2.Art:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -\nabla U$$

### 3. Ladung Q im elektromagnetischen Feld

- Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m \cdot \dot{\vec{r}}^2 - Q \cdot \varphi(\vec{r}, t) + Q \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

konjugierter Impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \cdot \dot{\vec{r}} + Q \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Auflösen nach  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - Q \cdot \vec{A}}{m}$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - \mathcal{L} \\ &= \left( \frac{\vec{p} - Q \cdot \vec{A}}{m} \right) \cdot \vec{p} - \left( \frac{m}{2} \left( \frac{\vec{p} - Q \cdot \vec{A}}{m} \right)^2 - Q \cdot \varphi + Q \cdot \vec{A} \cdot \frac{\vec{p} - Q \cdot \vec{A}}{m} \right) \\ &= \frac{(\vec{p} - Q \cdot \vec{A})^2}{2m} + Q \cdot \varphi \end{aligned}$$

### 3.3 Kanonische Transformation

im Folgenden: f=1

1. Lagrangesche Formulierung:

$$\begin{aligned} q &\mapsto Q(q, t) \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &\mapsto \tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L}(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q} &= 0 \end{aligned}$$

unveränderte Form

2. Hamiltonsche Formulierung:

$$q \mapsto Q(q, p, t) \quad p \mapsto P(q, p, t)$$

Also größere Vielzahl an Transformationen möglich. Bei einer kanonischen Transformation gilt:

$$\forall H(q, p, t) \exists K(Q, P, t) : \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

d.h. die Hamilton-Gleichungen bleiben forminvariant.

- Finde durch kanonische Transformation eine neue Hamilton-Funktion  $K(P, Q, t)$ 
  - mit zyklischer Koordinate  $Q$ , d.h.  $\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \dot{P} = 0$
  - ohne explizite Zeitabhängigkeit, d.h.  $\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 0$
- Finden von  $K(Q, P, t)$  bei gegebener Variablentransformation:

$$p \cdot \dot{q} - H(q, p, t) = P \cdot \dot{Q} - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} G(q, Q, t)$$

- Erzeugende einer kanonischen Transformation sind die Funktionen:

$$G_1(q, Q, t) \quad G_2(q, P, t) \quad G_3(p, Q, t) \quad G_4(p, P, t)$$



1.  $G = G_1(q, Q, t)$  mit den unabhängigen Variablen  $q, Q, t$

$$p \cdot \dot{q} - H = P \cdot \dot{Q} - K + \frac{\partial G}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial Q} \cdot \dot{Q} + \frac{\partial G}{\partial t}$$
$$(H - K + \frac{\partial G}{\partial t}) = \left(p - \frac{\partial G}{\partial q}\right) \cdot \dot{q} - \left(P + \frac{\partial G}{\partial Q}\right) \cdot \dot{Q}$$

da  $q, Q, t$  unabhängig, müssen Koeffizienten 0 sein.

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} \tag{3.1}$$

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q} \tag{3.2}$$

$$K = H + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.3}$$

Aus 3.1, 3.2 folgt die Transformation  $q, p \rightarrow Q, P$ .

Praktisches Vorgehen:

- (a)  $H(q, p, t) \rightarrow$  Wähle Erzeugende  $G \rightarrow$  Bestimme Transformation aus 3.1,3.2  $\rightarrow K(q, p, t)$
- (b)  $H(q, p, t) \rightarrow$  Wähle Transformation  $Q(q, p, t), P(q, p, t)$ , fraglich ob kanonisch.  $\rightarrow$  Suche Erzeugende durch Integration von 3.1,3.2  $\rightarrow$  Existiert  $G \Leftrightarrow$  Transformation kanonisch  $\rightarrow K(Q, P, t)$

2.  $G = G_2(q, P, t)$  mit den unabhängigen Variablen  $q, P, t$

$$G_1(q, Q, t) = G_2(q, P, t) - P \cdot Q$$

mit  $\frac{\partial G_2}{\partial P} = Q$ . Dann:

$$\begin{aligned} p \cdot \dot{q} - H &= P \cdot \dot{Q} - K + \frac{\partial G_2}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial G_2}{\partial P} \cdot \dot{P} + \frac{\partial G_2}{\partial t} - \dot{P} \cdot Q - \dot{Q} \cdot P \\ (H - K + \frac{\partial G_2}{\partial t}) &= \left( p - \frac{\partial G_2}{\partial q} \right) \cdot \dot{q} + \left( Q - \frac{\partial G_2}{\partial P} \right) \cdot \dot{P} \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_2}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial G_2}{\partial P} \\ K &= H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \end{aligned}$$

• Beispiele:

1. Sei  $G_1(q, Q, t) = q \cdot Q$ . Dann:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_1}{\partial q} = Q \quad \Rightarrow Q = p \\ P &= -\frac{\partial G_1}{\partial Q} = -q \quad \Rightarrow P = -q \end{aligned}$$

(Drehung im Phasenraum)

$$K = H + \frac{\partial G_1}{\partial t} = H(-P, Q, t)$$

neue Hamilton-Funktion

2.  $G_2(q, P, t) = P \cdot f(q, t)$ . Bestimmung der Transformation:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_2}{\partial q} = P \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \quad P = p \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^{-1} \\ Q &= \frac{\partial G_2}{\partial P} = f(q, t) \end{aligned}$$

neue Hamilton-Funktion:

$$K = H + \frac{\partial G_2}{\partial t} = H(q, p, t) + P \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$$

Spezialfall:

(a)  $f(q, t) = q:$

$$Q = q \quad P = p \quad K = H$$

(b)  $f(q, t) = \alpha \cdot q:$

$$Q = \alpha \cdot q \quad P = \frac{p}{\alpha} \quad K = H\left(\frac{Q}{\alpha}, \alpha \cdot P, t\right)$$

- Bemerkungen:
  - Integrierte Systeme: Wirkungswinkelvariablen
  - Chaotische Dynamik bleibt „erhalten“ unter kanonischer Transformation.

### 3.4 Poisson-Klammer

- Poisson-Klammer:

$$\{F, G\} := \sum_{k=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial q_k}$$

für zwei beliebige physikalische Größen  $F(q, p, t), G(q, p, t)$

- Motivation:
  - prägnante Formulierung von Bewegungsgleichungen
  - Analogie zum Kommutator der Quantentheorie
  - schneller Test, ob Phasenraumtransformation kanonisch ist
- Zeitentwicklung:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \underbrace{\dot{q}_k}_{\frac{\partial H}{\partial p_k}} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \underbrace{\dot{p}_k}_{-\frac{\partial H}{\partial q_k}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Zeitentwicklung wird durch H gesteuert.

- Erhaltungsgrößen:
  - F ist Erhaltungsgröße  $\Leftrightarrow \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$
  - Ist H eine Erhaltungsgröße?

$$\{H, H\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$$

Also:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H \text{ Erhaltungsgröße}$$

- Kanonische Gleichungen: Wähle  $F = q_k$  in Zeitentwicklung:

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}$$

Wähle  $F = p_k:$

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\}$$

- Algebraische Eigenschaften:

1. Linearität

$$\{c_1 \cdot A + c_2 \cdot B, C\} = c_1 \cdot \{A, C\} + c_2 \cdot \{B, C\}$$

2. Antisymmetrie:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}$$

### 3. Produktregel

$$\{A \cdot B, C\} = A \cdot \{B, C\} + B \cdot \{A, C\}$$

- Fundamentale Relationen:

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Beweis zur letzten Gleichung:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \cdot \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_0 \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ij}$$

- Weitere Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\{q_k, G\} &= \frac{\partial G}{\partial p_k} \\ \{p_k, G\} &= -\frac{\partial G}{\partial q_k} \\ \{A, f(A)\} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial A}{\partial q_k} \cdot \underbrace{\frac{\partial f(a)}{\partial p_k}}_{\frac{\partial f}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_k}} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \cdot \underbrace{\frac{\partial f(A)}{\partial p_k}}_{\frac{\partial f}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_k}} = 0\end{aligned}$$

- Behauptung: Invarianz der Poisson-Klammer unter kanonischen Transformationen, d.h. Transformationen kanonisch

$$\Leftrightarrow \{Q_i, Q_j\} = 0 \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

speziell für  $f = 1$ :

$$\{Q, P\} = 1$$

Beweis: für  $f=1$

Nutze Existenz einer Erzeugenden  $G(q, Q, t)$  mit  $p = \frac{\partial G}{\partial q}$ ,  $P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$ . Dann:

$$\begin{aligned}\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial Q} = 1\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial p} &= -\frac{\partial^2 G(q, Q, t)}{\partial p \partial Q} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= -\frac{\partial^2 G}{\partial q \partial Q} = -\frac{\partial p}{\partial Q}\end{aligned}$$

Einfaches Verfahren, um zu testen, ob gegebene Transformation kanonisch ist.

