Technische Universität Dresden

Skript:

Nichtkooperative Spiele

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Andreas Fischer
Sommersemester 2015
Promotion

Contents

1 Grundlagen

1.1 Definition und Beispiele strategischer Spiele

1.1 Definition Ein *(strategisches) Spiel (in Normalform)* wird beschrieben durch

- eine Menge $\{1, \dots, N\}$ von *Spielern*,
- nichtleere *Strategiemengen* X_ν für jeden Spieler $\nu \in \{1, \dots, N\}$,
- Funktionen $f_\nu : X \to \mathbb{R}$, $\nu \in \{1, \dots, N\}$, sogenannte *Zielfunktion* des Spielers $\nu \in \{1, \dots, N\}$ wobei
$$X := \prod_{\nu=1}^{N} X_\nu$$
Menge aller Strategiekombinationen.

Zur Abkürzung für ein solches Spiel schreibt man $\Gamma := \{f_\nu, X_\nu\}_{\nu=1}^{N}$. Zunächst noch offen: Will Spieler die Zielfunktion maximieren oder minimieren?

1.2 Beispiel (Gefangenendilemma) Zwei Gefangene haben zusammen eine Straftat verübt. Jeder einzelne kann die Tat gestehen (G) oder leugnen (L).

- Gestehen beide, so bekommt jeder 5 Jahre Gefängnis.
- Leugnen beide, so kann ihnen die Straftat zwar nicht nachgewiesen werden, aber trotzdem erhält jeder 2 Jahre Gefängnis wegen unerlaubten Waffenbesitzes.
- Anderenfalls: Der Nichtgeständige bekommt 10 Jahre, der Geständige (wegen Kronzeugenregelung) wird freigelassen.

Modellierung als Spiel: $N = 2$, $X_1 = X_2 = \{L, G\}$, Auszahlungsfunktionen $f_1, f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$,

		Spieler 2	
Spieler 1	f_1	L	G
	L	2	10
	G	0	5

		Spieler 2	
Spieler 1	f_2	L	G
	L	2	0
	G	10	5

Die beiden Auszahlungsfunktionen können in einer Tabelle zusammengefasst werden:

		Spieler 2	
Spieler 1		L	G
	L	(2,2)	(10,0)
	G	(0,10)	(5,5)

Für grün markierte Strategie: Falls nur einer der Spieler seine Strategie ändert, verschlechtert sich seine Zielfunktion ($\to$ Nash-Gleichgewicht).

1.3 Beispiel ("Kampf der Geschlechter") Gemeinsamen Abend entweder im Fußballstadion (F) oder im Theater (T) verbringen. Modellierung als Zweipersonenspiel: $N = 2$, $X_1 = X_2 = \{F, T\}$,

		Frau: F	Frau: T
Mann	F	(2,1)	(0,0)
	T	(0,0)	(1,2)

Ziel: Maximieren der eigenen Auszahlung.

1.4 Beispiel (Stein-Schere-Papier) $N = 2$, $X_1 = X_2 = \{$St., Sc., P.$\}$. Papier schlägt Stein, Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier. Gewinner erhält 1 Euro vom Verlierer. Modellierung als Zweipersonenspiel:

		Spieler 2: St.	Spieler 2: Sch.	Spieler 2: P.
Spieler 1	St.	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Sch.	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	P.	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

1.5 Beispiel (Oligopol-Modell nach Cournot) Ein Produkt wird von N Unternehmen hergestellt (keine weiteren Hersteller). x_ν bezeichne die vom Unternehmen ν hergestellte Menge. Der Preis p sei gegeben durch

$$p(x_1, \ldots, x_N) := b - (x_1 + \ldots + x_N)$$

mit Konstante $b > 0$. Mit $K_\nu(x)$ werden die Kosten zur Herstellung von x Einheiten durch Unternehmen ν bezeichnet, z. B.

$$K_\nu(x) = k \cdot x \qquad \text{oder} \qquad K_\nu(x) = k \cdot x^2.$$

Unternehmen möchte seinen Gewinn maximieren. Modellierung als N-Personenspiel:

$$X_1 = \cdots = X_N = [0, \infty)$$
$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n) := x_\nu p(x_1, \ldots, x_N) - K_\nu(x_\nu) \to \max$$

1.2 Nash-Gleichgewichte

Hier: $\Gamma = (f_\nu, X_\nu)_{\nu=1}^N$, $f_\nu \to \min$. Ein Element aus X_ν werde mit x^ν bezeichnet (bzw. x_ν falls $X_\nu \subseteq \mathbb{R}$).

1.6 Definition Eine Strategiekombination $x^* = (x^{*,1}, \ldots, x^{*,N}) \in X$ heißt *Nash-Gleichgewicht von* Γ, falls

$$\forall \nu \in \{1, \ldots, N\}, \forall x^\nu \in X_\nu : f_\nu(x^*) \leq f_\nu(x^{*,1}, \ldots, x^{*,\nu-1}, x^\nu, x^{*,\nu+1}, \ldots, x^{*,N}) \tag{1.1}$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, bei der sich keiner der Spieler verbessern kann, indem er als Einziger von der Strategie x^* abweicht. Gleichgewichtsproblem: Wann existiert ein Nash-Gleichgewicht (NGG, Nash equilibirum problem)?

Bemerkung (i). Schreibweise:

$$x = (x^1, \ldots, x^N) = (x^1, \ldots, x^{\nu-1}, x^\nu, x^{\nu+1}, \ldots, x^N) =: (x^\nu, x^{-\nu})$$

also $x^{-\nu} = (x^1, \ldots, x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, \ldots, x^N)$. Damit lässt sich (1.1) schreiben als

$$f_\nu(x^*) \leq f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu})$$

oder

$$f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \leq f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \qquad \text{für alle } x^\nu \in X_\nu.$$

(ii). $x^* \in X$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $x^{*,\nu}$ für $\nu = 1, \dots, N$ Lösung der folgenden Optimierungsaufgabe ist:

$$f_\nu(x^\nu, x^{*,\nu}) \to \min_{x^\nu \in X_\nu} \tag{1.2}$$

1.7 Definition Für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu} := \times_{\substack{\eta=1,\dots,N \\ \eta\neq\nu}} X_\eta$ definieren wir durch

$$S_\nu(x^{-\nu}) := \{x^\nu \in X_\nu; \forall y \in X_\nu : f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \le f_\nu(y^\nu, x^{-\nu})\}$$

die *Menge der besten Antworten des Spielers ν auf die Strategiekombination $x^{-\nu}$ der Gegenspieler.* Die mengenwertige Abbildung $X^{-\nu} \ni x^{-\nu} \mapsto S_\nu(x^{-\nu})$ heißt *Beste-Antwort-Funktion des Spielers ν* und die daraus zusammengesetzte Abbildung $x \mapsto S(x)$ mit

$$S(x) := S_1(x^{-1}) \times S_2(x^{-2}) \times \dots \times S_N(x^{-N}), \qquad x \in X,$$

Beste-Antwort-Funktion des Spiels.

1.8 Theorem

Ein Strategiekombination $x^* \in X$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht des Spiels, wenn x^* Fixpunkt der mengenwertigen Abbildung $x \mapsto S(x)$ ist, d. h. wenn $x^* \in S(x^*)$.

Beweis: Sei $x^* \in X$ beliebig gewählt. Unter Beachtung der Definitionen eines Nash-Gleichgewichts sowie der Menge $S_\nu(x^{*,-\nu})$ und $S(x^*)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^* \text{ ist Nash-Gleichgewicht} &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1,\dots,N\} \forall x^\nu \in X_\nu : f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \le f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \\ &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1,\dots,N\} : x^{*,\nu} \in S_\nu(x^{*,-\nu}) \\ &\Leftrightarrow x^* \in S(x^*). \end{aligned}$$

□

Beispiel (Fortsetzung Beispiel 1.2) Spieler 2 spielt leugnen: Beste Antwort ist Gestehen. Gesteht Spieler 2, dann ist die beste Antwort zu leugnen. Analog verhält sich die Situation für Spieler 1. Damit folgt: $x^* = (G, G) \in S(x^*)$.

Beispiel (Fortsetzung Beispiel 1.3)

		Frau	
		F	T
Mann	F	(2,1)	(0,0)
	T	(0,0)	(1,2)

Folglich sind (T, T) und (F, F) Nash-Gleichgewichte.

Beispiel (Fortsetzung Beispiel 1.4)

		Spieler 2		
		St.	Sch.	P.
Spieler 1	St.	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Sch.	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	P.	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Dies zeigt, dass kein Nash-Gleichgewicht existiert.

Beispiel (Fortsetzung Beispiel 1.5) Hier $N = 2$ (Duopol), $K_\nu(x_\nu) = kx_\nu^2$ mit $k > 0$ fest,

$$p(x_1, x_2) = b - (x_1 + x_2).$$

und Auszahlungsfunktionen

$$f_\nu(x_1, x_2) = x_\nu(b - x_1 - x_2) - kx_\nu^2, \qquad \nu = 1, 2.$$

Sei zuächst $x_2 \in X_2 \in [0, \infty)$ gegeben. Wir nun ermitteln $S_1(x_2)$, indem wir die Lösung des Optimierungsproblems

$$f_1(x_1, x_2) = -(k+1)x_1^2 + x_1(b - x_2) \to \max_{x_1 \in [0,\infty)} \tag{1.3}$$

bestimmen.

- Fall $x_2 \geq b$: $S_1(x_2) = \{0\}$.
- Fall $x_2 < b$: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$ ist hinreichend und notwendig für Optimalität, d. h.

$$-2x_1(k+1) + (b - x_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = \frac{b - x_2}{2(k+1)}.$$

Folglich

$$S_1(x_2) = \left\{ \frac{\max\{b - x_2, 0\}}{2(k+1)} \right\}.$$

Analoge Aussage gilt für $S_2(x_1)$. Nach Satz 1.8 muss für ein Nash-Gleichgewicht x^* gelten, dass $x^* \in S(x^*)$, d.h. $x_1^* \in S_1(x_2^*)$ und $x_2^* \in S_2(x_1^*)$.

- Angenommen $x_1^* \geq b$, d. h. $S_2(x_1^*) = \{0\}$. Folglich $x_2^* = 0$. Dann ist $S_1(x_2^*) = S_1(0) = \frac{b}{2(k+1)} < b \leq x_1^*$. Damit ist $x_1^* \notin S_1(x_2^*)$. Analog Widerspruch für $x_2^* \geq b$.
- Angenommen $x_1^* < b$, $x_2^* < b$. Dann notwendige Bedingungen für Nash-Gleichgewicht:

$$x_1^* = \frac{b - x_2^*}{2(k+1)} \qquad\qquad x_2^* = \frac{b - x_1^*}{2(k+1)}.$$

Durch Einsetzen und Umstellen ergibt sich als eindeutige Lösung

$$x_1^* = x_2^* = \frac{b}{2k+3}.$$

1.3 Dominierte und dominante Strategien

1.9 Definition (i). Eine Strategie $x^\nu \in X_\nu$ *dominiert* eine Strategie $y^\nu \in X_\nu$ des Spielers ν, wenn

$$\forall x^{-\nu} \in X_{-\nu} : f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq f_\nu(y^\nu, x^{-\nu}).$$

Äquivalent sagt man die Strategie y^ν wird von der Strategie x^ν dominiert.

(ii). Eine Strategie $x^\nu \in X_\nu$ heißt *dominant für den Spieler* ν, wenn sie jede andere Strategie dieses Spielers dominiert, d. h.

$$\forall x^{-\nu} \in X_{-\nu}, y^\nu \in X_\nu : f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq f_\nu(y^\nu, x^{-\nu}).$$

(iii). Eine Strategiekombination $x^* \in X$ heißt *Gleichgewicht in dominanten Strategien*, wenn für jeden Spieler $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ die Strategie $x^{*,\nu}$ dominant ist:

$$\forall x = (x^\nu, x^{-\nu}) \in X : f_\nu(x^{*,\nu}, x^{-\nu}) \leq f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}).$$

Jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien ist offensichtlich ein Nash-Gleichgewicht.

1.10 Theorem (i). Eine Strategie $x^\nu \in X_\nu$ ist dominant für den Spieler ν genau dann wenn $x^\nu \in S_\nu(x^{-\nu})$ für alle $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$, d.h. wenn x^ν beste Antwort auf jede mögliche Strategiekombination $x^{-\nu}$ der Gegenspieler ist.

(ii). Eine Strategie $x^* \in X$ ist genau dann ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn $x^* \in S(x)$ für alle $x \in X$.

1.11 Beispiel Zwei Spieler drücken gleichzeitig rote (R) und blaue (B) Knöpfe.

Spieler 1 \ Spieler 2	B	R
B	(2,1)	(9,0)
R	(1,0)	(9,8)

Für Spieler 1 wird "rot" durch "blau" dominiert. Streichen dieser Zeile:

Spieler 1 \ Spieler 2	B	R
B	(2,1)	(9,0)

Spieler 2 besitzt ursprünglich keine dominierte Strategie. Nach Streichung der Strategie "rot" für Spieler 1 dominiert "blau" die Strategie "rot" bei Spieler 2. Folglich kann er die Strategie "rot" streichen. Es verbleibt die Strategiekombination (B,B); diese ist ein Nash-Gleichgewicht für das Spiel - das ist kein Zufall.

1.12 Theorem (i). Ein Gleichgewicht in dominanten Strategien ist auch ein Nash-Gleichgewicht.

(ii). Falls nach einer endlichen von Eliminationen von dominierten Strategien genau eine Strategiekombination übrig bleibt, so ist diese ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: Übung 1. □

Bemerkung Die Umkehrung von Satz 1.4(i) gilt im Allgemeinen nicht: Zum Beispiel ist (B,B) in Beispiel 1.11 ein Nash-Gleichgewicht, aber kein Gleichgewicht in dominanten Strategien.

1.4 Klassifikation von Spielen

1.13 Definition Ein Spiel $\Gamma = (f_\nu, X_\nu)_{\nu=1}^N$ heißt

- *endlich*, falls alle X_ν endlich viele Elemente besitzen,
- *abzählbar*, falls alle X_ν höchstens abzählbar viele Elemente enthalten,
- *überabzählbar/kontinuierlich*, wenn mindestens eine Strategiemenge überabzählbar unendlich viele Element besitzt.

1.14 Definition (i). Ein Spiel Γ heißt *Nullsummenspiel* falls $\sum_{\nu=1}^N f_\nu(x) = 0$ für alle $x \in X$. Anderenfalls heißt es *Nichtnullsummenspiel*.

(ii). Endliche *Zwei-Personen-Spiele* heißen auch *Bi-Matrixspiele*.

Es sei Γ ein Zwei-Personen-Spiel. Seien $x_1, \ldots, x_m$ die Strategien von Spieler 1 und $y_1, \ldots, y_n$ die Strategien von Spieler 2. Dann lassen sich die Auszahlungsfunktionen f_1 und f_2 vollständig durch die Matrizen

$$A := (f_1(x_i, y_j))_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad B := (f_2(x_i, y_j))_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

beschreiben. In endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspielen gilt $B = -A$; folglich beschreibt dann die Matrix A das Spiel vollständig.

Bemerkung • kooperative vs. nicht-kooperative Spiele: bei kooperativen Spielen sind bindende Absprachen möglich,

- statische vs. dynamische Spiele,
- Spiele mit vollständiger vs. unvollständiger Information.

2 Zwei-Personen-Spiele

Es sei nun $\Gamma = (f_1, f_2, X_1, X_2)$ ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel, d. h. es gelte $f_2 = -f_1$. Es werde im Folgenden f_1 mit f bezeichnet. Wir schreiben $\Gamma = (f, X_1, X_2)$ an Stelle von $\Gamma = (f_1, f_2, X_1, X_2)$. Ziel von Spieler 1 ist es f zu minieren, Ziel von Spieler 2 dagegen f zu maximieren.

2.1 Definition Eine Strategiekombination $x^* \in X$ heißt *Sattelpunkt von f*, falls gilt

$$f(x^{*,1}, x^2) \le f(x^{*,1}, x^{*,2}) \le f(x^1, x^{*,2}) \qquad \text{für alle } x^1 \in X_1,\ x^2 \in X_2.$$

2.2 Theorem

$x^* \in X$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht von Γ, falls x^* ein Sattelpunkt von f ist.

Beweis: Offensichtlich. □

2.3 Beispiel $X_1 = \{1, 2, 7\}$, $X_2 = \{1, 6\}$, $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| - 3$

		Spieler 2	
		1	6
Spieler 1	1	-3	2
	2	-2	1
	7	3	-2

Das Spiel besitzt kein Nash-Gleichgewicht. Welche Strategie sollte Spieler 1/Spieler 2 wählen? Mögliche Strategie: Begrenzung des Verlusts, also

$$\max_{x_2 \in X_2} f(x_1, x_2) \to \min_{x_1 \in X_1}.$$

Hier: Spieler 1 sollte Strategie "2" wählen; der maximale Verlust von Spieler 1 ist dann $f(2, 6) = 1$. Spieler 2 sollte bei dieser Strategie ...

$$\min_{x_1 \in X_1} f(x_1, x_2) \to \max_{x_2 \in X_2}.$$

die Strategie "6" wählen.

2.4 Voraussetzung Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

(i). Für jedes $x^1 \in X_1$ existiere $\hat{x}^2 \in X_2$ so, dass $f(x^1, \hat{x}^2) = \max_{x^2 \in X^2} f(x^1, x^2)$.

(ii). Für jedes $x^2 \in X_2$ existiere $\hat{x}^1 \in X_1$ so, dass $f(\hat{x}^1, x^2) = \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2)$.

(iii). Ferner existieren die Ausdrücke $\max_{x^2 \in X_2} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2)$ und $\min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2)$.

Bemerkung Voraussetzung 2.4 ist insbesondere dann erfüllt, wenn

- X_1 und X_2 endlich sind
- X_1 und X_2 kompakte Mengen sind und f stetig auf $X = X_1 \times X_2$ ist.

2.5 Lemma

Es sei Voraussetzung 2.4 erfüllt. Dann gilt

$$\max_{x^2 \in X_2} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2) \le \min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2).$$

Beweis: Aus

$$f(x^1, y) \le \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2)$$

folgt

$$\min_{x^1 \in X_1} f(x^1, y) \le \min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2).$$

Nimmt man auf beiden Seiten das Maximum über $y \in X_2$ so folgt die Behauptung. □

Bemerkung Die in Lemma 2.5 auftretenden Größen

$$\underline{v} := \max_{x^2 \in X_2} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2) \qquad \bar{v} := \min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2)$$

heißen *unterer* und *oberer Spielwert* des Zweipersonen-Nullsummenspiels Γ.

2.6 Theorem

Es sei Voraussetzung 2.4 erfüllt. Dann besitzt das Spiel genau dann ein Nash-Gleichgewicht, falls $\bar{v} = \underline{v}$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $x^* \in X$ ein Nash-Gleichgewicht. Nach Satz 2.2 ist x^* dann auch ein Sattelpunkt von f:

$$\max_{x^2 \in X_2} f(x^{1,*}, x^2) \le f(x^*) \le \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^{2,*}). \tag{$\star$}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2) &\le \max_{x^2 \in X_2} f(x^{1,*}, x^2) \\
&\overset{(\star)}{\le} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^{2,*}) \\
&\le \max_{x^2 \in X_2} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2).
\end{aligned}$$

Kombiniert man das mit Lemma 2.5, so folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Es gelte nun $\bar{v} = \underline{v}$, d. h.

$$\max_{x^2 \in X_2} \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^2) = \min_{x^1 \in X_1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2). \tag{2.1}$$

Seien $x^{1,*}$ und $x^{2,*}$ derart, dass

$$\begin{aligned}
\max_{x^2 \in X_2} f(x^{1,*}, x^2) &= \min_{x^1 \in X^1} \max_{x^2 \in X_2} f(x^1, x^2) \\
\min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^{2,*}) &= \max_{x^2 \in X^2} \min_{x^1 \in X^1} f(x^1, x^2)
\end{aligned}$$

(Existenz folgt aus Vor. 2.4). Folglich

$$f(x^*) \le \max_{x^2 \in X_2} f(x^{1,*}, x^2) = \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^{2,*}) \le f(x^*).$$

Damit

$$f(x^{1,*}, x^{2,*}) = \min_{x^1 \in X_1} f(x^1, x^{2,*}) \le f(x^1, x^{2,*}).$$

Analoge Argumentation für $f_2 = -f$. □

2.7 Definition Stimmen oberer und unterer Spielwert überein, dann heißt $v = \bar{v} = \underline{v}$ *Wert* des Spiels. Das Spiel heißt *fair*, wenn $v = 0$.

2.8 Korollar

Es sei Voraussetzung 2.4 erfüllt. Ist x^* ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt $f(x^*) = v$.

Beweis: siehe Beweis von Satz 2.6. □

2.1 Matrixspiele und ihre gemischten Erweiterungen

Für ein Matrixspiel $\Gamma = \{f, X_1, X_2\}$ seien die Strategiemengen $X_1 = \{1, \dots, m\}$, $X_2 = \{1, \dots, n\}$ gegeben. Die Funktion f kann mit Hilfe einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden:

$$a_{ij} := f(i,j), \qquad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A wird *Auszahlungsmatrix* genannt.

2.9 Theorem (i). $(i^*, j^*) \in X_1 \times X_2$ ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann wenn,

$$a_{i^*,j} \leq a_{i^*,j^*} \leq a_{i,j^*} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.2}$$

(ii). Es gibt genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn

$$\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \min_{i \in \{1,\dots,m\}} a_{ij} = \min_{i \in \{1,\dots,m\}} \max_{j \in \{1,\dots,n\}} a_{ij}.$$

Beweis: (i). Klar nach Satz 2.2.

(ii). Klar nach Satz 2.6.

□

2.10 Definition Sei $\Gamma = \{f, X_1, X_2\}$ ein Matrixspiel mit $X_1 = \{1, \dots, m\}$, $X_2 = \{1, \dots, n\}$ und Auszahlungsmatrix A. Unter der *gemischten Erweiterung des Matrixspiels* Γ versteht man das Nullsummenspiel $\hat{\Gamma} := (\hat{f}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)$ mit

$$\hat{X}_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$
$$\hat{X}_2 := \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+; \sum_{i=1}^n y_i = 1 \right\}$$
$$\hat{f}(x,y) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j f(i,j) = x^T \cdot Ay.$$

Bemerkung Die kanonischen Einheitsvektoren in $\hat{X}_1$ bzw. $\hat{X}_2$ werden als *reine Strategien* bezeichnet; sie repräsentieren die Strategie des Matrixspiels $\Gamma = \{f, X_1, X_2\}$.

Bemerkung $(x^*, y^*) \in \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, falls

$$(x^*) \cdot Ay \leq (x^*)^T \cdot Ay^* \leq x^T \cdot Ay^* \qquad \text{für alle } x \in \hat{X}_1,\ y \in \hat{X}_2.$$

Ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt

$$(x^*)^T \cdot Ay^* = \min_{x \in \hat{X}_1} \max_{y \in \hat{X}_2} x^T \cdot Ay = \max_{y \in \hat{X}_2} \min_{x \in \hat{X}_1} x^T \cdot Ay.$$

2.11 Theorem

Es seien $\Gamma = \{f, X_1, X_2\}$ ein Matrixspiel mit Auszahlungsmatrix A und $\hat{\Gamma}$ die gemischte Erweiterung. Eine Strategiekombination $(x^*, y^*) \in \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ ist ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i). $\exists v^* \in \mathbb{R}$: (x^*, v^*) ist Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$v \to \min_{x,v} \qquad \text{bei} \quad A^T x \le v \cdot e, e^T \cdot x = 1, x \ge 0. \tag{2.3}$$

(ii). $\exists w^* \in \mathbb{R}$: (y^*, w^*) ist Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$w \to \max_{y,w} \qquad \text{bei} \quad Ay \ge w \cdot e, e^T \cdot y = 1, y \ge 0. \tag{2.4}$$

Hier bezeichnet $e = (1, \dots, 1)^T$.

2.12 Lemma

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i). (x^*, v^*) löst (2.3) und (y^*, w^*) löst (2.4).

(ii). (x^*, y^*, v^*, w^*) löst

$$\begin{aligned} Ay - w \cdot e \ge 0, y \ge 0, e^T \cdot y = 1 & \qquad\qquad x^T(Ay - w \cdot e) = 0 \\ A^T x - v \cdot e \le 0, x \ge 0, e^T \cdot x = 1 & \qquad\qquad y^T(A^T x - v \cdot e) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Beweis: Übung. □

Beweis von Satz 2.11. „$\Rightarrow$": Sei $(x^*, y^*) \in \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$. Nach Satz 2.2 gilt dann

$$(x^*)^T \cdot Ay \le (x^*)^T \cdot Ay^* \le x^T \cdot Ay^* \qquad \text{für alle } x \in \hat{x}_1, y \in \hat{X}_2. \tag{2.6}$$

Setze $v^* := w^* := (x^*)^T \cdot Ay^*$. Zeige: (x^*, y^*, v^*, w^*) löst (2.5). Für $y := e^j$ folgt aus (2.6), dass $(A^T x^*)_j \le v^*$ für alle $j = 1, \dots, n$. Folglich gilt $A^T x^* \le v^* \cdot e$. Analog: $Ay^* \ge we$. Weiterhin

$$(x^*)^T(Ay^* - (x^*)^T Ay^* \cdot e) = (x^*)^T Ay^* - (x^*)^T Ay^* \underbrace{(x^*)^T e}_{1} = 0.$$

Analog folgt $(y^*)^T(Ax^* - v^* \cdot e) = 0$. Da $x^* \in \hat{X}_1$, $y^* \in \hat{X}_2$ wird (2.5) durch (x^*, y^*, v^*, w^*) gelöst. Aus Lemma 2.12 folgt die Behauptung.
„$\Leftarrow$": Seien (x^*, v^*) und (y^*, w^*) Lösungen von (2.3) und (2.4). Dann gilt $x^* \in \hat{X}_1$ und $y^* \in \hat{X}_2$. Bemerke, dass in (2.5)

$$(x^*)^T(Ay^* - w^* \cdot e) = 0 \iff (x^*)^T \cdot Ay^* = w^* \underbrace{(x^*)^T \cdot e}_{1} = w^*.$$

Analog:

$$(y^*)^T(A^T x^* - v^* \cdot e) = 0 \iff (x^*)^T \cdot Ay^* = v^*.$$

Damit

$$\begin{aligned} (x^*)^T \cdot Ay &= \sum_{j=1}^n \underbrace{(A^T x^*)_j}_{\le v^*} \underbrace{y_j}_{\ge 0} \le v^* \sum_{j=1}^n y_j = v^* \\ &= (x^*)^T \cdot Ay^* = w^* = w^* \left(\sum_{j=1}^m x_j \right) \\ &\le \left(\sum_{j=1}^m x_j (Ay^*)_j \right) = x^T Ay^*. \end{aligned}$$

Also ist (x^*, y^*) ein Sattelpunkt und damit Nash-Gleichgewicht. □

Bemerkung (2.3) und (2.4) ist immer lösbar (Satz von Weierstrass und Hinzufügen einer oberen (unteren) Schranke für w (v).

2.13 Korollar

Es seien $\Gamma = \{f, X_1, X_2\}$ ein Matrixspiel und $\hat{\Gamma}$ seine gemischte Erweiterung. Dann besitzt $\hat{\Gamma}$ mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

Ein solches Nash-Gleichgewicht nennen wir *Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

2.2 Bi-Matrixspiele und ihre gemischten Erweiterungen

2.14 Definition Ein *Bi-Matrixspiel* ist ein Zwei-Personen-Spiel $\Gamma = \{f_1, f_2, X_1, X_2\}$ mit

- $X_1 = \{1, \ldots, m\}$, $X_2 = \{1, \ldots, n\}$.
- Beide Spieler wollen ihre Zielfunktion minimieren.
- Beschreibung von f_1 und f_2 über Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$a_{ij} \coloneqq f_1(i,j) \qquad b_{ij} \coloneqq f_2(i,j) \qquad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Die Matrizen A und B heißen *Auszahlungsmatrix* für Spieler 1 bzw. Spieler 2.

2.15 Definition Es sei Γ ein Bi-Matrixspiel. Die *gemischte Erweiterung* des Spiels Γ ist das Zwei-Personen-Spiel $\hat{\Gamma} = \{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2\}$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &\coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ ; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \\
\hat{X}_2 &\coloneqq \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ ; \sum_{i=1}^n y_i = 1 \right\} \\
\hat{f}_1(x,y) &\coloneqq x^T \cdot Ay, \qquad x \in \hat{X}_1, y \in \hat{X}_2 \\
\hat{f}_2(x,y) &\coloneqq x^T \cdot By, \qquad x \in \hat{X}_1, y \in \hat{X}_2.
\end{aligned}$$

Bemerkung (i). Jetzt zeigen wir wieder: Das Spiel selbst muss kein Nash-Gleichgewicht haben, aber die gemischte Erweiterung hat eins.

(ii). Beachte, dass mit $B = -A$ der Fall eines Matrixspiels abgedeckt ist.