### 3.5 Satz von Liouville

- Was passiert mit Phasenraumgebiet unter Zeitentwicklung?

- Behauptung: Invarianz des Phasenraumvolumens unter einer kanonischen Transformation, d.h.

$$\int_{\Gamma} \int dq dp = \int_{\Gamma'} \int dQ dP$$

$\Gamma'$  geht aus  $\Gamma$  hervor (i.a. andere Form).

Beweis: Analysis:

$$\int \int dQ dP = \int \int D dq dp$$

mit  $D$  als Funktionaldeterminante.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\} = 1$$

- Behauptung: Zeitentwicklung ist eine kanonische Transformation:

$$\begin{aligned} q(t_0) &\rightarrow Q = q(t) = Q(q(t_0), p(t_0), t_0, t) \\ p(t_0) &\rightarrow P = p(t) = P(q(t_0), p(t_0), t_0, t) \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte infinitesimal kleine Zeittranslation  $dt$

$$\begin{aligned} Q &= q(t_0 + dt) = q + \underbrace{\dot{q}}_{\frac{\partial H}{\partial p}} dt + \mathcal{O}(dt^2) \\ P &= p(t_0 + dt) = p - \frac{\partial H}{\partial q} dt + \mathcal{O}(dt^2) \\ \Rightarrow \{Q, P\} &= \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dt\right) \cdot \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} dt\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial^2 p} dt\right) \cdot \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} dt\right) \\ &= 1 + \mathcal{O}(dt^2) \end{aligned}$$

Satz von Liouville: Invarianz des Phasenraumvolumens unter Zeitentwicklung

- Beispiel: Phasenraum des Pendels
- Behauptung: Invarianz der Phasenraumdicke unter Zeitentwicklung (Satz von Liouville)

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Beweis: Phasenraumbahnen können Einhüllende nicht kreuzen, also Anzahl der Bahnen invariant. Aus Volumeninvarianz folgt damit Dichte invariant.

- Bedeutung z.B. für statistische Physik: Wie sind  $10^{23}$  Teilchen im Phasenraum verteilt? Gleichgewicht:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \{\rho, H\} = 0$$

erfüllt für  $\rho = \rho(H)$ , d.h. Gleichverteilung auf jeder Energieschale  $H = \text{const.}$

# 4

## Starre Körper

- starrer Körper: System von Punktmassen  $m_i$ , deren paarweise Abstände  $|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$  konstant sind.
- Zahl der Freiheitsgrade:

| N | kart. Koordinaten | Zwangsbedingungen     | Freiheitsgrade |
|---|-------------------|-----------------------|----------------|
| 1 | 3                 | 0                     | 3              |
| 2 | 6                 | 1                     | 5              |
| 3 | 9                 | 3                     | 6              |
| 4 | 12                | $3 + 3 = 6$           | 6              |
| N | 3N                | $3 + (N - 3) \cdot 3$ | 6              |

- Also  $f = 6 = 3 + 3$  (Lage des Schwerpunktes + Orientierung)

### 4.1 Kinematik

1. Raumfestes Inertialsystem IS
  2. Körperfestes Koordinatensystem KS (Ursprung 0 und Orientierung der Achsen beliebig)
- Bemerkung: In 1.6.2 Rotierendes Bezugssystem waren die beiden Ursprünge identisch.
  - Drehung von KS relativ zum IS mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ . Hierbei ist  $d\vec{\varphi}$  eine Drehung um den Winkel  $|d\vec{\varphi}|$  um Achse in Richtung des Vektors  $d\vec{\varphi}$ .
  - Geschwindigkeit des Punktes i aus Sicht von IS:

$$\begin{aligned}\vec{v}_i &= \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} (\vec{r}_0 + \vec{r}_{0i}) \right)_{IS} \\ &= \vec{v}_0 + \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_{0i} \right)_{IS}\end{aligned}$$

Nutze aus 1.6.2:

$$\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{IS} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{KS}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Damit:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0i}$$

- Bemerkung: Anschaulich klar, falls Drehachse durch 0 geht.

- Gibt es bei anderer Wahl des Ursprungs von KS eine andere Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}'$ ?

$$\begin{aligned} r_{0'i} &= r_{0i} - \vec{a} \\ \vec{v}_i &= \begin{cases} v_0 + \vec{\omega} \times r_{0i} \\ v_{0'} + \vec{\omega}' \times r_{0'i} = v_{0'} + \vec{\omega}' \times (r_{0i} - \vec{a}) \end{cases} \\ \Rightarrow v_{0'} &= v_0 + \vec{\omega}' \times \vec{a} + (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times r_{0i} \end{aligned}$$

Dies gilt für beliebige Punkt i, also für beliebige Vektoren  $r_{0i}$ , also  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  Winkelgeschwindigkeit unabhängig von Wahl des Ursprungs von KS

$$v_{0'} = v_0 + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Translationsgeschwindigkeit ist abhängig von Wahl des Ursprungs von KS

- Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot (v_0 + \vec{\omega} \times r_{0i}) \\ &= \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \right)}_M \cdot v_0 + \vec{\omega} \times \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{0i} \right)}_{M \cdot \vec{S}} \\ &= M \cdot (v_0 + \vec{\omega} \times \vec{S}) \end{aligned}$$

- Drehimpuls:

1. bezogen auf Ursprung von IS

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{r}_0 + r_{0i}) \times (v_0 + \vec{\omega} \times r_{0i}) = \dots \end{aligned}$$

2. bezogen auf Ursprung von KS

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{0i} \times v_{0i} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{0i} \times (\vec{\omega} \times r_{0i}) \end{aligned}$$

mit

$$v_{0i} = \left( \frac{d}{dt} r_{0i} \right)_{IS} = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} r_{0i} \right)_{KS}}_0 + \vec{\omega} \times r_{0i}$$

- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 T_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0i})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \right)}_M \cdot \vec{v}_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \underbrace{\left( \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_{0i} \right)}_{M \cdot \vec{S}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i})^2
 \end{aligned}$$

Spezialfälle:

1. 0 in Schwerpunkt  $\vec{S}: \vec{S} = 0$

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= M \cdot \vec{v}_0 \\
 T_{kin} &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot M \cdot \vec{v}_0^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i})^2}_{T_{rot}}
 \end{aligned}$$

2. 0 festgehalten im IS:  $\vec{v}_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= M \cdot (\vec{\omega} \times \vec{S}) \\
 T_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i})^2
 \end{aligned}$$

## 4.2 Rotationsenergie und Trägheitstensor

- Rotationsenergie:  $(\vec{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^T, \vec{r}_{0i} = (x_1^{0i} x_2^{0i} x_3^{0i})^T)$

$$\begin{aligned}
 T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i})^2}_{\vec{\omega}^2 r_{0i}^2 - (\vec{\omega} r_{0i})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left( \sum_{m=1}^3 \omega_m^2 \cdot r_{0i}^2 - \left( \sum_{m=1}^3 \omega_m \cdot x_m^{0i} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left( \sum_{m=1}^3 \omega_m^2 \cdot r_{0i}^2 - \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \omega_m \cdot x_m^{0i} \cdot \omega_n \cdot x_n^{0i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left( \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (r_{0i}^2 \cdot \delta_{mn} - x_m^{0i} \cdot x_n^{0i}) \cdot \omega_n \cdot \omega_m \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_m \cdot \omega_n
 \end{aligned}$$

mit

$$\Theta_{mn} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot (r_{0i}^2 \cdot \delta_{mn} - x_m^{0i} \cdot x_n^{0i})$$