2.16 Lemma

Sei Γ ein Bi-Matrixspiel mit $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Auszahlungsmatrizen und $\hat{\Gamma}$ seine gemischte Erweiterung. Dann ist $(x^*, y^*) \in \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$ genau dann, wenn (x^*, y^*) Fixpunkt von $T : \hat{X}_1 \times \hat{X}_2 \to \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ mit

$$T(x,y) \coloneqq \Big(\big(1 + \textstyle\sum_{i=1}^m \phi_i(x,y)\big)^{-1} \big(x + \sum_{i=1}^m \phi_i(x,y) \cdot e^i\big) \quad \big(1 + \sum_{j=1}^n \psi_j(x,y)\big)^{-1} \big(x + \sum_{j=1}^n \psi_j(x,y) \cdot e^j\big) \Big)$$

wobei

$$\begin{aligned}
\phi_i(x,y) &\coloneqq \max\{0, x^T \cdot Ay - (Ay)_i\}, \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \\
\psi_j(x,y) &\coloneqq \max\{0, x^T \cdot By - (B^T x)_j\}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$. Dann gilt nach Definition

$$(x^*)^T Ay^* \le x^T Ay^* \qquad \text{für alle } x \in \hat{X}_1$$

und

$$(x^*)^T By^* \le (x^*)^T By \qquad \text{für alle } y \in \hat{X}_2.$$

Wählen wir für x bzw. y die Einheitsvektoren, dann folgt

$$(x^*)^T Ay^* \le (Ay^*)_i \qquad \text{und} \qquad (x^*)^T By^* \le (B^T x^*)_j$$

für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Folglich gilt per Definition $\psi_j(x^*, y^*) = \phi_i(x^*, y^*) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Damit $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$.
"$\Leftarrow$": Sei (x^*, y^*) ein Fixpunkt von T. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*)} \left(x^* + \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) e^i \right) \\
\iff x^* + \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) x^* &= x^* + \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) e^i \\
\iff \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) x^* &= \sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) e^i = \begin{pmatrix} \phi_1(x^*, y^*) \\ \vdots \\ \phi_m(x^*, y^*) \end{pmatrix} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Wegen $x^* \in \hat{X}_1$ ist $x^* \neq 0$, d. h. es existiert $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ mit $x^*_{i_0} > 0$ und $(Ay^*)_{i_0} \geq (Ay^*)_i$ für alle i mit $x^*_i \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(Ay^*)_{i_0} = \sum_{i=1}^m x^*_i (Ay^*)_{i_0} = \sum_{i: x^*_i \neq 0} x^*_i (Ay^*)_{i_0} &\geq \sum_{i: x^*_i \neq 0} x^*_i (Ay^*)_i \\
&= \sum_{i=1}^m x^*_i (Ay^*)_i \\
&= (x^*)^T A y^*.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Definition $\phi_{i_0}(x^*, y^*) = 0$. Wegen $x^*_{i_0} \neq 0$ folgt damit aus (2.7) (betrachte i_0-te Zeile), dass

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(x^*, y^*) = 0.$$

Wegen $\phi_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$, erhalten wir somit $\phi_i(x^*, y^*) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$. Aus der Definition von ϕ_i folgt damit

$$(x^*)^T A y^* \leq (Ay^*)_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Damit gilt für beliebiges $x \in \hat{X}_1$

$$x^T A y^* = \sum_{i=1}^m x_i (Ay^*)_i \geq \sum_{i=1}^m x_i (x^*)^T A y^* = (x^*)^T A y^*$$

(wegen $\sum_{i=1}^m x_i = 1$). Analoge Argumentation für y gibt

$$(x^*)^T B y \geq (x^*)^T B y^*.$$

□

2.17 Theorem (Fixpunktsatz von Brouwer)

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge sowie $f : X \to X$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt in X.

2.18 Korollar

Es seien $\Gamma = \{f_1, f_2, X_1, X_2\}$ ein Bi-Matrixspiel und $\hat{\Gamma}$ seine gemischte Erweiterung. Dann besitzt $\hat{\Gamma}$ (mindestens) sein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: Wegen Lemma 2.16 genügt es zu zeigen, dass $T(\hat{X}_1 \times \hat{X}_2) \subseteq \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$. Dies folgt sofort aus

$$\sum_{i=1}^m T^1_i(x, y) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \phi_i(x, y)} \sum_{i=1}^m (x_i + \phi_i(x, y)) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \phi_i(x, y)} \left(1 + \sum_{i=1}^m \phi_i(x, y) \right)$$

für alle $x \in \hat{X}_1$, $y \in \hat{X}_2$.

□

Wir betrachten das folgende quadratische Optimierungsproblem

$$q(x,y,v,w) := x^T Ay + x^T By - v - w \to \min_{x,y,v,w} \qquad \text{bei } Ay \geq ve, B^T x \geq we, x \geq 0, y \geq 0, e^T x = 1, e^T y = 1 \tag{2.8}$$

2.19 Theorem

Es gelten die folgenden Aussagen:

(i). Für jeden zulässigen Punkt (x,y,v,w) von (2.8) gilt $q(x,y,v,w) \geq 0$.

(ii). Ist (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$, so ist (x^*,y^*,v^*,w^*) mit $v^* := (x^*)^T Ay^*$ und $w^* := (x^*)^T By^*$ eine Lösung von (2.8).

(iii). Problem (2.8) ist lösbar und der optimale Zielfunktionswert ist gleich Null.

Beweis: (i). Es sei (x,y,v,w) ein zulässiger Punkt für (2.8). Dann ist

$$q(x,y,v,w) = x^T \underbrace{Ay}_{\geq ve} + (\underbrace{B^T x}_{\geq we})^T y - v - w \geq v \underbrace{x^T e}_{1} + w \underbrace{e^T y}_{1} - v - w = 0.$$

(ii). Sei (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$. Dann gilt offenbar $q(x^*,y^*,v^*,w^*) = 0$ und somit ist nach Teil (i) der Zielfunktionswert optimal. Es bleibt zu zeigen, dass (x^*,y^*,v^*,w^*) zulässig für (2.8) ist. Da $x^* \in \hat{X}_1$ und $y^* \in \hat{X}_2$ bleibt nur $Ay^* \geq v^* e$ und $B^T x^* \geq w^* e$ zu zeigen. Aus der Definition des Nash-Gleichgewichts folgt

$$v^* = (x^*)^T Ay^* \leq x^T Ay^* \qquad \text{und} \qquad w^* = (x^*)^T By^* \leq (x^*)^T By$$

für alle $x \in \hat{X}_1$ und $y \in \hat{X}_2$. Wählen wir für x bzw. y die Einheitsvektoren, so ergibt sich daraus

$$v^* \leq (Ay^*)_i \qquad \text{und} \qquad w^* \leq (B^T x^*)_j$$

für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Das bedeutet gerade, dass $v^* e \leq Ay^*$ und $w^* e \leq B^T x^*$.

(iii). Nach Korollar 2.18 besitzt $\hat{\Gamma}$ ein Nash-Gleichgewicht welches nach Teil (ii) eine Lösung von (2.8) liefert deren Zielfunktionswert gerade 0 ist.

□

2.20 Theorem

Es sei (x^*,y^*,v^*,w^*) eine Lösung von (2.8). Dann gilt $v^* = (x^*)^T Ay^*$, $w^* = (x^*)^T By^*$ und (x^*,y^*) ist ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$.

Beweis: Nach Satz 2.19(iii) ist $q(x^*,y^*,v^*,w^*) = 0$; folglich gilt

$$(x^*)^T Ay^* + (x^*)^T By^* = v^* + w^*. \tag{2.9}$$

Wegen den Nebenbedingungen von (2.8) gilt andererseits $Ay^* \geq v^* e$ und somit

$$(x^*)^T Ay^* \geq v^* e^T y^* = v^*.$$

Analog erhalten wir $(x^*)^T By^* \geq w^*$. Zusammen mit (2.9) liefert das $v^* = (x^*)^T Ay^*$ und $(x^*)^T By^* = w^*$. Seien nun $x \in \hat{X}_1$ und $y \in \hat{X}_2$ beliebig gewählt. Dann folgt

$$x^T Ay^* \geq v^* x^T e = v^* = (x^*)^T Ay^*$$

und

$$(x^*)^T By \geq w^* y^T e = w^* = (x^*)^T By^*.$$

Dies zeigt gerade, dass (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$ ist. □

Bemerkung Zu beachten ist, dass nur eine globale Lösung von (2.8) ein Nash-Gleichgewicht liefert. Da die Zielfunktion von (2.8) nicht konvex ist, gibt es im Allgemeinen auch lokale Lösungen, deren Zielfunktionswerte > 0 sind.

3

Kontinuierliche N-Personen-Spiele

Mit $\Gamma = \{f_\nu, X_\nu\}_{\nu=1}^N$ sei stets ein N-Personen-Spiel gegeben. Die Strategiemengen $X_\nu \neq \varnothing$ seien stets Teilmengen des $\mathbb{R}^{n_\nu}$. Weiterhin sei $n := \sum_{\nu=1}^N \nu_n$ die Anzahl aller Variablen.

3.1 Existenzaussagen für Nash-Gleichgewichts-Probleme

3.1 Definition Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann heißt $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ eine *mengenwertige Abbildung*. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(Y)$ die Potenzmenge von Y. Notation: $f : X \rightrightarrows Y$.

3.2 Beispiel (Beste-Antwort-Funktion) Die Beste-Antwort-Funktion $S : x \mapsto S(x)$ eines Spiels ist eine mengenwertige Abbildung. Zur Erinnerung:

$$S(x) = \bigtimes_{\nu=1}^{N} S_\nu(x^{-\nu})$$

wobei

$$S_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in X_\nu; \forall y^\nu \in X_\nu : f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq f_\nu(y^\nu, x^{-\nu})\}.$$

3.3 Definition Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen. Eine mengenwertige Abbildung $f : X \rightrightarrows Y$ heißt *abgeschlossen in* x, falls für je zwei konvergente Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ und $y_k \in f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, gilt, dass $y := \lim_{k\to\infty} y_k \in f(x)$. f heißt *abgeschlossen auf* X, falls f in jedem Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

3.4 Theorem (Fixpunktsatz von Kakutani)

Sei $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt sowie $f : X \rightrightarrows X$ eine abgeschlossene mengenwertige Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Bilder $f(x) \subseteq X$ für alle $x \in X$ nichtleer und konvex sind. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d. h. es existiert $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$.

Bemerkung Verallgemeinert Satz von Brouwer, Satz 2.17.

3.5 Theorem

Die Strategiemengen $X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien nichtleer, konvex und kompakt. Die Zielfunktionen $f_\nu : X \to \mathbb{R}$ seien stetig für $\nu = 1, \ldots, N$. Ferner sei $S_\nu(x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu = 1, \ldots, N$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$. Dann besitzt Γ mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: Wir wollen den Fixpunktsatz von Kakutani, Satz 3.4, auf die Beste-Antwort-Funktion S anwenden.

- Da X_ν, $\nu = 1, \ldots, N$, kompakt und konvex, ist auch $X = \times_{\nu=1}^N X_\nu$ kompakt und konvex. Weiterhin gilt offensichtlich $S : X \rightrightarrows X$.
- Nach dem Satz von Weierstraß ist $S_\nu(x^{-\nu}) \neq \varnothing$ für alle $\nu = 1, \ldots, N$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$. Damit folgt $S(x) \neq \varnothing$ für alle $x \in X$. Nach Annahme ist zudem $S_\nu(x^{-\nu})$ konvex, damit auch $S(x)$.

- Abgeschlossenheit: Es seien $x \in X$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_k \to x$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine konvergente Folge mit $y_k \in S(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $y := \lim_{k\to\infty} y_k$. Auf Grund der Abgeschlossenheit von X gilt $y \in X$. Wegen $y_k \in S(x_k)$ gilt

$$f_\nu(y_k^\nu, x_k^{-\nu}) \le f_\nu(z^\nu, x_k^{-\nu}) \qquad \text{für alle } z^\nu \in X_\nu,\ \nu = 1,\dots,N.$$

Da f_ν stetig ist, folgt für $k \to \infty$, dass

$$f_\nu(y^\nu, x^{-\nu}) \le f_\nu(z^\nu, x^{-\nu}) \qquad \text{für alle } z^\nu \in X_\nu,\ \nu = 1,\dots,N.$$

Folglich gilt $y \in S(x)$.

Nach dem Satz von Kakutani existiert folglich ein Fixpunkt von S und dieser ist nach Satz 1.8 ein Nash-Gleichgewicht von Γ. □

3.6 Definition Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : X \to \mathbb{R}$. f heißt *quasikonvex auf* X, wenn

$$\forall x, y \in X, \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \max\{f(y), f(y)\}.$$

Bemerkung (i). Offensichtlich gilt: Ist f konvex auf X, so ist f quasikonvex auf X.

(ii). Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist quasikonvex.

3.7 Korollar

Die Strategiemengen $X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien nichtleer, konvex und kompakt. Die Zielfunktionen $f_\nu : X \to \mathbb{R}$ seien stetig und $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ sei quasikonvex für alle $\nu = 1,\dots,N$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$. Dann besitzt Γ ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: Für jedes $\nu \in \{1,\dots,N\}$ und jedes $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$ ist die Menge aller Lösungen der Optimierungsaufgabe

$$f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \to \min_{x^\nu \in X_\nu} \tag{3.1}$$

aller Lösungen konvex (da der zuverlässige Bereich konvex ist und die Zielfunktion quasikonvex, vgl. Übung 3). Nach Definition ist dies gerade die Menge der besten Antworten, d. h. $S_\nu(x^{-\nu})$ ist konvex. Damit ist Satz 3.5 anwendbar. □

3.8 Beispiel (Oligopol-Modell mit N Unternehmen nach Cournot) $x_\nu \in X_\nu := [0, c_\nu]$ bezeichne die Menge des von Unternehmen ν hergestellten Menge; $p(x_1,\dots,x_N) := b - \sum_{\nu=1}^n x_\nu$ gibt Preis für eine Einheit des Produkts an. Weiterhin sei $K_\nu : (0,\infty) \to (0,\infty)$ konvex und stetig. $K_\nu(x^\nu)$ seien die Kosten zur Herstellung von x_ν Einheiten beim ν-ten Unternehmen.
Offensichtlich ist $X_\nu \neq \varnothing$ konvex und kompakt. Die Auszahlungsfunktion des ν-ten Spielers

$$f_\nu(x) = -(x_\nu p(x_1,\dots,X_N) - K_\nu(x_\nu) = -x_\nu \left(b - \sum_{\mu=1}^N x_\mu\right) + K_\nu(x_\nu) = -x_\nu b + x_\nu^2 + x_\nu \sum_{\mu\neq\nu} x_\mu + K_\nu(x_\nu)$$

ist stetig und $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex auf X_ν. Gemäß Korollar 3.7 gibt es somit ein Nash-Gleichgewicht.

3.2 Umformulierung des Nash-Gleichgewichtsproblems

3.2.1 Variationsungleichungen und Nash-Gleichgewichte

3.9 Definition Es seien $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F : X \to \mathbb{R}^n$. Unter einer *Variationsungleichung* versteht man das Problem ein $x^* \in X$ zu finden so, dass

$$\text{für alle } \ x \in X : F(x^*)^T (x - x^*) \ge 0.$$

Für die Variationsungleichung schreiben wir kurz $\mathrm{VI}(X, F)$.

3.10 Proposition

Gegeben sei $\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n, F)$. Ein Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n, F)$, falls $F(x^*) = 0$.