(Komponenten des Trägheitstensors)

- Bemerkungen:



- Wortwahl: „Trägheit“ wie „träge Masse“  $m$  in  $T = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ , „Tensor“ wegen Matrixform, Transformationsverhalten

$$\hat{\Theta} = (\Theta_{mn}) \quad m, n \in \{1, 2, 3\}$$

- Komponenten des Trägheitstensors beziehen sich auf das gewählte körperfeste Bezugssystem

### 4.3 Steinerscher Satz

$$\Theta'_{mn} = \Theta_{mn} + M \cdot (a^2 \cdot \delta_{mn} - a_m \cdot a_n)$$

mit

- $\Theta_{mn}$ : Trägheitstensor für Ursprung 0 im Schwerpunkt
- $\Theta'_{mn}$ : Trägheitstensor für Ursprung  $0'$  um  $\vec{a}$  von Schwerpunkt entfernt
- $M \cdot (a^2 \delta_{mn} - a_m \cdot a_n)$ : Trägheitstensor einer Masse  $M$  am Punkt  $\vec{a}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Theta'_{mn} &= \sum_{i=1}^N m_i ((r_{0i}^{\vec{r}} - \vec{a})^2 \delta_{mn} - (x_m^{0i} - a_m) \cdot (x_n^{0i} - a_n)) \\ &= \Theta_{mn} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{a}^2 \cdot \delta_{mn} - a_m \cdot a_n)}_M + \sum_{i=1}^N m_i (-2\vec{a} \cdot r_{0i}^{\vec{r}} \delta_{mn} + x_m^{0i} a_n + x_n^{0i} \cdot a_m) \end{aligned}$$

mit

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot r_{0i}^{\vec{r}} = M \cdot \vec{S} = 0 \quad \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_{m/n}^{0i} = M \cdot S_{m/n} = 0$$

da  $\vec{S} = 0$  nach Voraussetzung

### 4.4 Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_n \cdot \omega_m \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \frac{\omega_m}{\omega} \cdot \frac{\omega_n}{\omega} \cdot \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} J_{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega}^2 \end{aligned}$$

mit

$$J_{\vec{\omega}} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \frac{\omega_m}{\omega} \cdot \frac{\omega_n}{\omega}$$

(Trägheitsmoment bezogen auf Achse  $\vec{\omega}$ )

Bemerkungen:

- Trägheitstensor beschreibt starren Körper für beliebige Rotationsachsen.
- Trägheitsmoment bezieht sich immer auf eine bestimmte gewählte Achse.

#### 4.5 Drehimpuls und Trägheitstensor

- Drehimpuls bezogen auf Ursprung von körperfestem Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_{0i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i}) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{0i}^2 - \vec{r}_{0i} \cdot (\vec{r}_{0i} \cdot \vec{\omega})) \\
 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^N m_i \cdot (r_{0i}^2 \cdot \delta_{mn} - x_m^{0i} \cdot x_n^{0i}) \cdot \omega_n \cdot \vec{e}_m \\
 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_n \cdot \vec{e}_m \\
 &\stackrel{!}{=} \sum_{m=1}^3 L_m \cdot \vec{e}_m \\
 \Rightarrow L_m &= \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_n \\
 \vec{L} &= \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

- Bemerkung: Im Allgemeinen  $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

#### 4.6 Hauptachsentransformation

- Bestimme Eigenwerte  $\lambda$ , Eigenvektoren  $\vec{\omega}$  von  $\hat{\Theta}$

$$(\hat{\Theta} - \lambda \cdot E) \cdot \vec{\omega} = 0$$

- Lineare Algebra:  $\hat{\Theta}$  symmetrisch, also  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_j = 0$  für  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , also 3 orthogonale Eigenvektoren (Hauptträgheitsachsen)  $\vec{\omega}_i$  und 3 Hauptträgheitsmomente  $\lambda_i$
- im Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- Bemerkung: Für  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_i$  gilt:

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}_i = \lambda_i \cdot \vec{\omega}_i \parallel \vec{\omega}_i$$

#### 4.7 Kontinuierliche Masseverteilung

- Masse:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \rightarrow \quad M = \iiint \varrho(\vec{r}) dV$$

- Trägheitstensor:

$$\Theta_{mn} = \iiint \varrho(\vec{r}) \cdot (r^2 \cdot \delta_{mn} - x_m \cdot x_n) dV$$

- Beispiel: homogener Zylinder ( $\rho = \text{const.}$ )

$$\begin{aligned} \Phi(a, \varphi, z) &= \begin{pmatrix} a \cdot \cos \varphi \\ a \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ dV &= \Phi'(a, \varphi, z) = a \, da \, d\varphi \, dz \\ M &= \sum \rho \iiint dV = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R a \, da \\ &= \rho \cdot H \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi \cdot \rho \cdot R^2 \cdot H \\ \Theta_{33} &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R a \cdot \left( \underbrace{r^2}_{a^2+z^2} - \underbrace{x_3 \cdot x_3}_{z^2} \right) da \\ &= \rho \cdot H \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 \\ &= \frac{\rho}{2} \cdot \pi \cdot H \cdot R^4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \\ \Theta_{13} &= \rho \iiint (- \underbrace{x_1}_{a \cdot \cos \varphi} \cdot \underbrace{x_3}_z) dV \\ &= -\rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \, dz \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R a \cdot a \, da \\ &= 0 \\ \hat{\Theta} &= M \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} H^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} H^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} R^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Zusammenfassung:

- Trägheitstensor bzgl. des körperfesten Bezugssystems KS

$$\Theta_{mn} = \iiint \rho(\vec{r}) \cdot (\delta_{mn} \cdot r^2 - x_m \cdot x_n) dV$$

Eigenschaften:

- \* abhängig von Ursprung und Orientierung von KS
- \* diagonal, falls KS entlang Hauptträgheitsachsen
- \* zeitunabhängig

- Trägheitsmoment bzgl. Achse  $\vec{\omega}$ :

$$J_{\vec{\omega}} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \frac{\omega_m}{|\omega|} \cdot \frac{\omega_n}{|\omega|}$$

- Drehimpuls bzgl. Ursprung von KS

$$\begin{aligned} L_m &= \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_n \\ \vec{L} &= \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

- kinetische Energie:

$$T = T_{Trans} + T_{Rot}$$

falls

1. Ursprung 0 von KS in Schwerpunkt  $\vec{S}$
2. Ursprung 0 von KS festgehalten in IS ( $T_{Trans} = 0$ )

mit

$$T_{Rot} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_m \cdot \omega_n = \frac{1}{2} J_{\vec{\omega}} \cdot \omega^2$$

- Beispiel: Physikalisches Pendel

– Sei

$$\begin{aligned} T &= T_{Trans} + T_{Rot} \\ &= \frac{1}{2} M \cdot \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Theta_{mn} \cdot \omega_m \cdot \omega_n \end{aligned}$$

mit  $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$  (also nur  $\Theta_{33}$  wichtig)

1. Ursprung 0 von KS in Schwerpunkt

$$\begin{aligned} |\vec{v}_0| &= a \cdot \dot{\varphi} \\ T_S &= \frac{1}{2} M \cdot a^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{33}^S \cdot \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cdot (M a^2 + \Theta_{33}^S) \end{aligned}$$

2. Ursprung 0 von KS in Achse A

$$\begin{aligned} |\vec{v}_0| &= 0 \\ \Theta_{33}^A &= \Theta_{33}^S + M \cdot a^2 \\ T_A &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cdot (\Theta_{33}^S + M a^2) = T_S \end{aligned}$$

- Bemerkung: Für jede andere Wahl von Ursprung von KS ist die kinetische Energie nicht mehr gleich  $T_{Trans} + T_{Rot}$
- Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{1}{2} \hat{\Theta}_{33}^A \cdot \dot{\varphi}^2 + M \cdot g \cdot a \cos \varphi$$

Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \\ \Theta_{33}^A \cdot \ddot{\varphi} + M \cdot g \cdot a \cdot \sin \varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{M}{\Theta_{33}^A} \cdot g \cdot a \cdot \sin \varphi \\ &= -\frac{g}{\ell_{\text{eff}}} \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

mit effektiver Pendellänge

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{\Theta_{33}^A}{M \cdot a} = a + \frac{\Theta_{33}^S}{M \cdot a}$$

Spezialfall: mathematisches Pendel ( $\Theta_{33}^S = 0$ )

$$\ell_{\text{eff}} = a$$

## 4.8 Eulersche Gleichungen

- Drehimpulssatz:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \text{ mit } \vec{L} = \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}$$

bezogen auf Ursprung 0 von KS. Wähle rotierendes körperfestes Bezugssystem (damit  $\Theta_{mn}$  zeitlich konstant)

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} (\hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{IS} &= \vec{M} \\ \left( \frac{d}{dt} (\hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{KS} + \vec{\omega} \times (\hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}) &= \vec{M} \end{aligned}$$

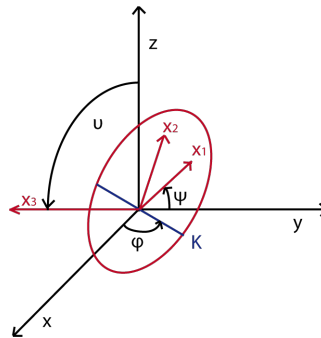
Wähle als körperfestes KS das Hauptachsensystem

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

Eulersche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \cdot \omega_3 \cdot \omega_2 &= M_1 \\ \Theta_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot \omega_1 \cdot \omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3 \cdot \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega_2 \cdot \omega_1 &= M_3 \end{aligned}$$

- Bemerkung: Drehmomentkomponenten  $M_1, M_2, M_3$  beziehen sich auf körperfestes Bezugssystem  
 $\Rightarrow$  komplizierte Zeitabhängigkeit, da von Bewegung des Körpers abhängig
- Eulersche Winkel beschreiben Lage des körperfesten Koordinatensystems  $(x_1, x_2, x_3)$  zu Inertialsystem  $(x, y, z)$



$$\varphi := \angle(x, K) \quad \psi := \angle(K, x_1) \quad \vartheta := \angle(z, x_3)$$

Ebene  $x_1, x_2$  schneidet Ebene  $x, y$  in Linie  $K$

- Zusammenhang Winkelgeschwindigkeit in KS zu Änderung der Eulerschen Winkel  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \psi + \dot{\vartheta} \cdot \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \psi - \dot{\vartheta} \cdot \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Herleitung:

1. Drehungen vertauschen i.A. nicht möglich

2. Infinitesimale Drehungen können vertauscht werden

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\vec{r}_a + d\vec{r}_b \\ &= d\vec{\varphi}_a \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_b \times (\vec{r} + d\vec{r}_a) \\ &= (d\vec{\varphi}_a + d\vec{\varphi}_b) \times \vec{r} \end{aligned}$$

Winkelgeschwindigkeiten addieren sich also

$$d\vec{\varphi}_a = \vec{\omega}_a dt$$

3. Es muss gelten:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_k + \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z + \dot{\psi} \cdot \vec{e}_3 \stackrel{!}{=} \omega_1 \cdot \vec{e}_1 + \omega_2 \cdot \vec{e}_2 + \omega_3 \cdot \vec{e}_3$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_k &= \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 - \sin \psi \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &= \cos \vartheta \cdot \vec{e}_3 + \sin \theta \cdot (\sin \psi \cdot \vec{e}_1 + \cos \psi \cdot \vec{e}_2) \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Zusammenhangs in eulersche Gleichungen sowie  $M_1(\varphi, \psi, \vartheta)$ ,  $M_2(\varphi, \psi, \vartheta)$ ,  $M_3(\varphi, \psi, \vartheta)$  liefert 3 DGL 2. Ordnung für  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\vartheta(t)$

#### 4.9 Rotation um freie Achse

- freie Achse: Körper rotiert um feste Achse im körperfesten KS bei  $\vec{M} = 0$ . Gibt es das?
- Betrachte Eulersche Gleichungen für  $\dot{\omega}_i = 0$  für  $i = 1, 2, 3$  und  $\vec{M} = 0$ , allgemeiner Fall ( $\Theta_i \neq \Theta_j$  für  $i \neq j$ )

$$\begin{aligned} (\Theta_3 - \Theta_2) \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 &= 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot \omega_1 \cdot \omega_3 &= 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt für

1.  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_1$  beliebig
  2.  $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_2$  beliebig
  3.  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3$  beliebig
- freie Rotation entspricht gleichförmige Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen von KS
  - Wie ändert sich dabei die Lage von KS in IS?

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const. in IS}$$

Damit:

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \cdot \Theta_i \cdot \vec{e}_i = \text{const}$$

d.h. freie Rotation entspricht gleichförmige Rotation um Achse konstanter Richtung in IS

- Stabilität der Lösungen wichtig

#### 4.10 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

- Kreisel: starrer Körper mit einem festgehaltenen Punkt  $\rightarrow$  3 Freiheitsgrade der Rotation
- symmetrischer Kreisel:  $\exists i, j, i \neq j : \theta_i = \theta_j$ . Im Folgenden sei o.B.d.A.  $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$  (insbesondere rotationssymmetrischer Körper bzgl.  $x_3$ -Achse)
- Sei  $\vec{M} = 0$ . Euler-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \theta_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_1) \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 &= 0 \\ \theta_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_2) \cdot \omega_1 \cdot \omega_3 &= 0 \\ \theta_3 \cdot \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_3^0 = \text{const.} \\ \omega_2 &= a \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi_0) \\ \omega_1 &= a \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi_0) \end{aligned}$$

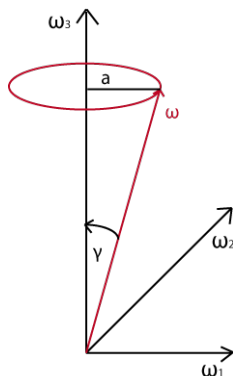
mit

$$\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} \cdot \omega_3^0$$

Damit:

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + (\omega_3^0)^2 = \text{const.}$$

d.h.  $\vec{\omega}$  hat konstante Länge und rotiert mit Frequenz  $\Omega$  auf Kreiskegel um die Figurenachsens  $x_3$



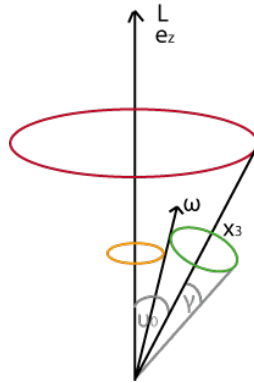
- Bemerkung:  $(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)$  ist die Lage der momentanen Rotationsachse in KS, falls  $a=0$  ist Rotationsachse = Figurenachsens
- Wie sieht die Bewegung in IS aus?

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Wähle  $\vec{L} = L \cdot \vec{e}_z$  im Inertialsystem.  $\vec{L}$  in KS:

$$\begin{pmatrix} \vec{L} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{L} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{L} \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \theta_1 \cdot \omega_1 \\ \theta_2 \cdot \omega_2 \\ \theta_3 \cdot \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Polkegel (dies könnte der starre Körper sein) rollt auf Spurkegel ab, sodass Figurenachsens präzediert



$$\vartheta_0 = \text{const.} \quad \varphi = \frac{a}{\sin \vartheta_0} \cdot t + \varphi_0$$

rot: Präzessionskegel   grün: Polkegel   orange: Spurkegel



# 5

## Relativitätstheorie

### 5.1 Relativitätsprinzip

- 1. Axiom: Es existieren Inertialsysteme (Maßstäbe, Uhren).
- 2. Axiom: Inertialsysteme sind mit physikalischen Mitteln à priori nicht unterscheidbar, also keine Messung von Absolutgeschwindigkeiten möglich (spezielles Relativitätsprinzip)
- Newton:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

forminvariant (kovariant) unter Galilei-Transformation

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow m \cdot \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$$

mit  $t = t'$  und  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_r \cdot t$ , also Beschleunigung absolut messbar

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{v} \quad \frac{d}{dt'} \vec{r}' = \vec{v} - \vec{v}_r \quad \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_r$$

- Elektrodynamik:

1. in IS:

$$\vec{c} = \vec{e} \cdot c \quad \vec{e}^2 = 1$$

2. in IS' mit Relativgeschwindigkeit, dann mit Galileo-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{c}' &= \vec{c} - \vec{v}_r \\ \vec{c}'^2 &= \vec{c}^2 - 2 \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{c} + \vec{v}_r^2 \\ &= c^2 + v_r^2 - 2 \cdot v_r \cdot c \cdot \cos \angle(v_r, c) \end{aligned}$$

also  $\vec{c}'^2$  richtungsabhängig, also Absolutgeschwindigkeit messbar  
→ Verletzung des speziellen Relativitätsprinzips

- Experiment von Michelson-Morley

1. Lichtgeschwindigkeit ist isotrop
2. hängt nicht vom Bewegungszustand der Lichtquelle ab

- 3. Axiom: Universalität der Lichtgeschwindigkeit, also  $|c| = \text{const.}$  in allen Inertialsystemen, damit unabhängig von Betrag und Richtung der Quelle.