Beweis: Ist $F(x^*) = 0$, dann ist x^* offenbar eine Lösung der Variationsungleichung. Andererseits: Wählen wir $x = \lambda x^*$, dann folgt wegen

$$(\lambda - 1)F(x^*)^T x^* \geq 0 \qquad \text{für alle } \ \lambda \in \mathbb{R},$$

dass $F(x^*) = 0$. □

3.11 Definition Sei $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. Das zugehörige *Komplentaritätsproblem* besteht darin, ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass x^* Lösung des folgenden Systems ist:

$$x \geq 0 \qquad F(x) \geq 0 \qquad x^T F(x) = 0. \tag{3.2}$$

3.12 Proposition

$x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n_+, F)$, wenn er dem System (3.2) genügt.

Beweis: Übung. □

3.13 Lemma

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann gilt

(i). Ist x^* eine lokale Lösung der Optimierungsaufgabe

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \tag{3.3}$$

dann gilt $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$ für alle $x \in X$, d. h. x^* löst $\mathrm{VI}(X, \nabla f)$.

(ii). Ist f zusätzlich konvex, so ist jede Lösung dieser Variationsungleichung $\mathrm{VI}(X, \nabla f)$ eine (globale) Lösung von (3.3).

Beweis: Bekannt aus Optimierung. □

3.14 Theorem

Seien $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt sowie $F : X \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt $\mathrm{VI}(X, F)$ mindestens eine Lösung.

3.15 Theorem

Es seien $\Gamma = \{f_\nu, X_\nu\}_{\nu=1}^N$ ein Spiel mit nichtleeren und konvexen Strategiemengen $X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ sowie stetig differenzierbaren Auszahlungsfunktionen $f_\nu : U \supseteq X \to \mathbb{R}$ wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

(i). Ist $x^* \in X$ ein Nash-Gleichgewicht von Γ, dann löst x^* die Variationsungleichung $\mathrm{VI}(X, F)$ mit

$$F(x) := (\nabla_{x^\nu} f_\nu(x))_{\nu=1,\ldots,N}. \tag{3.4}$$

(ii). Sind zusätzlich die Funktionen $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$, dann ist jede Lösung von $\mathrm{VI}(X, F)$ mit F aus (3.4) auch ein Nash-Gleichgewicht von Γ.

Beweis: (i). Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Dann löst $x^{*,\nu}$ die Optimierungsaufgabe

$$f(x, x^{-\nu}) \to \min_{x \in X_\nu}.$$

Nach Lemma 3.13(i) gilt daher $\nabla_{x^\nu} f(x^*)(x - x^{*,\nu}) \geq 0$ für alle $x \in X_\nu$. Daraus folgt sofort $F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$.

(ii). Es sei x^* eine Lösung von VI(X, F), d. h. es gilt $F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$ für alle $x \in X$. Wählen wir $x = (x^{*,-\nu}, x^\nu) \in X$, so folgt $\nabla_{x^\nu} f_\nu(x^*)(x^\nu - x^{*,\nu}) \geq 0$ für alle $x^\nu \in X_\nu$. Aus Lemma 3.13(ii) folgt nun, dass $x^{*,\nu}$ eine Lösung des Optimierungsproblems

$$f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \to \min_{x^\nu \in X_\nu}$$

ist. Da $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

□

3.2.2 Umformulierung mittels Nikaido-Isoda-Funktionen

3.16 Definition Die Funktion $\psi : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x, y) = \sum_{\nu=1}^{N} (f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f_\nu(y^\nu, x^{-\nu}))$$

heißt *Nikaido-Isoda-Funktion* (oder *Ky-Fan-Funktion*) des Spiels $\Gamma = \{f_\nu, X_\nu\}_{\nu=1}^N$.

3.17 Theorem

Es gilt

(i). $\sup_{y \in X} \psi(x, y) \geq 0$ für alle $x \in X$,

(ii). $x^* \in X$ ist Nash-Gleichgewicht $\iff$ $\sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0$.

Beweis: (i). Klar mit $y = x$.

(ii). Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt für alle $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ und $y \in X$

$$\begin{aligned} & f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \leq f(y^\nu, x^{*,-\nu}) \\ \Longrightarrow\ & f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) - f_\nu(y^\nu, x^{*,-\nu}) \leq 0 \end{aligned}$$

und somit $\sup_{y \in X} \psi(x^*, y) \leq 0$. Aus (i) folgt $\sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0$.

Nun sei $\sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0$ für ein $x^* \in X$. Betrachte $y_\nu := (x^\nu, x^{*,-\nu})$, dann

$$0 \geq \psi(x^*, y_\nu) = 0 + (f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) - f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}))$$

also

$$f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \leq f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu})$$

für alle $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ und $x^\nu \in X$.

□

Für den Rest von 3.2.2 seien $f_\nu : X \to \mathbb{R}$ stetig (um das Supremum auszurechnen). Weiterhin sei X kompakt. Definiere

$$V : X \to \mathbb{R}, V(x) := \max_{y \in X} \psi(x, y).$$

3.18 Theorem

Die Strategiemengen $\emptyset \neq X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien kompakt und $f_\nu : X \to \mathbb{R}$, $\nu = 1, \ldots, N$, stetig. Dann

(i). $V(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

(ii). $x^* \in X$ ist Nash-Gleichgewicht $\iff$ $V(x^*) = 0$.

Beweis: Klar nach 3.17. □

3.19 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.18 ist $x^* \in X$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn es die Optimierungsaufgabe $V(x) \to \min_{x\in X}$ löst und der optimale Zielfunktionswert $V(x^*) = 0$ ist.

3.20 Definition Für einen Parameter $\alpha > 0$ definieren wir die *regularisierte Nikaido-Isoda-Funktion* $\psi_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi_\alpha(x,y) := \psi(x,y) - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|_2^2.$$

Wir setzen außerdem voraus:

- $X_\nu \neq \varnothing$ ist konvex und abgeschlossen für alle $\nu \in \{1,\dots,N\}$.
- $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ ist konvex für alle $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$.

Damit sind $y \mapsto -f_\nu(y, x^{-\nu})$ und $y \mapsto \psi(x,y)$ konkav und stetig. Aus der Optimierung wissen wir: $\psi_\alpha(x,y) \to \max_{y\in X}$ besitzt für jedes $x \in X$ eine eindeutige Lösung $y_\alpha(x)$. Man überlege sich dafür: $y \mapsto -\psi_\alpha(x,y)$ ist gleichmäßig konvex.

Analog definieren wir

$$V_\alpha : X \to \mathbb{R}, V_\alpha(x) := \max_{y\in X} \psi_\alpha(x,y) = \psi_\alpha(x, y_\alpha(x)).$$

3.21 Theorem

Sei $\alpha > 0$. Die Mengen $\varnothing \neq X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien konvex und abgeschlossen und die Funktionen $f_\nu : X \to \mathbb{R}$ seien stetig. Außerdem sei $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu \in \{1,\dots,N\}$ und $x^{-\nu} \in X_{-\nu}$. Dann gilt

(i). $V_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

(ii). $x^* \in X$ ist Nash-Gleichgewicht $\iff V_\alpha(x^*) = 0$.

Beweis: (i). Klar mit $y = x$.

(ii). Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht. Nach Satz 3.17 ist dann $\sup_{y\in X} \psi(x^*, y) = 0$, also $\psi(x^*, y) \leq 0$ für alle $y \in X$. Damit ist

$$\psi_\alpha(x^*, y) = \psi(x^*, y) - \frac{\alpha}{2}\|x^* - y\|_2^2 \leq 0$$

und somit $V_\alpha(x^*) \leq 0$. Aus (i) folgt $V_\alpha(x^*) = 0$.

Sei $V_\alpha(x^*) = 0$. Dann ist

$$\psi_\alpha(x^*, y) \leq 0 \qquad \text{für alle } y \in X. \tag{3.5}$$

Angenommen, x^* ist kein Nash-Gleichgewicht. Dann existiert nach Satz 3.17 $y \in X$ mit $\psi(x^*, y) > 0$. Auf Grund der Konvexität von X ist

$$z(\lambda) := \lambda x^* + (1-\lambda)y \in X, \qquad \lambda \in [0,1],$$

und nach (3.5) gilt $\psi(x^*, z(\lambda)) \leq 0$. Wegen der Konkavität von $\psi(x^*, \cdot)$ gilt

$$\psi(x^*, z(\lambda)) \geq \lambda \underbrace{\psi(x^*, x^*)}_{0} + (1-\lambda)\psi(x^*, \lambda).$$

Folglich,

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x^*, z(\lambda)) = \psi(x^*, z(\lambda)) - \frac{\alpha}{2}\|x^* - z(\lambda)\|_2^2 &\geq (1-\lambda)\psi(x^*, \lambda) - \frac{\alpha}{2}\|(1-\lambda)x^* - (1-\lambda)y\|_2^2 \\ &= (1-\lambda)\left(\psi(x^*, y) - \frac{\alpha}{2}(1-\lambda)\|x^* - y\|_2^2\right) > 0\end{aligned}$$

für λ mit $1-\lambda$ hinreichend klein. Dies ist ein Widerspruch zu (3.5).

□

3.22 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.21 ist $x^* \in X$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn x^* die Optimierungsaufgabe

$$V_\alpha(x) \to \min_{x \in X} \tag{3.6}$$

löst und der optimale Zielfunktionswert $V_\alpha(x^*) = 0$ ist.

Falls f_ν stetig differenzierbar ist für alle ν, dann ist auch V_α stetig differenzierbar:

3.23 Theorem (Satz von Danskin)

Seien $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen, $U \supseteq X$ offen und $f : U \times U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(x, \cdot)$ gleichmäßig konkav für alle $x \in U$. Dann existiert für alle $x \in U$ ein eindeutiges $\tau(x) \in U$ mit

$$f(x, \tau(x)) = \max_{y \in X} f(x, y).$$

Ist die hierdurch definierte Abbildung $x \mapsto \tau(x)$ stetig, so ist die durch

$$\sigma(x) := \max_{y \in X} f(x, y) = f(x, \tau(x)), \qquad x \in U,$$

definierte Abbildung stetig differenzierbar und es gilt $\nabla\sigma(x) = \nabla_x f(x, y)|_{y=\tau(x)}$.

3.24 Theorem

Sei $\alpha > 0$. Die Strategiemengen $\emptyset \neq X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien konvex und abgeschlossen, $U \supseteq X$ offen und $f_\nu : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für $\nu \in \{1, \ldots, N\}$. Weiterhin seien die Funktionen $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex. Dann ist V_α stetig differenzierbar mit $\nabla V_\alpha(x) = \nabla_x \psi_\alpha(x, y)|_{y=y_\alpha(x)}$.

Beweis: Satz 3.23 mit $f = \psi_\alpha$, $\sigma = V_\alpha$ und $\tau = y_\alpha$. Die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto y_\alpha(x)$ folgt aus Resultaten über mengenwertige Abbildung (Referenz siehe Skript). □

Für $\beta > \alpha > 0$ definiere

$$V_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V_{\alpha\beta}(x) := V_\alpha(x) - V_\beta(x).$$

3.25 Lemma

Die Strategiemengen $\emptyset \neq X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ seien konvex und abgeschlossen, $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin sei $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$. Dann gilt

$$V_{\alpha\beta}(x) \geq \frac{\beta - \alpha}{2} \|x - y_\beta(x)\|_2^2 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$V_\alpha(x) = \max_{y \in X} \psi_\alpha(x, y) \geq \psi_\alpha(x, y_\beta(x)).$$

Folglich,

$$V_{\alpha\beta}(x) \geq \psi_\alpha(x, y_\beta(x)) - \psi_\beta(x, y_\beta(x)) = \frac{\beta - \alpha}{2} \|x - y_\beta(x)\|_2^2. \qquad \square$$

3.26 Theorem

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.25 gilt

(i). $V_{\alpha\beta}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii). $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist Nash-Gleichgewicht $\iff V_{\alpha\beta}(x^*) = 0$.

Beweis: (i). Klar mit Lemma 3.25.

(ii). Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht. Dann ist nach 3.21 $V_\alpha(x^*) = V_\beta(x^*) = 0$, also $V_{\alpha\beta}(x^*) = 0$. Ist andererseits $V_{\alpha\beta}(x^*) = 0$, dann ist wegen (i) $V_\alpha(x^*) = V_\beta(x^*) = 0$ und daher $x^* = y_\beta(x^*)$ nach Lemma 3.25. Insbesondere ist $x^* \in X$ (nach Definition von y_β).

□

3.27 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.25 ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn x^* die unrestringierte Optimierungsaufgabe

$$V_{\alpha\beta}(x) \to \min \tag{3.7}$$

löst und der optimale Zielfunktionswert $V_{\alpha\beta}(x^*) = 0$ ist.

3.2.3 KKT-Bedingungen eines Spiels

Sei

$$X_\nu := \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0\} \tag{3.8}$$

wobei $g^\nu : \mathbb{R}^{n_\nu} \to \mathbb{R}^{m_\nu}$ und $h : \mathbb{R}^{n_\nu} \to \mathbb{R}^{l_\nu}$ stetig differenzierbar seien. Ein Vektor x^* ist genau dann Nash-Gleichgewicht, wenn für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ die Komponente $x^{*,\nu}$ eine Lösung der Optimierungsaufgabe

$$f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \to \min_{x^\nu \in X_\nu} \qquad \text{bei } g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0 \tag{3.9}$$

ist. Für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ definieren wir $L_\nu : \mathbb{R}^{n_\nu} \times \mathbb{R}^{n-\nu} \times \mathbb{R}^{m_\nu} \times \mathbb{R}^{l_\nu} \to \mathbb{R}$ durch

$$L_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda^\nu, \mu^\nu) := f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + (\lambda^\nu)^T g^\nu(x^\nu) + (\mu^\nu)^T h^\nu(x^\nu),$$

die *Lagrange-Funktion* zu (3.9). Damit kann das KKT-System zur Optimierungsaufgabe (3.9) aufgestellt werden:

$$\nabla_{x^\nu} L_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}, \lambda^\nu, \mu^\nu) = 0, h^\nu(x^\nu) = 0, g^\nu(x^\nu) \leq 0, \lambda^\nu \geq 0, (\lambda^\nu)^T g^\nu(x^\nu) = 0. \tag{3.10}$$

Ist $x^{*,\nu}$ eine Lösung von (3.9) und ist in $x^{*,\nu}$ die ACQ (Abadie Constraint Qualification) erfüllt, dann existieren $\lambda^{*,\nu} \in \mathbb{R}^{m_\nu}$, $\mu^{*,\nu} \in \mathbb{R}^{l_\nu}$ so, dass $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ das System (3.10) löst. Löst umgekehrt $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ das System (3.10) und ist $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex, h^ν affin und g^ν quasikonvex, dann löst $x^{*,\nu}$ die Optimierungsaufgabe (3.9).