- Damit gilt für Licht:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 &= c^2 & \left( \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right)^2 &= c^2 \\ \underbrace{c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2}_{(ds)^2} &= 0 & \underbrace{c^2(dt')^2 - (d\vec{r}')^2}_{(ds')^2} &= 0 \\ \Rightarrow (ds)^2 &= (ds')^2 = 0 \end{aligned}$$

- $ds$  heißt der Abstand zweier Ereignisse. Für zwei Ereignisse, die durch Lichtgeschwindigkeit verbunden sind, ist der Ereignisabstand 0.
- Satz: Für zwei Ereignisse ist der Ereignisabstand invariant.

$$(ds)^2 = f(\vec{v}_r, \vec{r}, t) \cdot (ds')^2$$

- Homogenität von Raum und Zeit:

$$f(\vec{v}_r, \vec{r}, t) = f(\vec{v}_r)$$

Isotropie des Raumes:

$$f(\vec{v}_r) = f(v_r)$$

- Betrachte 3 Inertialsysteme  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ .  $\Sigma_1$  bewege sich relativ zu  $\Sigma$  mit  $\vec{v}_1$  und  $\Sigma_2$  bewege sich relativ zu  $\Sigma$  mit  $\vec{v}_2$ , damit auch  $\Sigma_2$  relativ zu  $\Sigma_1$  bewegt

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= f(v_1) \cdot (ds_1)^2 \\ (ds)^2 &= f(v_2) \cdot (ds_2)^2 \\ (ds_2)^2 &= f(v_{21}) \cdot (ds_1)^2 \end{aligned}$$

Eliminieren der Ereignisabstände

$$f(v_{21}) = \frac{f(v_1)}{f(v_2)}$$

dabei  $f(v_{21})$  winkelabhängige Größe und  $f(v_1) \cdot f(v_2)$  winkelunabhängig, also folgt wegen  $f^2 = f$  und  $f = \text{const}$ , dass  $f \in \{0, 1\}$ , somit

$$\begin{aligned} f(v) &= \text{const.} = 1 \\ (ds)^2 &= (ds')^2 \end{aligned}$$

für alle Ereignisse.

## 5.2 Herleitung der Lorentz-Transformation

- Sei  $\vec{v} = \vec{v}_r$  die Relativgeschwindigkeit.
- Ansatz:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \left( \alpha \cdot E + \beta \cdot \frac{\vec{v}}{v} \circ \frac{\vec{v}}{v} \right) \cdot \vec{r} + b \cdot \vec{v} \cdot t \\ t' &= \gamma \cdot t - \delta \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \end{aligned}$$

- Homogenität von Raum und Zeit:
  - Linearität der Transformation
  - Funktionen nur abhängig von  $\vec{v}$
- Isotropie des Raumes: Transformation kann nicht von Richtung abhängen

$$\alpha = \alpha(v) \dots \delta = \delta(v)$$

- für  $\vec{v} = 0$ : identische Transformation,  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  fallen bei  $t = 0$  übereinander und haben parallele Achsen  
 $\Rightarrow \alpha = 1, \gamma = 1$

- für  $\vec{r}' = 0$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= -\vec{v} \cdot t' \\ &= b \cdot \vec{v} \cdot t \quad t' = \gamma \cdot t \\ \Rightarrow \frac{b}{\gamma} &= -1 \\ \Rightarrow b &= -\gamma\end{aligned}$$

- für  $\vec{r}' = 0$ :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{v} \cdot t \\ (\alpha + \beta - \gamma) \cdot \vec{v} \cdot t &= \vec{r} \\ \Rightarrow \alpha + \beta &= \gamma\end{aligned}$$

- Aus Invarianz des Ereignisabstandes folgt:

$$\begin{aligned}d\vec{r}' &= (\alpha \cdot E + \beta \cdot \frac{\vec{v}}{v} \circ \frac{\vec{v}}{v}) \cdot d\vec{r} + \beta \cdot \vec{v} \cdot dt \\ dt' &= \gamma \cdot dt + \delta \cdot \frac{\vec{v} \cdot d\vec{r}}{c^2} \\ \Rightarrow \underbrace{c^2(dt')^2 - d(\vec{r}')^2}_{(ds')^2} &= \underbrace{(\dots)}_1 \cdot \underbrace{(c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2)}_{(ds)^2} \\ \Rightarrow \gamma^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \gamma = +\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \delta &= -\gamma \\ \beta &= \gamma - 1\end{aligned}$$

- allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1) \cdot \left( \frac{\vec{v}}{v} \circ \frac{\vec{v}}{v} \right) \cdot \vec{r} - \gamma \cdot \vec{v}_r \cdot t \\ t' &= \gamma \cdot \left( t - \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{r}}{c^2} \right)\end{aligned}$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- für  $v_r \ll c$ :

$$\begin{aligned}\gamma &\approx 1 \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}_r \cdot t \\ t' &= t\end{aligned}$$

(Galilei-Transformation)

- spezielle Lorentz-Transformation:  $\vec{v}_r = v_r \cdot \vec{e}_x$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1) \cdot \left( \frac{v_r \cdot \vec{e}_x \circ v_r \cdot \vec{e}_x}{v_r^2} \right) \cdot \vec{r} - \gamma \cdot v_r \cdot \vec{e}_x \cdot t \\ t' &= \gamma \cdot \left( t - \frac{v_r}{c} \cdot \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{e}_x}_x \right) = \gamma \cdot \left( t - \frac{v_r}{c^2} \cdot x \right)\end{aligned}$$

in Komponenten:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma \cdot (x - v_r \cdot t) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \cdot \left(t - \frac{v_r}{c^2} \cdot x\right)\end{aligned}$$

## 5.3 Konsequenzen aus Lorentz-Transformation

### 5.3.1 Geschwindigkeitsaddition

- in  $\Sigma$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- in  $\Sigma'$ :

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

- Lorentztransformation:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma - 1) \cdot \left(\frac{\vec{v}_x \circ \vec{v}_r}{v_r} \cdot \vec{v} - \gamma \cdot \vec{v}_r\right)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}}{c^2}\right)}$$

speziell für  $\frac{\vec{v}_r}{v} = \vec{e}_x$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{\vec{v} + (\gamma - 1) \cdot v_x \cdot \vec{e}_x - \gamma \cdot v_r \cdot \vec{e}_x}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v_x \cdot v_r}{c^2}\right)} \\v'_x &= \frac{v_x - v_r}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v_x \cdot v_r}{c^2}\right)} \\v'_y &= \frac{v_y}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v_x \cdot v_r}{c^2}\right)} \\v'_z &= \frac{v_z}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{v_x \cdot v_r}{c^2}\right)}\end{aligned}$$