Setze

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} L_1(x^1, x^{-1}, \lambda^1, \mu^1) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} L_N(x^N, x^{-N}, \lambda^N, \mu^N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad g(x) := \begin{pmatrix} g^1(x^1) \\ \vdots \\ g^N(x^N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad h(x) := \begin{pmatrix} h^1(x^1) \\ \vdots \\ h^N(x^N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

wobei $l := \sum_{\nu=1}^N l_\nu$, $m := \sum_{\nu=1}^N m_\nu$, $n := \sum_{\nu=1}^N n_\nu$, $x = (x^1, \dots, x^N)$, $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^N)$, $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^N)$. Dann lässt sich (3.10) schreiben als

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0, h(x) = 0, g(x) \leq 0, \lambda \geq 0, g(x)^T \lambda = 0. \tag{3.11}$$

3.28 Theorem

Die Strategiemengen X_ν seien durch (3.8) gegeben mit stetig differenzierbaren Funktionen g^ν und h^ν. Weiterhin seien die Funktionen f_ν stetig differenzierbar. Dann gilt:

(i). Sei $x^* \in X$ ein Nash-Gleichgewicht. Für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ sei in $x^{*,\nu}$ in Problem (3.9) die ACQ erfüllt. Dann existieren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ und $\nu^* \in \mathbb{R}^l$ so, dass (x^*, λ^*, μ^*) eine Lösung des KKT-Systems (3.11) ist.

(ii). Die Funktionen $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ seien konvex für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und alle $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n_{-\nu}}$. Außerdem seien die Funktionen g_i quasikonvex für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und h affin. Ist (x^*, λ^*, μ^*) eine Lösung von (3.11), so ist x^* ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis: (i). Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht, dann ist für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ der Punkt $x^{*,\nu}$ der Optimierungsaufgabe (3.9). Da in $x^{*,\nu}$ die ACQ gilt, existieren $\lambda^{*,\nu} \in \mathbb{R}^{m_\nu}$, $\mu^* \in \mathbb{R}^{l_\nu}$ so, dass $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ das System (3.10) gilt. Da $\nu \in \{1, \dots, N\}$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

(ii). Sei (x^*, λ^*, μ^*) eine Lösung von (3.11). Folglich löst das Tripel $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ das System (3.10). Unter den gegebenen Konvexitäts-Voraussetzungen folgt daher , dass $x^{*,\nu}$ eine Lösung von (3.9) für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$.

□

3.29 Beispiel (Cournot-Oligopol mit $N = 2$, Fortsetzung von Beispiel 1.5) Sei $X_1 = X_2 = [0, \infty)$, $b, k > 0$ und $p(x_1, x_2) := b - x_1 - x_2$ Preis einer Einheit des Produkts, $K_\nu(x_\nu) := kx_\nu^2$ die Kosten zur Herstellung von x_ν Einheiten. Die Zielfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &:= -x_1(b - x_1 - x_2) + kx_1^2 = (k+1)x_1^2 - (b - x_2)x_1 \\ f_2(x_1, x_2) &:= -x_2(b - x_1 - x_2) + kx_2^2 = (k+1)x_2^2 - (b - x_1)x_2. \end{aligned}$$

Setze $g_1(x_1) := -x_1$, $g_2(x_2) := -x_2$, dann sind X_1, X_2 von der Form (3.8). Da g_1, g_2 linear sind, ist die ACQ überall erfüllt. Damit liefert jedes Nash-Gleichgewicht x^* eine Lösung (x^*, λ^*) des zugehörigen KKT-Systems. Umgekehrt ist nach Satz 3.28(ii) jede Lösung des KKT-Systems auch ein Nash-Gleichgewicht. Aufstellen des KKT-Systems:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f_1(x_1, x_2) + \lambda_1 \nabla_{x_1} g(x_1) \\ \nabla_{x_2} f_2(x_1, x_2) + \lambda_2 \nabla_{x_2} g(x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(k+1)x_1 - (b - x_2) - \lambda_1 \\ 2(k+1)x_2 - (b - x_1) - \lambda_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\lambda_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$, sowie $\lambda_1 x_1 = 0$ und $\lambda_2 x_2 = 0$. Folglich ist

$$\lambda_1 = 2(k+1)x_1 - (b - x_2) \qquad \lambda_2 = 2(k+1)x_2 - (b - x_1). \tag{3.12}$$

Fallunterscheidung:

(i). $x_1 = x_2 = 0$: Nach (3.22) ist dann $\lambda_1 = \lambda_2 = -b < 0$. Widerspruch zu $\lambda_i \geq 0$.

(ii). $x_1 = \lambda_2 = 0$: Aus (3.12) folgt dann $x_2 = \frac{b}{2(k+1)}$. Damit ist dann

$$\lambda_1 = 2(k+1)0 - b + \frac{b}{2(k+1)} = -b\left(-\frac{1}{2(k+1)} + 1\right) < 0.$$

Widerspruch!

(iii). $x_2 = \lambda_1 = 0$: Analog zum vorherigen Fall.

(iv). $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Nach (3.12) gilt $x_2 = b - 2(k+1)x_1$ und somit

$$2(k+1)(b - 2(k+1)x_1) - (b - x_1) \overset{!}{=} 0 \iff x_1 = x_2 = \frac{b}{2k+3}.$$

4 Verallgemeinerte Nash-Gleichgewichtsprobleme

Anstelle von $X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ betrachten wir $X_\nu(x^{-\nu}) \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$, d. h. der zulässige Bereich hängt von der Strategie der anderen Spieler ab (z. B. begrenzte Rohstoffe/Verschmutzung, gemeinsam genutzte Ressourcen,…).

4.1 Definitionen und Beispiele

4.1 Definition Gegeben seien N Spieler, Funktionen $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ sowie mengenwertige Abbildungen $X_\nu : \mathbb{R}^{n-\nu} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n_\nu}$. Unter dem *verallgemeinerten Nash-Gleichgewichtsproblem* (GNEP) versteht man die Aufgabe ein $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in \mathbb{R}^n$ zu finden so, dass $x^{*,\nu} \in X_\nu(x^{*,-\nu})$ für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und

$$\forall \nu \in \{1, \dots, N\} \forall x^\nu \in X_\nu(x^{*,-\nu}) : f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \le f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}). \tag{4.1}$$

Ein solcher Vektor x^* heißt dann *(verallgemeinertes) Nash-Gleichgewicht.* Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *zulässig* für das verallgemeinerte Nash-Gleichgewichtproblem, wenn $x^\nu \in X_\nu(x^{-\nu})$ für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$.

Bemerkung (i). $x^* \in \mathbb{R}^n$ löst das verallgemeinerte Nash-Gleichgewichtsproblem genau dann, wenn für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ die Komponente $x^{*,\nu}$ eine Lösung der Optimierungsaufgabe

$$f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \to \min_{x^\nu \in X_\nu(x^{*,-\nu})}$$

ist.

(ii). Die mengenwertige Abbildung $X : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$X(x) := X_1(x^{-1}) \times \dots \times X_N(x^{-N}), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann zulässig für das verallgemeinerte Nash-Gleichgewichtsproblem, wenn $x \in X(x)$, d. h. wenn x ein Fixpunkt von X ist.

(iii). Das Nash-Gleichgewichtsproblem kann als Spezialfall des verallgemeinerten Nash-Gleichgewichtsproblems betrachtet werden ($X_\nu(x^{-\nu}) = X_\nu$).

(iv). Oft kann man $X_\nu(x^{-\nu})$ beschreiben durch

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; g^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \le 0, h^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) = 0\}.$$

4.2 Beispiel $N = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ und

$$f_1(x) := (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \le 1,$$

$$f_2(x) := \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min_{x_2} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \le 1.$$

Dann ist

$$X_1(x_2) = \{x_1 \in \mathbb{R}; x_1 + x_2 \le 1\} = (-\infty, 1 - x_2]$$
$$X_2(x_1) = (-\infty, 1 - x_1].$$

Folglich ist $X(x) = (-\infty, 1-x_2] \times (-\infty, 1-x_1]$. Zum Beispiel

$$(0,1) \in X((0,1)) = X_1(1) \times X_2(0) = (-\infty, 0] \times (-\infty, 1],$$

d. h. $(0,1)$ ist zulässig. Dagegen ist

$$X((1,1)) = X_1(1) \times X_2(1) = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0],$$

also $(1,1) \notin X((1,1))$; nicht zulässig.

4.3 Beispiel $N = 2$, $n_1 = n_2 = 1$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= (x_2+2)x_1 \to \min_{x_1} && \text{bei } x_1^2 + x_2^2 \le 1, \\ f_2(x) &:= x_2^2 - x_1 x_2 \to \min_{x_2} && \text{bei } x_1 - x_2 \le 0. \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} X_1(x_2) &= \begin{cases} [-\sqrt{1-x_2^2}, \sqrt{1-x_2^2}], & |x_2| \le 1, \\ \varnothing, & |x_2| > 1. \end{cases} \\ X_2(x_1) &:= [x_1, \infty) \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$X(0, 0.6) = X_1(0.6) \times X_2(0) = [-0.8, 0.8] \times [0, \infty)$$

d. h. $(0, 0.6)$ ist zulässig. Dagegen ist

$$X(0.8, 0.6) = X_1(0.6) \times X_2(0.8) = [-0.8, 0.8] \times [0.8, \infty),$$

also ist $(0.8, 0.6)$ nicht zulässig.

4.4 Beispiel (Oligopol-Modell nach Cournot, modifiziert)

$$f_\nu(x_1, \dots, x_N) = x_\nu p(x_1, \dots, x_N) - K_\nu(x_\nu) \to \max_{x_\nu} \qquad \text{bei } x_\nu \ge 0, \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu \le C.$$

Dann

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}; x^\nu \ge 0, x^\nu \le C - \sum_{\eta \neq \nu} x^\eta\}.$$

4.5 Definition Für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n_{-\nu}}$ sei durch

$$S_\nu(x^{-\nu}) := \{x^\nu \in X_\nu(x^{-\nu}); \forall x \in X_\nu(x^{-\nu}) : f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \le f_\nu(x, x^{-\nu})\}$$

die *Menge der besten Antworten des Spielers ν auf die Strategiekombination $x^{-\nu}$ der Gegenspieler* definiert. Die mengenwertige Abbildung $x^{-\nu} \to S_\nu(x^{-\nu})$ heißt *Beste-Antwort-Funktion des Spielers ν* und die Abbildung

$$x \mapsto S(x) := S_1(x^{-1}) \times \ldots \times S_N(x^{-N})$$

heißt *Beste-Antwort-Funktion des verallgemeinerten Nash-Problems.*

4.6 Theorem

Ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des verallgemeinerten Nash-Problems, wenn x^* Fixpunkt der Abbildung $x \mapsto S(x)$ ist, d. h. wenn $x^* \in S(x^*)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} x^* \text{ ist Lösung des GNEPs} &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1, \dots, N\} : x^{*,\nu} \in X_\nu(x^{*,-\nu}), (4.1) \text{ ist erfüllt} \\ &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1, \dots, N\} : x^{*,\nu} \in S_\nu(x^{*,-\nu}) \\ &\Leftrightarrow x^* \in S(x^*). \end{aligned}$$

□

4.7 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 4.2) Bestimme zunächst $S_1(x_2)$: Lösung von $(x_1-1)^2 \to \min$ bei $x_1 \le 1 - x_2$.

- Ist $x_2 \le 0$, dann ist $x_1 = 1$ zulässig und eindeutige Lösung.
- Ist $x_2 \ge 0$, dann ist $x_1 := 1 - x_2$ die eindeutige Lösung.

Damit

$$S_1(x_2) = \begin{cases} \{1\}, & x_2 \le 0, \\ \{1 - x_2\}, & x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Analog erhält man

$$S_2(x_1) = \begin{cases} \{\frac{1}{2}\}, & x_1 \le \frac{1}{2}, \\ \{1 - x_1\}, & x_1 > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für Nash-Gleichgewicht brauchen wir $x_1 \in S_1(x_2)$ und $x_2 \in S_2(x_1)$. Graphisch ergibt sich, dass die Lösungsmenge durch

$$\left\{(t, 1-t); \frac{1}{2} \le t \le 1\right\}$$

gegeben ist. Insbesondere gibt es also überabzählbar viele Lösungen.

4.8 Definition (i). Ein verallgemeinertes Nash-Gleichgewichtsproblem heißt *spieler-konvex* (player convex), wenn für jeden Spieler $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und jedes $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$ die Menge der zulässigen Punkte $X_\nu(x^{-\nu})$ konvex ist und $x^\nu \mapsto f_\nu(x^\nu, x^{-\nu})$ konvex ist.

(ii). Ein verallgemeinertes Nash-Gleichgewichtsproblem heißt verallgemeinertes Nash-Gleichgewichtsproblem mit *gemeinsamen Restriktionen* (shared/common constraints), falls $\emptyset \ne X \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; (x^\nu, x^{-\nu}) \in X\}$$

für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$. X heißt dann *gemeinsame Strategiemenge.*

(iii). Ein verallgemeinertes Nash-Gleichgewichtsproblem mit gemeinsamen Restriktionen, bei dem $X \ne \emptyset$ konvex ist und $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$, $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$, heißt *jointly konvex.*

Bemerkung (i). Ein verallg. Nash-Problem, das jointly konvex ist, ist auch spieler-konvex. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

(ii). Existieren von ν unabhängige Funktionen G und H, so dass

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; G(x^\nu, x^{-\nu}) \le 0, H(x^\nu, x^{-\nu}) = 0\}.$$

(iii). Warum kann man X auch hier (GNEP) als "zulässigen Bereich" bezeichnen?

4.9 Proposition

Für ein GNEP mit gemeinsamen Restriktionen ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann zulässig, wenn $x \in X$.

Beweis:

$$\begin{aligned} x \text{ ist zulässig für GNEP} &\Leftrightarrow x \in X(x) = X_1(x^{-1}) \times \ldots \times X_N(x^{-N}) \\ &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1, \dots, N\} : x^\nu \in X_\nu(x^{-\nu}) \\ &\Leftrightarrow \forall \nu \in \{1, \dots, N\} : x = (x^\nu, x^{-\nu}) \in X. \end{aligned}$$

□

Bemerkung Die Mengen X und $X(x)$ stimmen im Allgemeinen für ein gegebenes $x \in X$ nicht überein, zum Beispiel

$$X := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

und $x = (0.6, 0.6)^T$. Dann ist $X(x) = [-0.8, 0.8]^2 \ne X$.

4.2 Umformulierung von GNEP

Bemerkung Es gibt Umformulierungen als Quasivariationsungleichung, aber das ist unhandlich.

4.2.1 Umformulierung mit Hilfe der Nikaido-Isoda-Funktion

$$\psi(x,y) := \sum_{\nu=1}^{N} (f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f_\nu(y^\nu, x^{-\nu})).$$

4.10 Theorem (i). Ist x zulässig für das GNEP, dann gilt $\sup_{y\in X(x)} \psi(x,y) \geq 0$.

(ii). Ein Vektor x^* ist genau dann Lösung des GNEP, wenn $x^* \in X(x^*)$ und $\sup_{y\in X(x^*)} \psi(x^*,y) = 0$.

Beweis: (i). Da x zulässig ist, gilt $x \in X(x)$ und somit $\sup_{y\in X(x)} \psi(x,y) \geq \psi(x,x) = 0$.