### 5.3.2 Längenkontraktion

- Meßprozess bei bewegtem Maßstab: Lage der Endpunkte eines Maßstabs zu gleichen Zeiten nehmen
- Maßstab ruht in  $\Sigma$ , hat Länge  $\Delta l_0$
- in  $\Sigma'$ :

$$\begin{aligned}\Delta l' &= \gamma \cdot (\Delta l_0 - v_r \cdot \Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma \cdot \left(\Delta t - \frac{v_r}{c^2} \cdot \Delta l_0\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Delta l' &= \Delta l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} < \Delta l_0\end{aligned}$$

bewegte Maßstäbe erscheinen kürzer (Längenkontraktion)

### 5.3.3 Zeitdilatation

- Beobachter in  $\Sigma$  sendet zu 2 Zeiten Blitze aus, in  $\Sigma'$ :

$$\Delta \tau = t_2 - t_1$$

- in  $\Sigma'$ :

$$\begin{aligned}t'_1 &= \gamma \cdot \left( t_1 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_0 \right) \\t'_2 &= \gamma \cdot \left( t_2 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_0 \right) \\ \Rightarrow t'_2 - t'_1 &= \gamma \cdot (t_2 - t_1) \\ \Delta t' &= \gamma \cdot \Delta \tau > \Delta \tau =: \text{Eigenzeit}\end{aligned}$$

Zeitdehnung in bewegten Bezugssystemen

- Die gleiche Aussage würde Beobachter S, der eine mit  $v_r$  bewegte Uhr beobachtet, an der  $\Delta \tau$  vergeht, treffen. Eigenzeit in  $\Sigma'$ :

$$\Delta t' = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Da in  $\Sigma$  die Uhr ruht:  $d\vec{r} = 0$ ,

$$ds^2 = c^2 \cdot d\tau^2$$

### 5.3.4 Relativität der Gleichzeitigkeit

- in  $\Sigma$ : Ereignis  $E_1$  bei  $t_1, x_1$ , Ereignis  $E_2$  bei  $t_2 = t_1, x_2$
- in  $\Sigma'$ :  $E_1$  bei

$$t'_1 = \gamma \cdot \left( t_1 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_1 \right)$$

Ereignis  $E_2$  bei

$$t'_2 = \gamma \cdot \left( t_1 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_2 \right)$$

Damit:

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v_r}{c^2} \cdot \underbrace{\gamma \cdot (x_2 - x_1)}_{\neq 0} \neq 0$$

### 5.3.5 Kausalität

- in  $\Sigma$ : „Ursache“  $E_1$  bei  $x_1, t_1$  und „Wirkung“  $E_2$  bei  $x_2, t_2$
- Lässt sich ein Inertialsystem finden, in dem Ursache und Wirkung vertauscht sind?
- Satz: Falls zwei Ereignisse in  $\Sigma$  kausal verbunden sind, bleiben sie es auch in jedem anderen Inertialsystem.

Beweis:

– indirekter Beweis: Sei  $t'_2 - t'_1 < 0$ .

$$\begin{aligned}t'_1 &= \gamma \cdot \left( t_1 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_1 \right) \\t'_2 &= \gamma \cdot \left( t_2 - \frac{v_r}{c^2} \cdot x_2 \right)\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}t'_2 - t'_1 &= \gamma \cdot (t_2 - t_1) - \gamma \cdot \frac{v_r}{c^2} \cdot (x_2 - x_1) < 0 \\t_2 - t_1 &< \frac{v_r}{c^2} \cdot (x_2 - x_1) \\1 &< \frac{v_r}{c^2} \cdot \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{v_w} \\1 &< \left| \frac{v_r \cdot v_w}{c^2} \right| \cdot \underbrace{\text{sign}(v_r) \cdot \text{sign}(x_2 - x_1)}_a\end{aligned}$$

1.  $a < 0$ : Widerspruch
2.  $a > 0$ :

$$\begin{aligned}
 1 &< \left| \frac{v_r}{c} \right| \cdot \left| \frac{v_w}{c} \right| \\
 &< \left| \frac{v_w}{c} \right| \\
 \Rightarrow v_w &> c
 \end{aligned}$$

- gleiche Argumentation mit umgekehrten Relationszeichen ( $t'_2 - t'_1 > 0$ ): Kausalitätsbedingung

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right| < c$$

#### 5.4 Minkowski-Diagramm

- Licht:

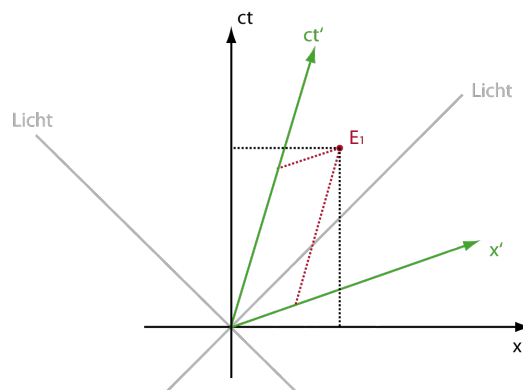
$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= 0 \\
 \Rightarrow |c \cdot dt| &= |dx| \\
 |c| &= \left| \frac{dx}{dt} \right| \\
 1 &= \left| \frac{dx}{d(ct)} \right|
 \end{aligned}$$

- Suche nach Zeitachse für  $\Sigma'$ :

$$\begin{aligned}
 x' = 0 &= \gamma \cdot (x - v_r \cdot t) \\
 \Rightarrow x &= \frac{v_r}{c} \cdot ct
 \end{aligned}$$

- Raumachse für  $\Sigma'$ :

$$t' = 0 \Rightarrow ct = \frac{v_r}{c} \cdot x$$



- Unterteilung:

- $(ds)^2 = 0$ : lichtartig
- $(ds)^2 > 0$ : zeitartig
- $(ds)^2 < 0$ : raumartig

## 5.5 Formulierung der Mechanik in kovarianter Form

### 5.5.1 Minkowski-Raum, Vierervektoren

- Festlegung:  $\mu, \nu \in \{0, \dots, 3\}$  und  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$
- 4-dimensionaler Raum  $x^\mu$ :

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

kontravarianter Vektor

- Linienelement:

$$(ds)^2 = (c \cdot dt)^2 - (d\vec{r})^2$$

- kovianter Vektor:

$$x_\mu = (ct \quad -x \quad -y \quad -z) = (ct \quad -\vec{r})$$

Damit:

$$x_\mu \cdot x^\mu = (ct)^2 - \vec{r}^2 = s^2$$

$$x_\mu^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{S_{\mu\nu}} \cdot x^\nu$$

- spezielle Lorentz-Transformation:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v_x}{c} \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_\nu^\mu} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \frac{v_x}{c} \cdot \gamma & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{c} \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_\mu^\nu} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Kurz:

$$x^\mu = L_\nu^\mu \cdot x^\nu$$

$$x_\mu = L_\mu^\nu \cdot x_\nu$$

Es gilt:

$$L_\mu^\nu \cdot L_\nu^\mu = \delta_\mu^\nu$$

- kontravarianter Vektor transformiert sich wie  $dx^\mu$ , kovariante Vektoren transformieren sich wie  $dx_\mu$ , d.h.

$$a'^\mu = L_\nu^\mu \cdot a^\nu$$

$$a'_\mu = L_\mu^\nu \cdot a_\nu$$

### 5.5.2 Vierergeschwindigkeit

- invariant mit Zeitdimension: Eigenzeit

$$v^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu$$

- Vierervektor der Geschwindigkeit

$$v^\mu = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} v_\mu \cdot v^\mu &= \gamma^2 \cdot (c \quad -\vec{v}) \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \cdot (c^2 - \vec{v}^2) \\ &= c^2 \cdot \gamma^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 \end{aligned}$$

### 5.5.3 Relativistische Dynamik

- Viererbeschleunigung:

$$\frac{d}{d\tau} v^\mu$$

- Definition von Kraft mit Ruhemasse  $m_0$  (Invariante)

$$m_0 \cdot \frac{d}{d\tau} v^\mu =: K^\mu \quad K = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

- Raumkomponente:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= m_0 \cdot \frac{d}{d\tau} (\gamma \cdot \vec{v}) \\ &= m_0 \cdot \gamma \cdot \frac{d}{dt} (\gamma \cdot \vec{v}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{v}) &= \frac{1}{\gamma} \cdot \vec{K} \end{aligned}$$

für  $c \rightarrow \infty$ :  $\gamma \rightarrow 1$ :

$$m_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{K}$$

Definiere  $\vec{p} = m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{v}$  als relativistischen Impuls.

- Zeitkomponente: Da die Norm von  $v$  konstant ist, gilt  $a \perp v$ , daher folgt wegen  $a \parallel K$ , dass

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (c \quad -\vec{v}) \cdot \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix} &= 0 \\ c \cdot K^0 &= \vec{v} \cdot \vec{K} = \vec{v} \cdot \gamma \cdot F \\ \Rightarrow K^0 &= \gamma \cdot \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Damit:

$$K^\mu = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\frac{d}{dt} (mc^2) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$



### 5.5.4 Zusammenfassung

- Vierer-Skalar: invariant unter Lorentz-Transformation

- Lichtgeschwindigkeit  $c$
- Ruhemasse  $m_0$
- Abstandskadrat vom Ursprung im Minkowski-Raum

$$x_\alpha \cdot x^\alpha = (ct)^2 - \vec{r}^2 \text{ mit } x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

- Wegelement im Minkowski-Raum

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx_\alpha \cdot dx^\alpha} \\ &= \sqrt{(c \cdot dt)^2 - (d\vec{r})^2} \\ &= c \cdot dt \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} \\ &= c \cdot dt \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\frac{1}{\gamma}} = \frac{c}{\gamma} dt \end{aligned}$$

- Eigenzeitdifferential

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma}$$

- Vierervektoren: transformieren sich unter Lorentz-Transformation wie Raumzeit-Punkt

- Raumzeit-Punkt  $x_\alpha, x^\alpha$
- Vierergeschwindigkeit

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Bilde Vierer-Skalar:

$$u_\alpha \cdot u^\alpha = \gamma^2 \cdot (c^2 - \vec{v}^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

- Vierer-Impuls:

$$p^\alpha = m_0 \cdot u^\alpha = \gamma \cdot m_0 \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

- relative Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} K^\alpha &:= \frac{d}{d\tau} p^\alpha = \gamma \cdot \frac{d}{dt} \left( \gamma \cdot m_0 \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \right) \\ &= \gamma \cdot \begin{pmatrix} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} \\ \vec{F} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

räumliche Komponente wie bei Newton, aber mit relativistischer Masse  $m := \gamma \cdot m_0$ :

$$\frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \vec{F}$$

bzw. mit relativistischen Impuls  $\vec{p}_r := m \cdot \vec{v} = m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{v}$ :

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_r = \vec{F}$$

zeitliche Komponente:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2)}_{\text{Energie}} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{Leistung}}$$

relativistische Energie:

$$E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Für  $v \ll c$ :

$$\begin{aligned} E &\approx m_0 \cdot c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 \end{aligned}$$

Ruhemasse  $m_0 > 0$ :

$$\lim_{E \rightarrow \infty} v = c \quad (v < c)$$

Ruhemasse  $m_0 = 0$ :

$$v = c$$

Relativistische kinetische Energie:

$$T = E - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1)$$

Damit Vierer-Impuls (auch Energie-Impuls-Vierervektor)

$$p^\alpha = \gamma \cdot m_0 \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p}_r \end{pmatrix}$$

⇒ Energieerhalt und Impulserhaltung sind gekoppelt

$$\begin{aligned} p_\alpha \cdot p^\alpha &= \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}_r^2 = m_0^2 \cdot u_\alpha \cdot u^\alpha = m_0 \cdot c^2 \\ \Rightarrow E^2 &= m_0^2 \cdot c^4 + c^2 \cdot \vec{p}_r^2 \end{aligned}$$

Für  $|\vec{p}_r| \ll m_0 \cdot c$ :

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(m_0 \cdot c^2)^2 + (\vec{p}_r)^2} \\ &= m_0 \cdot c^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{\vec{p}_r^2}{m_0^2 \cdot c^4}} \\ &\approx m_0 \cdot c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{p}_r^2}{m_0^2 \cdot c^2} \right) \\ &= m_0 \cdot c^2 + \frac{\vec{p}_r^2}{2m_0} \end{aligned}$$

Für  $|\vec{p}_r| \gg m_0 \cdot c$ :

$$E \approx c \cdot |\vec{p}_r|$$

Für  $m_0 = 0$ :

$$E = c \cdot |\vec{p}_r|$$

# 6

## Nichtlineare Dynamik

- Dynamisches System:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

Beispiel: Hamiltonsche Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix} \quad H = H \left( \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}, t \right)$$

- Autonomes System:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(x)$$

- Lösung: Trajektorie  $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$  mit Anfangsbedingung

$$\vec{x}(\vec{x}_0, t = t_0) = \vec{x}_0$$

Existenz und Eindeutigkeit, falls  $f$  stetig differenzierbar ist. Trajektorien schneiden sich also nicht.

⇒ Determiniertheit (→ deterministisches Chaos)

- Gleichgewichtslage  $\vec{x}_s$ :

$$\vec{f}(\vec{x}_s) = 0 \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \vec{x} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_s} = 0$$

Beispiel: Teilchen in einem periodischen Potential

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot q}{a}\right)$$
$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ V_0 \cdot \frac{2\pi}{a} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot q}{a}\right) \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtslage:

$$p_g = 0 \quad q = \frac{a}{2} \cdot z \quad z \in \mathbb{Z}$$

- Dynamik nahe Gleichgewichtslage:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{f}(\vec{x}_G)}_0 + \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_G}}_{=:A} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_G) + \dots$$

Verschiebe Ursprung in Gleichgewichtslage:  $\vec{x} - \vec{x}_G \rightarrow \vec{x}$ :

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + \dots$$

## 6.1 Linearisierte Dynamik

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$$

- Wie sieht die Dynamik aus?
- Superpositionsprinzip (wegen Linearität):  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  seien Lösungen, dann sind auch  $c_1 \cdot \vec{x}_1 + c_2 \cdot \vec{x}_2$  Lösungen
- Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$$A \cdot \vec{\xi}_n = \lambda_n \cdot \vec{\xi}_n$$

$\lambda_i$  seien nicht entartet. Dann allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \sum_n c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \vec{\xi}_n$$

Bemerkung:  $\lambda_n, \vec{\xi}_n, c_n$  i.A. komplex, aber  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- A reell, also

$$\underbrace{\overline{A}}_A \cdot \overline{\vec{\xi}_n} = \overline{\lambda_n} \cdot \overline{\vec{\xi}_n}$$

- Fallunterscheidung:

1.  $\lambda_n, \xi_n$  reell:

$$\vec{x}_n(t) = e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \vec{\xi}_n$$

$\lambda_n > 0$ : exponentielle Expansion

$\lambda_n < 0$ : exponentielle Kontraktion

2. Paare  $\lambda_n, \lambda_m = \bar{\lambda}_n$  und  $\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_m = \overline{\vec{\xi}_n}$ ,  $\lambda_n = \alpha + i \cdot \omega$

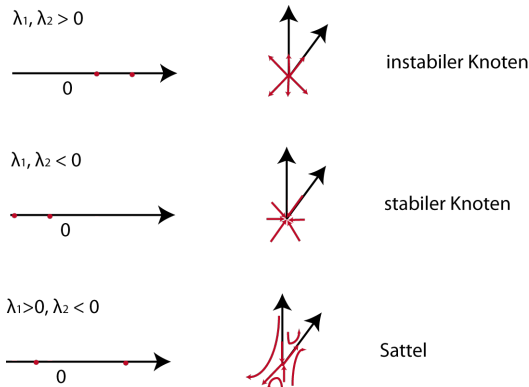
$$\vec{x}_n(t) = c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \vec{\xi}_n + c_m \cdot e^{\bar{\lambda}_n \cdot t} \cdot \overline{\vec{\xi}_n}$$

Es ist  $c_m = \bar{c}_n$ , damit  $\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$