(ii). "$\Rightarrow$": Sei x^* eine Lösung des GNEP, dann ist x^* insbesondere zulässig, d. h. $x^* \in X(x^*)$. Sei nun $y \in X(x^*)$. Dann ist $y^\nu \in X_\nu(x^{*,-\nu})$ für alle $\nu \in \{1,\dots,N\}$ und somit

$$f_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) = f_\nu(x^*) \leq f_\nu(y^\nu, x^{*,-\nu}).$$

Folglich

$$\psi(x^*,y) = \sum_{\nu=1}^{N} (f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f_\nu(y^\nu, x^{-\nu})) \leq 0.$$

Mit (i) folgt die Behauptung. "$\Leftarrow$": Sei x^* zulässig mit $\sup_{y\in X(x^*)} \psi(x^*,y) = 0$. Dann gilt $\psi(x^*,y) \leq 0$ für alle $y \in X(x^*)$. Für $y := (x^\nu, x^{*,-\nu})$ ergibt sich

$$0 \geq \psi(x^*,y) = f_\nu(x^*) - f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}),$$

d. h. $f_\nu(x^*) \leq f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu})$. Da $\nu \in \{1,\dots,N\}$ und $x^\nu \in X_\nu(x^{*,-\nu})$ beliebig gewählt waren, ist x^* Lösung des GNEP.

□

Für den Rest dieses Abschnitts wird vorausgesetzt, dass das GNEP gemeinsame Restriktionen hat. Für die zugehörige Strategiemenge X setzen wir zunächst voraus, dass $X \neq \emptyset$ kompakt ist und $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig für alle ν.
Für $x \in X$ ist die Menge $X(x)$ nichtleer, da nach Proposition 4.9 $x \in X(x)$. Außerdem ist $X(x)$ kompakt, da die Mengen

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{y^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; (y^\nu, x^{-\nu}) \in X\}$$

wegen der Kompaktheit von X abgeschlossen und beschränkt sind. Wir definieren

$$\hat{V} : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \hat{V}(x) := \max_{y\in X(x)} \psi(x,y).$$

4.11 Theorem

Die gemeinsame Strategiemenge $X \neq \emptyset$ sei kompakt und die Funktionen f_ν seien stetig. Dann gilt

(i). $\hat{V}(x) \geq 0$ für alle $x \in X$,

(ii). $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung des GNEP $\iff$ $x^* \in X$ und $\hat{V}(x^*) = 0$.

4.12 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.11 ist x^* Lösung des GNEP genau dann, wenn x^* die Optimierungsaufgabe

$$\hat{V}(x) \to \min_{x\in X}$$

löst und der optimale Zielfunktionswert 0 ist.

Nun wird (wieder) Kompaktheit von X fallen gelassen und stattdessen sei das GNEP nun jointly convex. Zusätzlich sei X abgeschlossen und f_ν stetig für $\nu \in \{1, \dots, N\}$.

4.13 Definition Die *regularisierte Nikaido-Isoda-Funktion* ist

$$\psi_\alpha(x, y) := \psi(x, y) - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|_2^2, \qquad \alpha > 0.$$

Das Maximierungsproblem $\psi_\alpha(x, y) \to \max_{y \in X(x)}$ besitzt für jedes $x \in X$ eine eindeutige Lösung $\hat{y}_\alpha(x)$. Weiter sei

$$\hat{V}_\alpha : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \hat{V}_\alpha(x) := \max_{y \in X(x)} \psi_\alpha(x, y).$$

4.14 Theorem

Sei $\alpha > 0$ und das GNEP sei jointly convex. Weiterhin sei die Menge X abgeschlossen und f_ν stetig für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$. Dann gilt

(i). $\hat{V}_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in X$

(ii). x^* ist Lösung des GNEP $\iff$ $x^* \in X$ und $\hat{V}_\alpha(x^*) = 0$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

4.15 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 ist x^* genau dann Lösung des GNEPs, wenn x^* die Optimierungsaufgabe

$$\hat{V}_\alpha(x) \to \min_{x \in X} \tag{4.2}$$

löst und der optimale Zielfunktionswert 0 ist.

Beachte: Im Allgemeinen ist $\hat{V}_\alpha$ nicht differenzierbar.

4.16 Definition Für ein GNEP mit gemeinsamen Restriktionen heißt $x^* \in X$ *normalisiertes Gleichgewicht*, wenn $\sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0$.

4.17 Theorem

Gegeben sei ein GNEP mit gemeinsamen Restriktionen. Dann ist jedes normalisierte Gleichgewicht x^* eine Lösung des GNEP.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Bemerkung Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch; nicht jede Lösung ist ein normalisiertes Gleichgewicht.

4.18 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 4.2)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1, \\ f_2(x) &:= \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min_{x_2} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= (f_1(x_1, x_2) - f_1(y_1, x_2)) + (f_2(x_1, x_2) - f_2(x_1, y_2)) \\ &= ((x_1 - 1)^2 - (y_1 - 1)^2) + \left(\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y_2 - \frac{1}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
x^* \text{ ein normalisiertes Gleichgewicht} &\Leftrightarrow x \in X, \sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^* \text{ löst Optimierungsaufgabe } \psi(x^*, y) \to \max_{y \in X}
\end{aligned}
$$

Folglich: Ist x^* ein normalisiertes Gleichgewicht, dann löst x^* die Optimierungsaufgabe

$$
\begin{aligned}
((x_1^* - 1)^2 - (y_1 - 1)^2) + \left(\left(x_2^* - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(y_2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right) &\to \max_{y \in X} \\
\iff (y_1 - 1)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{2} \right)^2 &\to \min_{y \in X}.
\end{aligned}
$$

Man kann leicht nachrechnen, dass $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ die eindeutige Lösung ist. Es gibt kein weiteres normalisiertes Gleichgewicht. Andererseits haben wir bereits gezeigt (vgl. Beispiel 4.7), dass es in diesem Beispiel unendlich viele Lösungen des GNEP gibt.

Bemerkung Multipliziert man die Auszahlungsfunktionen f_ν mit positiven Zahlen $r_\nu > 0$, so ändert sich die Lösungsmenge des GNEPs nicht. Die Menge der normalisierten Gleichgewichte ändert sich dagegen im Allgemeinen.

4.19 Beispiel (Modifikation von Beispiel 4.2)

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &:= (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1, \\
f_2(x) &:= 2\left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 \to \min_{x_2} \qquad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1.
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge ist aus Beispiel 4.7 bekannt. Wie in Beispiel 4.18 zeigt man, dass das jedes normalisiertes Gleichgewicht x^* die Optimierungsaufgabe

$$
(y_1 - 1)^2 + 2\left(y_2 - \frac{1}{2} \right)^2 \to \min_{y \in X}
$$

löst und dass die eindeutige Lösung durch $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ gegeben ist.

Bemerkung (Alternative Definition für normalisiertes Gleichgewicht) $x^* \in X$ heißt normalisiertes Gleichgewicht eines GNEP mit gemeinsamer Strategiemenge, wenn es $r_1, \ldots, r_n > 0$ gibt, sodass $\sup_{y \in X} \tilde{\Psi}(x^*, y) = 0$ ist wobei

$$
\tilde{\Psi}(x, y) := \sum_{\nu=1}^{N} r_\nu (f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f_\nu(y^\nu, x^{-\nu})), \qquad x, y \in X.
$$

Sei nun das GNEP wieder jointly konvex, $X \neq \emptyset$ abgeschlossen und f_ν stetig für $\nu = 1, \ldots, N$. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$
\psi_\alpha(x, y) \to \max_{y \in X}.
$$

Da ψ_α gleichmäßig konkav ist und $X \neq \emptyset$ abgeschlossen, existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y_\alpha(x)$. Definiere

$$
V_\alpha(x) := \sup_{y \in X} \psi_\alpha(x, y) = \psi_\alpha(x, y_\alpha(x)).
$$

4.20 Theorem

Sei $\alpha > 0$. Das GNEP sei jointly convex, X abgeschlossen und f_ν stetig für $\nu = 1, \ldots, N$. Dann gilt:

(i). $V_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in X$,

(ii). x^* ist genau dann ein normalisiertes Gleichgewicht, wenn $x^* \in X$ und $V_\alpha(x^*) = 0$.

4.21 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.20 ist x^* genau dann ein normalisiertes Gleichgewicht, wenn es die Optimierungsaufgabe

$$V_\alpha(x) \to \min_{x \in X}$$

löst und der optimale Zielfunktionswert 0 ist.

Im Gegensatz zu $\hat{V}_\alpha$ ist V_α stetig differenzierbar, wenn f_ν stetig differenzierbar ist für $\nu = 1, \ldots, N$.

4.22 Theorem

Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.20 erfüllt und f_ν sei stetig differenzierbar für $\nu = 1, \ldots, N$. Dann ist V_α stetig differenzierbar mit

$$\nabla V_\alpha(x) = \nabla_x \psi_\alpha(x, y)\big|_{y = y_\alpha(x)}.$$

Es lässt sich auch eine Umformulierung der Aufgabe, ein normalisiertes Gleichgewicht zu finden, in eine unrestringierte Optimierungsaufgabe angeben. Für $\beta > \alpha > 0$ sei

$$V_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto V_{\alpha\beta}(x) := V_\alpha(x) - V_\beta(x).$$

Dann ist x^* genau dann ein normalisiertes Gleichgewicht, wenn x^* die Optimierungsaufgabe $V_{\alpha\beta} \to \min$ löst und der optimale Zielfunktionswert 0 ist.

Frage: Unter welchen Bedingungen existiert ein normalisiertes Gleichgewicht?

4.23 Theorem

Es sei ein jointly konvex GNEP mit einer kompakten gemeinsamen Strategiemenge $X \neq \emptyset$ gegeben. Weiterhin seien die Auszahlungsfunktionen f_ν stetig für $\nu = 1, \ldots, N$. Dann gibt es mindestens ein normalisiertes Gleichgewicht.

Beweis: Angenommen, es gibt kein normalisiertes Gleichgewicht, dann gilt für jedes $x \in X$, dass $\sup_{y \in X} \psi(x, y) > 0$, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es $y = y(x) \in X$ mit $\psi(x, y) > 0$. Für $y \in X$ definiere

$$U(y) := \{x \in X; \psi(x, y) > 0\},$$

dann gilt $x \in U(y(x))$ für alle $x \in X$. Folglich ist $X \subseteq \bigcup_{y \in X} U(y)$. Da X kompakt ist und $U(y)$ offen (in X) für jedes y, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es existieren $y_1, \ldots, y_n$ mit

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U(y_j). \tag{4.3}$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in X$ definieren wir

$$d_j(x) := \max\{0, \psi(x, y_j)\} \qquad \text{und} \qquad \lambda_j(x) = \frac{d_j(x)}{\sum_{k=1}^{n} d_k(x)}.$$

(Beachte: Wegen $x \in X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U(y_k)$ gilt $\sum_{k=1}^{n} d_k(x) > 0$.) Offenbar ist $\lambda_j(x) \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) = 1$ für alle $x \in X$. Sei

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) y_j, \qquad x \in X,$$

dann ist $f(x)$ eine Konvexkombination der Vektoren $y_1, \ldots, y_n \in X$ und somit $f(x) \in X$ (da X konvex ist). Außerdem ist f stetig. Nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz, Satz 2.17, besitzt f daher einen Fixpunkt $x^* \in X$. Also gilt $x^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x^*) y_j$. Folglich, da $\psi(x^*, \cdot)$ konkav ist,

$$0 = \psi(x^*, x^*) = \psi\left(x^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x^*) y_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x^*) \psi(x^*, y_j).$$

Aus der Definition von λ_j folgt damit $\psi(x^*, y_j) \leq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dies widerspricht $x^* \in X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U(y_j)$. □

4.2.2 Umformulierung als Quasi-Variationsungleichung

Seien $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

4.24 Definition Seien $X : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ eine mengenwertige Abbildung und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Unter einer *Quasi-Variationsungleichung* versteht man das Problem einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass $x^* \in X(x^*)$ und

$$\forall x \in X(x^*) : F(x^*)^T \cdot (x - x^*) \geq 0.$$

Ein solcher Vektor x^* Lösung heißt *Lösung der Quasi-Variationsungleichung*. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *zulässig für die Quasi-Variationsungleichung*, wenn $x \in X(x)$. Für dieses Problem schreibt man kurz QVI(X, F).

Im Folgenden seien

$$X(x) := X_1(x^{-1}) \times \ldots \times X_N(x^{-N}) \quad \text{und} \quad F(x) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f_N(x) \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

4.25 Theorem

Die Strategiemengen $X_\nu(x^{-\nu})$ seien konvex und f_ν stetig differenzierbar für alle $\nu \in \{1, \ldots, N\}$. Dann gilt:

(i). Ist x^* eine Lösung des GNEP, so löst x^* auch QVI(X, F) mit X und F aus (4.4)

(ii). Ist das GNEP spiekerkonvex, so ist jede Lösung x^* von QVI(X, F) auch Lösung des GNEPs.

Beweis: Übungsaufgabe; wie Beweis von Satz 3.15. □

4.26 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 4.2)

$$f_1(x) := (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1} \quad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1$$
$$f_2(x) := \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min_{x_2} \quad \text{bei } x_1 + x_2 \leq 1$$

Offenbar ist das GNEP spielerkonvex (sogar jointly konvex) und F aus (4.4) ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.25 gilt daher

$$\begin{aligned}
x^* \text{ ist Lösung des GNEPs} &\iff x^* \text{ Lösung von QVI}(X, F) \\
&\iff x_1^* + x_2^* \leq 1, \forall x \in X(x^*) : 2\begin{pmatrix} x_1^* - 1 \\ x_2^* - \frac{1}{2} \end{pmatrix}(x - x^*) \geq 0 \\
&\iff x_1^* + x_2^* \leq 1, \forall x \in X(x^*) : (x_1^* - 1)(x_1 - x_1^*) + \left(x_2^* - \frac{1}{2}\right)(x_2 - x_2^*) \geq 0
\end{aligned}$$

Es gilt gerade $x \in X(x^*) \iff x_1 + x_2^* \leq 1, x_1^* + x_2 \leq 1$. Speziell für $x = (1 - x_2^*, 1 - x_1^*)$ folgt

$$0 \leq (x_1^* - 1)(1 - x_2^* - x_1^*) + \left(x_2^* - \frac{1}{2}\right)(1 - x_1^* - x_2^*) = \underbrace{(1 - x_1^* - x_2^*)}_{\geq 0}\underbrace{\left(x_1^* - \frac{3}{2} + x_2^*\right)}_{<0}.$$

Dies kann nur gelten, wenn $1 - x_1^* - x_2^* = 0$. Setzt man $x^* = (t, 1 - t)$, $t \geq 0$, in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich

$$(t - 1)(x_1 - t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)(x_2 - 1 + t) \geq 0 \qquad \text{für } x_1 \leq t,\ x_2 \leq 1 - t. \tag{4.5}$$

Für $x = (t, -t)$ folgt

$$(t-1)(t-t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)(-1) \geq 0 \implies t \geq \frac{1}{2}.$$

Für $x = (t-1, 1-t)$ folgt dann

$$(t-1)(-1) + 0 \geq 0 \implies t \leq 1.$$

Also muss $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ gelten. Andererseits ist (4.5) für solche t tatsächlich erfüllt. Damit gilt $x^* = (t, 1-t)$ für diese t. Die Lösungsmenge des GNEPs ist also gerade $\left\{(t, 1-t); t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$.

Leider stellen die Quasi-Variationsungleichungen selbst eine schwer zu handhabende Problemklasse dar - in dem Sinne, dass es bisher wenige effiziente Algorithmen zur Lösung gibt. Anders sieht das bei Variationsungleichungen aus. Das GNEP aus Beispiel 4.2 hatte die gemeinsame Strategiemenge

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Wir wollen die zugehörige Variationsungleichung betrachten und lösen.

4.27 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 4.2)

$$f_1(x) := (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1 \in X} \qquad f_2(x) := \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min_{x_2 \in X}$$

Dann

$$\begin{aligned} x^* \text{ löst } \mathrm{VI}(X, F) &\iff \forall x \in X : F(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, x^* \in X \\ &\iff \forall x \in X : (x^* - 1)(x_1 - x_1^*) + \left(x_2^* - \frac{1}{2}\right)(x_2 - x_2^*) \geq 0, x_1^* + x_2^* \leq 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Speziell für $x = (1 - x_2^*, x_2^*)$ ergibt sich

$$(x^* - 1)(1 - x_2^* - x_1^*) \geq 0. \tag{4.7}$$

Für $x = (x_1^*, 1 - x_1^*)$ folgt aus (4.6)

$$\left(x_2^* - \frac{1}{2}\right)(1 - x_1^* - x_2^*) \tag{4.8}$$

Addition der beiden Ungleichungen gibt

$$\underbrace{\left(x_2^* + x_1^* - \frac{3}{2}\right)}_{<0} \underbrace{(1 - x_1^* - x_2^*)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Folglich muss $x_1^* + x_2^* = 1$ gelten. Setze $x^* = (t, 1-t)$, dann ist (4.6) equivalent zu

$$(t-1)(x_1 - t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)(x_2 - (1-t)) \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x_1 + x_2 \leq 1. \tag{4.9}$$

Wie in Beispiel 4.26 folgt nun $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Speziell für $x = (1, 0)$ in (4.9):

$$(t-1)(1-t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)(-(1-t)) = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\left(2t - \frac{3}{2}\right) \geq 0.$$

Somit folgt, dass sogar $t \geq \frac{3}{4}$ gelten muss. Für $x = (0, 1)$ in (4.9):

$$(t-1)(-t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)t = \underbrace{t}_{>0}\left(\frac{3}{2} - 2t\right) \geq 0.$$

Damit muss auch $t \leq \frac{3}{4}$ gelten. Folglich ist $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})^T$ der einzige Kandidat für eine Lösung der Variationsungleichung. Für diesen Vektor sieht (4.6) wie folgt aus:

$$\underbrace{-\frac{1}{4}\left(x_1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right)}_{-\frac{1}{4}(x_1+x_2-1)} \geq \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x_1 + x_2 \leq 1.$$

Diese Bedingung ist offenbar erfüllt, d. h. x^* ist wirklich Lösung der Variationsungleichung. x^* war auch gerade das normalisierte Gleichgewicht.

4.28 Theorem

Gegeben sei ein GNEP mit einer nichtleeren konvexen Strategiemenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie stetig differenzierbare Auszahlungsfunktionen $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(i). Ist x^* ein normalisiertes Gleichgewicht, dann löst x^* $\mathrm{VI}(X, F)$ mit F aus (4.4).

(ii). Ist das GNEP sogar jointly konvex, dann ist auch jede Lösung von $\mathrm{VI}(X, F)$ (mit F aus (4.4)) ein normalisiertes Gleichgewicht.

Beweis: Übung. □

4.2.3 KKT-Bedingungen eines GNEPs

Betrachtet wird ein GNEP, bei dem die Strategiemengen $X_\nu(x^{-\nu})$ gegeben sind durch

$$X_\nu(x^{-\nu}) := \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; g^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, h^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) = 0\}. \tag{4.10}$$

Dabei seien $g^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_\nu}$ und $h^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ stetig differenzierbare Funktionen. Weiterhin seien die Auszahlungsfunktionen $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig differenzierbar. Ein Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des GNEPs, wenn für jedes $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ die Komponente $x^{*,\nu}$ die Optimierungsaufgabe

$$f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \to \min_{x^\nu} \qquad \text{bei } g^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \leq 0, h^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) = 0 \tag{4.11}$$

löst. Für $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ definieren wir $L_\nu : \mathbb{R}^{n_\nu} \times \mathbb{R}^{n_{-\nu}} \times \mathbb{R}^{m_\nu} \times \mathbb{R}^{\ell_\nu} \to \mathbb{R}$ durch

$$L_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda^\nu, \mu^\nu) := f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + (\lambda^\nu)^T g^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + (\mu^\nu)^T h^\nu(x^\nu, x^{-\nu}).$$

Dann ist $L_\nu(\cdot, x^{*,-\nu}, \cdot, \cdot)$ die Lagrange-Funktion von (4.11). Wir stellen nun das KKT-System zu (4.11) auf:

$$\begin{aligned} \nabla_{x^\nu} L_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}, \lambda^\nu, \mu^\nu) &= 0 \\ h^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) &= 0 \\ (\lambda^\nu)^T g^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) &= 0 \\ g^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) &\leq 0, \lambda^\nu \geq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wir wissen:

- Falls $x^{*,\nu}$ (4.11) löst und die ACQ in $x^{*,\nu}$ erfüllt ist, dann existieren $\lambda^{*,\nu}$ und $\mu^{*,\nu}$, sodass $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ das KKT-System (4.12) löst.
- Falls $(x^{*,\nu}, \lambda^{*,\nu}, \mu^{*,\nu})$ Lösung von (4.12) und außerdem $f_\nu(\cdot, x^{*,-\nu})$ konvex, $g^\nu(\cdot, x^{*,-\nu})$ komponentenweise quasikonvex und $h^\nu(\cdot, x^{*,-\nu})$ affin linear ist, dann löst $x^{*,\nu}$ die Optimierungsaufgabe (4.11).

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können Zusammenhänge zwischen dem GNEP und dem folgenden System hergestellt werden:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0, h(x) = 0, g(x) \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda^T g(x) = 0. \tag{4.13}$$

Dabei sind $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^N)^T$, $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^N)^T$,

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} L_1(x^1, x^{-1}, \lambda^1, \mu^1) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} L_N(x^N, x^{-N}, \lambda^N, \mu^N) \end{pmatrix} \quad g(x) := \begin{pmatrix} g_1(x^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ g_N(x^N, x^{-N}) \end{pmatrix} \quad h(x) := \begin{pmatrix} h_1(x^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ h_N(x^N, x^{-N}) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin setzen wir $m := \sum_{\nu=1}^N m_\nu$ und $\ell := \sum_{\nu=1}^N \ell_\nu$.

4.29 Theorem

Die Funktionen $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_\nu}$, $h^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ seien stetig differenzierbar für $\nu = 1, \dots, N$ und die Strategiemengen wie in (4.10) gegeben.

(i). Sei x^* eine Lösung des GNEPs. Für jedes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ sei in $x^{*,\nu} \in X_\nu(x^{*,-\nu})$ die ACQ erfüllt. Dann existieren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^\ell$, sodass (x^*, λ^*, μ^*) das System (4.13) löst.

(ii). Für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n_{-\nu}}$ seien $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex, $g^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ komponentenweise quasikonvex und $h^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ affin linear. Ist (x^*, λ^*, μ^*) eine Lösung von (4.13), so ist x^* eine Lösung des GNEPs.

Beweis: Folgt aus obigen Überlegungen, siehe auch Beweis für Nash-Gleichgewichtsprobleme, Theorem 3.28. □

Bemerkung Das System (4.13) wird auch *KKT-System des GNEPs* genannt.

4.30 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 4.2)

$$f_1(x) := (x_1 - 1)^2 \to \min_{x_1 \in X} \qquad \text{bei } g^1(x) := x_1 + x_2 - 1 \le 0$$
$$f_2(x) := \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min_{x_2 \in X} \qquad \text{bei } g^2(x) := x_1 + x_2 - 1 \le 0.$$

Die Funktionen $g^1(\cdot, x_2)$ und $g^2(x_1, \cdot)$ sind affin linear für jedes feste x_1 bzw. x_2. Damit ist die ACQ in jedem $x_1 \in X_1(x_2)$ und $x_2 \in X_2(x_1)$ erfüllt. Nach Satz 4.29 liefert also jede Lösung des GNEPs einen KKT-Punkt. Umgekehrt liefert auch jede Lösung des KKT-Systems eine Lösung des GNEPs, da f_ν und g^ν konvex für $\nu = 1, 2$. Wir bestimmen nun die Lagrange-Funktionen:

$$L_1(x_1, x_2, \lambda_1) := (x_1 - 1)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1)$$
$$L_2(x_1, x_2, \lambda_2) := \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda_2(x_1 + x_2 - 1).$$

KKT-Bedingungen:

$$\nabla_{x_1} L_1(x_1, x_2, \lambda_1) = 2(x_1 - 1) + \lambda_1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(I)}$$
$$\nabla_{x_2} L_2(x_1, x_2, \lambda_2) = 2\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(II)}$$
$$\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, x_1 + x_2 \le 1, \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \lambda_2(x_1 + x_2 - 1) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Wir betrachten mehrere Fälle getrennt:

(i). $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Dann gilt $x_1 - 1 = 0$ und $2x_2 = 1$, also $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 1$.

(ii). $x_1 + x_2 = 1$: Dann ist $x_2 = 1 - x_1$, $\lambda_1 = 2 - 2x_1$ und

$$\lambda_2 = -2x_2 + 1 = -2 + 2x_1 + 1 = -1 + 2x_1 \stackrel{!}{\ge} 0;$$

folglich gilt $1 \ge x_1 \ge \frac{1}{2}$. Damit ergibt sich die Menge der KKT-Punkte als

$$\left\{(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)^T = (t, 1-t, 2-2t, -1+2t)^T ; t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}.$$

Für den Rest des Abschnitts betrachten wir GNEPs mit gemeinsamer Strategiemenge

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) \leq 0, H(x) = 0\} \tag{4.14}$$

wobei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ und $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^L$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt sind. Das KKT-System (4.13) lautet dann

$$\begin{gathered}\nabla_{x^\nu} f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + \nabla_{x^\nu} G(x^\nu, x^{-\nu}) \cdot \lambda^\nu + \nabla_{x^\nu} H(x^\nu, x^{-\nu}) \cdot \mu^\nu = 0, \qquad \nu = 1, \dots, N \\ G(x) \leq 0, H(x) = 0, (\lambda^\nu)^T G(x) = 0.\end{gathered}$$

Wir schreiben $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T \in \mathbb{R}^{LN}$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T \in \mathbb{R}^{MN}$. Wir erinnern uns:

$$\begin{aligned} x^* \text{ ist normalisiertes Gleichgewicht} &\iff x^* \in X, \sup_{y \in X} \psi(x^*, y) = 0 \\ &\iff x^* \text{ löst } \psi(x^*, y) \to \max_{y \in X} \end{aligned}$$

Für unsere Sitation ist x^* gerade dann ein normalisiertes Gleichgewicht, wenn x^* die folgende Optimierungsaufgabe löst:

$$-\sum_{\nu=1}^N f_\nu(y^\nu, x^{*,-\nu}) \to \max_y \qquad \text{bei } G(y) \leq 0, H(y) = 0$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^N f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \to \min_x \qquad \text{bei } G(x) \leq 0, H(x) = 0. \tag{4.15}$$

Das KKT-System zu (4.15) lautet

$$\begin{gathered}\nabla_{x^\nu} f_\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) + \nabla_{x^\nu} G(x) u + \nabla_{x^\nu} H(x) v = 0, \\ u \geq 0, v \geq 0, u^T G(x) = 0, G(x) \leq 0, H(x) = 0.\end{gathered} \tag{4.16}$$

für $\nu = 1, \dots, N$.

4.31 Theorem

Gegeben sei ein GNEP mit einer nichtleeren gemeinsamen Strategiemenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die gemäß (4.14) gegeben ist.

(i). Ist $x^* \in X$ ein normalisiertes Gleichgewicht und ist in x^* die ACQ erfüllt, dann existieren $u^* \in \mathbb{R}^M$ und $v^* \in \mathbb{R}^L$, sodass (x^*, u^*, v^*) das KKT-System (4.16) löst.

(ii). Für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$ seien $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex, $g^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ komponentenweise quasikonvex und $h^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ affin linear. Ist (x^*, u^*, v^*) eine Lösung von (4.16), so ist x^* ein normalisiertes Gleichgewicht.

4.32 Theorem

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.31 gilt:

(i). Ist $x^* \in X$ ein normalisiertes Gleichgewicht und ist in x^* die ACQ erfüllt, dann existieren $u^* \in \mathbb{R}^m$ und $v^* \in \mathbb{R}^L$, sodass (x^*, λ^*, μ^*) mit $\lambda^* := (u^*, \dots, u^*)^T \in \mathbb{R}^{MN}$, $\mu^* := (v^*, \dots, v^*)^T \in \mathbb{R}^{LN}$ das KKT-System (4.13) löst.

(ii). Für alle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$ seien $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex, $g^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ komponentenweise quasikonvex und $h^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ affin linear. Ist (x^*, λ^*, μ^*) eine Lösung von (4.13) für die

$$\lambda^{*,1} = \ldots = \lambda^{*,N} \qquad \text{und} \qquad \mu^{*,1} = \ldots = \mu^{*,N}$$

gilt, dann ist x^* ein normalisiertes Gleichgewicht.

In Beispiel 4.30: Um ein normalisiertes Gleichgewicht zu finden, muss $\lambda_1 = \lambda_2$ erfüllt sein, d. h. $t = \frac{3}{4}$. Das einzige normalisierte Gleichgewicht ist also $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

5 Numerische Verfahren

5.1 Verfahren zur Lösung des KKT-Systems eines GNEPs

Es seien $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_\nu}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}; g^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0\}.$$

KKT-System zum GNEP:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = 0, g(x) \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda^T g(x) = 0. \tag{5.1}$$

5.1.1 Potential-Reduktion-Verfahren

Setze

$$\phi(z) := \phi(x,\lambda,w) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x,\lambda) \\ g(x) + w \\ w \circ \lambda \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

bei $z = (x,\lambda,w) \in \Omega := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$. Dabei ist $w \circ \lambda$ das *Hadamard-Produkt*:

$$w \circ \lambda := \begin{pmatrix} w_1\lambda_1 \\ \vdots \\ w_m\lambda_m \end{pmatrix}.$$

Das Potential-Reduktions-Verfahren ist ein Verfahren der inneren Punkte. Es erzeugt eine Folge $(z^k)_{k\in\mathbb{N}} = ((x^k,\lambda^k,w^k))_{k\in\mathbb{N}}$, deren Glieder in der Menge

$$\Omega_I := \{(x,\lambda,w) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)^m \times (0,\infty)^m; g(x) + w > 0\},$$

d. h. liegt nicht in der eigentlichen Lösungsmenge, aber man kommt "nah genug" heran. Wir wählen als Potentialfunktion $\psi : \Omega_I \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(z) := \psi(x,\lambda,w) := \varrho \ln(\|\phi(z)\|_2^2) - \sum_{i=1}^m \big(\ln(g_i(x) + w_i) + \ln(w_i\lambda_i)\big),$$

dabei ist $\varrho > m$ eine Konstante. Das Potentialfeld ψ ist auf Ω_I wohldefiniert und stetig differenzierbar.