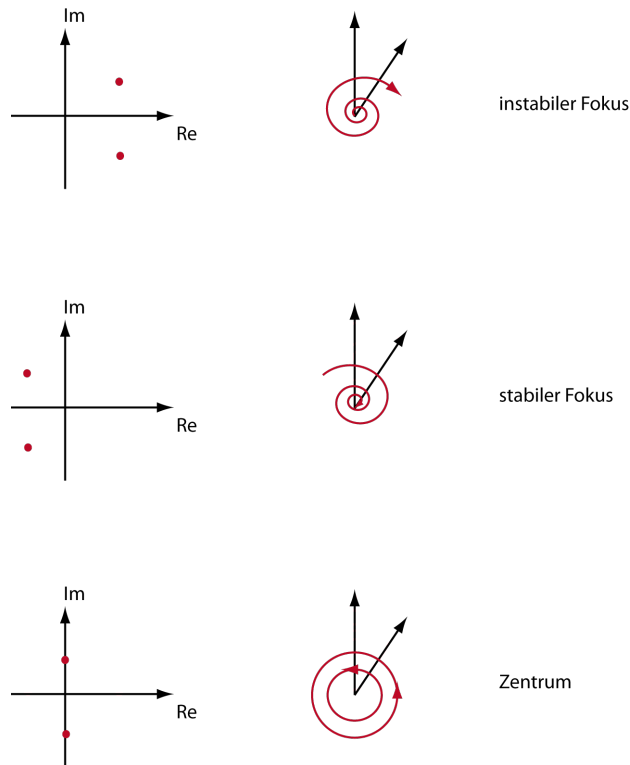
$$\vec{x}_n(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (2\Re(c_n \cdot \vec{\xi}_n) \cdot \cos(\omega \cdot t) - 2\Im(c_n \cdot \vec{\xi}_n) \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

- allgemein: Kombination aus beiden Fällen
- für  $n = 2$ : 2 Eigenwerte

1. beide reell



2. komplex konjugiertes Paar



## 6.2 Hamiltonsche Systeme

### 6.2.1 Linearisierte Dynamik nahe bei Gleichgewichtslage

- $f = 1$ , d.h.  $n = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}$$

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_G} \\ &= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \right|_{\vec{x}_G} & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \right|_{\vec{x}_G} \\ -\left. \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \right|_{\vec{x}_G} & -\left. \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \right|_{\vec{x}_G} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Eigenwert:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E) &= 0 \\ (a - \lambda) \cdot (-a - \lambda) - b \cdot c &= 0 \\ \lambda^2 - a - b \cdot c &= 0 \\ (a + \lambda) \cdot (-a + \lambda) - b \cdot c &= 0 \end{aligned}$$

Also Eigenwertpaare  $\lambda$  und  $-\lambda$

- für  $f = 1$ :
  1. beide reell:  $\pm\lambda$  (Sattel)
  2. beide imaginär:  $\pm i \cdot \omega$  (Zentrum)

### 6.2.2 Integrable Systeme

- Ein System mit  $f$  Freiheitsgraden heißt integrabel, wenn es  $f$  unabhängige Integrale (Konstanten) der Bewegung gibt.
- Es existiert Transformation  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f \rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_f, I_1, \dots, I_f$  mit  $H = H(I_1, \dots, I_f)$ , d.h.  $\varphi_i$  sind zyklische Koordinaten.

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_j} = 0 \quad \Rightarrow I_j = \text{const.} \\ \dot{\varphi}_j &= \frac{\partial H}{\partial I_j} = \text{const.} =: \omega_j \\ \Rightarrow \varphi_j &= \omega_j \cdot t + \varphi_j^0 \end{aligned}$$

i.A. quasiperiodische Bewegung

- Beispiele:
  1.  $f = 1$ :  $I_1 = H$ , also integrabel
  2.  $f = 2$ : Kugelpendel (Energie- und Drehimpulserhaltung)
  3.  $f = 2$ : separables System, d.h.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2)$$

4.  $f = 6$ : Kepler-Problem (Schwerpunktsystem + Relativsystem)

### 6.2.3 Nichtintegrable Systeme

allgemein der Fall ab  $f=2$  autonom und ab  $f=1$  zeitperiodisch

# 7

## Anhang: Herleitung Lorentz-Transformation

Bemerkung: Die Inhalte dieses Anhangs waren nicht Teil der Vorlesung, sondern dienen der Ergänzung. Vielen Dank an Tobias H. für die entsprechende Ausformulierung!

Durch Rotation in den Ortskoordinaten, lässt sich erreichen, dass  $v$  parallel zu  $\vec{e}_x$  ist (Transformation aus  $SO(3)$ ). Es gilt  $(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Wegen  $v \parallel e_x$  folgt  $y' = y$  und  $z' = z$ , also

$$(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2$$

Definiere  $t_+ := ct + x$ ,  $t_- := ct - x$ ,  $t'_+ := ct' + x'$ ,  $t'_- := ct' - x'$ , dann gilt

$$t_+ t_- = t'_+ t'_-$$

Wegen Homogenität von Raum und Zeit muss die Transformation linear sein, d.h.

$$t'_+ = at_+ + bt_- \quad \wedge \quad t'_- = ct_+ + dt_-$$

und somit folgt

$$t_+ t_- = (at_+ + bt_-)(ct_+ + dt_-) \Rightarrow ac = bd = 0 \quad \wedge \quad ad + bc = 1$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $b = c = 0$  (Angenommen  $a = d = 0$ : Dies führt dazu, dass das transformierte Koordinatensystem „andersherum“ orientiert ist. Das ist nicht physikalisch sinnvoll, da eine stetige Abhängigkeit des Koordinatensystems bzgl.  $v$  vorausgesetzt wird und somit die Transformation nicht stetig in Null wäre.). Dann gilt mit  $k := \frac{1}{a} = d$ :

$$t'_+ = \frac{t_+}{k} \quad \wedge \quad t'_- = kt_-$$

sowie

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{2}(t'_+ + t'_-) = \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) ct + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - k \right) x \\ x' &= \frac{1}{2}(t'_+ - t'_-) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - k \right) ct + \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) x \end{aligned}$$

Berechnung von  $k$ : Wegen Homogenität von Raum und Zeit, sowie der Isotropie des Raumes, darf  $k$  nur von  $\|v\|$  abhängen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x' = 0$ , dann  $\frac{1}{k}t_+ = t'_+ = t'_- = kt_-$ , also

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{t_+}{t_-} = \frac{ct + x}{ct - x} = \frac{1 + \frac{x}{ct}}{1 - \frac{x}{ct}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \\ \Rightarrow k &= \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Damit sieht man auch leicht

$$k(-v) = \frac{1}{k(v)}$$

also

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ct - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ct$$

Mit  $\beta := \frac{v}{c}$  und  $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ist

$$\Lambda_0 := \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Transformation und heißt spezielle Lorentz-Transformation. Eine allgemeine Lorentz-Transformation (d.h.  $v$  in beliebiger Richtung) erhält man durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \Lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

mit  $R \in \text{SO}(3)$ .

## 7.1 Geschwindigkeitsaddition

$\Sigma'$  bewege sich mit  $c\beta_0\vec{e}_x$  bzgl.  $\Sigma$  (aus Sicht von  $\Sigma$ ) und Objekt in  $\Sigma'$  bewege sich mit Geschwindigkeit  $\beta'$  (aus Sicht von  $\Sigma'$ ); allgemeine Transformation wieder durch  $R \in \text{SO}(3)$  produzierbar. Invertiert man die Lorentz-Transformation, so erhält man

$$ct = \gamma ct' + \beta_0 \gamma x'$$

$$x = \beta_0 \gamma ct' + \gamma x'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

und somit auch

$$d(ct) = \gamma d(ct') + \beta_0 \gamma dx'$$

$$dx = \beta_0 \gamma d(ct') + \gamma dx'$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

Es folgt

$$\beta_x = \frac{dx}{d(ct)} = \frac{\beta_0 \gamma + \gamma \beta'_x}{\gamma + \beta_0 \gamma \beta'_x} = \frac{\beta_0 + \beta'_x}{1 + \beta_0 \beta'_x}$$

$$\beta_y = \frac{dy}{d(ct)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\beta'_y}{1 + \beta_0 \beta'_x}$$

$$\beta_z = \frac{dz}{d(ct)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\beta'_z}{1 + \beta_0 \beta'_x}$$