5.1 Algorithmus (i). Wähle $z^0 \in \Omega_I$, $\varrho > m$, $\gamma \in (0,1)$. Setze $k := 0$ und $a := (0,\dots,0,1,\dots,1)$ (n Nullen, $2m$ Einsen).

(ii). Wähle $\sigma_k \in [0,1)$ und berechne d^k als Lösung des Systems

$$\nabla\phi(z^k)^T d = -\phi(z^k) + \sigma_k \frac{a^T\phi(z^k)}{\|a\|_2^2} \cdot a \tag{5.3}$$

(iii). Berechne Schrittweite $t_k := \max\{2^{-\ell}; \ell \geq 0\}$, so dass

$$z^k + t_k d^k \in \Omega_I \tag{5.4}$$

und

$$\psi(z^k + t_k d^k) \leq \psi(z^k) + \gamma t_k \nabla\psi(z^k)^T d^k. \tag{5.5}$$

(iv). Setze $z^{k+1} := z^k + t_k d^k$, $k := k+1$ und gehe zu Schritt 1.

5.2 Theorem

Die Matrizen $\nabla\phi(z)$ seien regulär für alle $z \in \Omega_I$. Dann ist Algorithmus 5.1 für jeden Startpunkt $z^0 \in \Omega_I$ wohldefiniert.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $z^0 \in \Omega_I$ und somit $\nabla\phi(z^0)$ regulär. Damit hat das lineare Gleichungssystem (5.3) eine eindeutige Lösung d^0. Dafür gilt (siehe Übung) $\nabla\psi(z^0)^T d^0 < 0$. Mit der Taylor-Formel erhalten wir für $t > 0$

$$\psi(z^0 + td^0) = \psi(z^0) + t\nabla\psi(z^0)^T d + \sigma(t)$$

mit $\sigma(t) = o(t)$. Es existiert $\bar{t} > 0$, sodass

$$\sigma(t) \leq -(1-\gamma)t\nabla\psi(z^0)^T d^0 \qquad \text{für alle } t \in (0, \bar{t}].$$

Daraus folgt

$$\psi(z^0 + td) \leq \psi(z^0) + \gamma t\nabla\psi(z^0)^T d^0 \qquad \text{für alle } t \in (0, \bar{t}].$$

Da außerdem Ω_I offen ist, existiert $t_0 \in \{2^{-\ell}; \ell \geq 0\}$ derart, dass (5.4) und (5.5) für $k = 0$ erfüllt sind. Der Rest ist Induktion. □

5.3 Theorem

Die Matrizen $\nabla\phi(z)$ seien regulär für alle $z \in \Omega_I$ und die Folge $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfülle $\limsup_{k\to\infty} \sigma_k < 1$. Sei $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine durch Algorithmus 5.1 erzeugte Folge. Dann sind folgende Aussagen erfüllt:

(i). Die Folge $(\phi(z^k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(ii). Jeder Häufungspunkt von $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Lösung von (5.2).

Beweis: (i). Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi(z^k) &= \varrho \ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) - \sum_{i=1}^m (\ln(g_i(x^k) + w_i^k) + \ln(w_i^k \lambda_i^k)) \\
&= (\varrho - m)\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) + \frac{m}{2}\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) - \sum_{i=1}^m \ln(g_i(x^k) + w_i^k) \\
&\quad + \frac{m}{2}\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) - \sum_{i=1}^m \ln(w_i^k \lambda_i) \\
&= (\varrho - m)\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) + \sum_{i=1}^m (\ln(\|\phi(z^k)\|_2) - \ln(g_i(x^k) + w_i^k)) + \sum_{i=1}^m (\ln(\|\phi(z^k)\|_2) - \ln(w_i^k \lambda_i)) \\
&= (\varrho - m)\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2) + \sum_{i=1}^m \ln\frac{\|\phi(z^k)\|_2}{g_i(x^k) + w_i^k} + \sum_{i=1}^m \ln\frac{\|\phi(z^k)\|_2}{w_i^k \lambda_i} \\
&\geq (\varrho - m)\ln(\|\phi(z^k)\|_2^2).
\end{aligned}$$

Wegen $\varrho > m$ ist somit auch die Folge $(\psi(z^k))_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt wachsend. Andererseits ist aber $(\psi(z^k))_{k\in\mathbb{N}}$ per Konstruktion eine monton fallende Folge. Widerspruch!

(ii). Sei $z^* = (x^*, \lambda^*, w^*)$ ein Häufungspunkt der Folge und sei $(z^k)_{k\in K}$ eine Teilfolge, die gegen z^* konvergiert. Wegen $(z^k)_{k\in K} \subseteq \Omega_I \subseteq \Omega$ und der Abgeschlossenheit von Ω ist $z^* \in \Omega$. Noch zu zeigen: $\phi(z^*) = 0$. Angenommen, $\phi(z^*) \neq 0$. Wegen $\lim_{k\in K} \phi(z^k) = \phi(z^*)$ gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\|\phi(z^k)\|_2 \geq \epsilon$ für alle $k \in K$. Des weiteren gilt $\psi(z^k) \leq \varrho_0 := \psi(z^0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d. h.

$$\varrho \ln(\underbrace{\|\phi(z^k)\|_2^2}_{\geq \epsilon^2}) - \sum_{i=1}^m (\ln(g_i(x^k) + w_i^k) + \ln(w_i^k \lambda_i^k)) \leq \varrho_0.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{m}(\ln(g_i(x^k)+w_i^k)+\ln(w_i^k\lambda_i^k)) \geq -\varrho_0 + 2\varrho\ln\epsilon$$

für alle $k \in K$. Unter der Beachtung der Beschränktheit der Folge $(z^k)_{k\in K}$ existiert daher $\zeta > 0$, sodass

$$g_i(x^k)+w_i^k \geq \zeta \qquad \text{und} \qquad w_i^k\lambda_i^k \geq \zeta$$

für alle $i = 1,\dots,m$ und $k \in K$. Folglich gilt auch $g_i(x^*)+w_i^* \geq \zeta$ und $w_i^*\lambda_i^* \geq \zeta$, also ist $z^* \in \Omega_I$. Jetzt muss man noch zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

□

Bemerkung Praktisch zeigt sich, dass das Verfahren in die Nähe der Lösung führt, aber nahe bei der Lösung ist die Konvergenz schlecht. Daher als nächstes: lokales Verfahren.

5.1.2 Levenberg-Marquardt-Verfahren

Ziel: Löse

$$\Phi(z) = 0 \tag{5.6}$$

für $\Phi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ stetig differenzierbar. Angenommen, $Z := \{z \in \mathbb{R}^{n_1}; \Phi(z) = 0\} \neq \emptyset$. Wähle $z^* \in Z$. Idee: Lösere kleinere Teil-/Ersatzprobleme anstatt (5.6). Sei $s \in \mathbb{R}^{n_1}$ beliebig aber fest.

$$\frac{1}{2}\|\Phi(s)+\nabla\Phi(s)^T(z-s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\alpha(s)\|z-s\|_2^2 \to \min_z \tag{5.7}$$

wobei $\alpha(s) > 0$. Die Zielfunktion ist offenbar quadratisch und gleicht

$$\theta(z;s) := \frac{1}{2}(z-s)^T(\nabla\Phi(s)\nabla\Phi(s)^T + \alpha(s)I)(z-s) + \text{linearer Term}.$$

Da die Matrix symmetrisch und positiv definit ist, ist die Zielfunktion von (5.7) gleichmäßig konvex, also besitzt das Problem eine eindeutige Lösung. Diese Lösung ist eindeutig als Lösung des linearen Gleichungssystems (mit regulärer Systemmatrix) $\nabla_z\theta(z;s) = 0$ bestimmbar.

5.4 Algorithmus (i). Wähle $z^0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ und setze $k := 0$.

(ii). Falls $\Phi(z^k) = 0$, dann stoppe den Algorithmus.

(iii). Wähle $\alpha(z^k) > 0$ und berechne $z(z^k)$ als Lösung von (5.7) mit $s := z^k$.

(iv). Setze $z^{k+1} := z(z^k)$ und gehe zu Schritt 1.

Lokale Fehlerschranke: Es gibt $\omega > 0$, $\delta > 0$, sodass

$$d(z,Z) \leq \omega\|\Phi(z)\|_2 \qquad z \in B(z^*,\delta) \tag{5.8}$$

Setze

$$\alpha(s) := \begin{cases} \|\Phi(s)\|_2^2, & s \notin Z, \\ 1, & s \in Z \end{cases} \tag{5.9}$$

5.5 Theorem

Es gelte (5.8) mit gewissen Konstanten $\omega, \delta > 0$ und α wie in (5.9). Dann existiert $\epsilon > 0$, sodass für alle $z^0 \in B(z^*,\epsilon)$ gilt: Algorithmus 5.4 bricht nach endlich vielen Schritten ab oder erzeugt eine unendliche Folge $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$, die Q-quadratisch gegen eine Lösung $\hat{z} \in Z$ konvergiert:

$$\|z^{k+1}-\hat{z}\|_2 \leq C\|z^k-\hat{z}\|_2^2, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ohne Beweis. (Lang; 1-2 Fischer-Vorlesungen)

Zur Anwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens auf GNEPs verwendet man zum Beispiel

$$\Phi(z) := \Phi(x,\lambda) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x,\lambda) \\ \phi(\lambda_1, -g_1(x)) \\ \vdots \\ \phi(\lambda_m, -g_m(x)) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

wobei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Komplementaritätsfunktion ist, die folgende Bedingung erfüllt:

$$\phi(a,b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, a \cdot b = 0.$$

Zum Beispiel $\phi(a,b) := \min\{a,b\}$ (ist nicht differenzierbar an $a = b$) oder $\phi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - a - b$.

5.1.3 Ein Strafverfahren

$$f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \to \min_{x^\nu} \qquad \text{bei } g^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0 \tag{5.11}$$

wobei $f_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_\nu}$ zweimal stetig differenzierbar seien. Weiterhin seien $f_\nu(\cdot, x^{-\nu})$ und $g^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ konvex für alle $\nu \in \{1,\dots,N\}$ und $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-\nu}$. Ersatzproblem:

$$f_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + \varrho_\nu \left\|\max\left\{0, g^\nu(x^\nu, x^{-\nu})\right\}\right\|_\gamma \to \min_{x^\nu}. \tag{5.12}$$

Dabei ist $\varrho_\nu > 0$ ein Strafparameter und $\gamma \in (2,\infty)$ fest gewählt; hierbei bezeichnet

$$\|x\|_\gamma := \left(\sum_{i=1}^{l} |x_i|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

die γ-Norm. Das Nash-Gleichgewichtsproblem, das durch die Optimierungsaufgabe (5.12) entsteht, wird mit PNEP_ϱ (penalized nash equilibrium problem) wobei $\varrho := (\varrho_1, \dots, \varrho_N)^T$. Definiere

$$\mathcal{P}(x) := \left\{\nu \in \{1,\dots,N\} : \exists i \in \{1,\dots,m_\nu\} : g_i^\nu(x) > 0\right\}.$$

Ein Strafparamater ϱ_ν wird verdoppelt, falls $\nu \in \mathcal{P}(x)$ und außerdem

$$\|\nabla_{x^\nu} f_\nu(x)\|_2 > c_\nu \varrho_\nu \|\nabla_{x^\nu} \|\max\{0, g^\nu(x)\}\|_\gamma\|_2. \tag{5.13}$$

Hierbei ist $c_\nu \in (0,1)$ fest gewählt. Man beachte, dass $\nabla_{x^\nu}\|\max\{0, g^\nu(x)\}\|_\gamma$ wohldefiniert ist wegen $\gamma > 2$ und $\nu \in \mathcal{P}(x)$. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für (5.12) liefern

$$\nabla_{x^\nu} f_\nu(x) + \varrho_\nu \nabla_{x^\nu}\|\max\{0, g^\nu(x)\}\|_\gamma = 0$$

d. h. (5.13) gilt mit Gleichheit und $c_\nu = 1$. Geglättetes Problem:

$$P_\nu(x; \varrho_\nu, \varepsilon) := f_\nu(x) + \left(\sum_{i=1}^{m_\nu} \max\{0, g^\nu(x)\}^\gamma + \varepsilon\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{\varepsilon}{2}\|x^\nu\|_2^2 \to \min_{x^\nu} \tag{5.14}$$

wobei $\varepsilon > 0$. Das zu (5.14) assoziierte Nash-Gleichgewichtsproblem wird mit $\mathrm{PNEP}_\varrho(\varepsilon)$ bezeichnet. Die Funktion $P_\nu(\cdot; \varrho_\nu, \varepsilon)$ ist wegen $\gamma > 2$ und den Glattheitseigenschaften von f_ν, g^ν sogar zweimal stetig differenzierbar. Außerdem ist die Funktion gleichmäßig konvex. Aus Satz 3.15 wissen wir, dass ein Vektor x^* genau dann (5.14) löst, wenn er Lösung der Variationsungleichung $\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n, F_{\varrho,\varepsilon})$ ist mit

$$F_{\varrho,\varepsilon}(x) := (\nabla_{x^\nu} P_\nu(x; \varrho, \varepsilon))_{\nu=1,\dots,N}.$$

Das ist wiederum äquivalent zum nichtlinearen Gleichungssystem $F_{\varrho,\varepsilon}(x) = 0$.

5.6 Lemma

Es sei $\varrho \in (0,\infty)^N$ und $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ zwei gegen Null konvergente Folgen. Falls $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\|F_{\varrho,\epsilon_k}(x^k)\| \leq \xi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist jeder Häufungspunkt der Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösung von PNEP_ϱ.

Ohne Beweis.

5.7 Algorithmus (i). Wähle $\gamma > 2$, $\varrho^0 := (\varrho_1^0,\ldots,\varrho_N^0) \in (0,\infty)^N$, $c_1,\ldots,c_N \in (0,1)$ sowie Folgen $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ mit $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$. Setze $k := 0$.

(ii). Bestimme x^k, sodass $\|F_{\varrho^k,\epsilon_k}(x^k)\| \leq \xi_k$.

(iii). Falls x^k eine Lösung des GNEPs ist, dann stoppe den Algorithmus.

(iv). Für jedes $\nu \in \{1,\ldots,N\}$: Ist $\nu \in \mathcal{P}(x^k)$ und ist (5.13) erfüllt für $x = x^k$, dann setze $\varrho_\nu^{k+1} := 2\varrho_\nu^k$. Anderenfalls setze $\varrho_\nu^{k+1} := \varrho_\nu^k$.

(v). Setze $k := k+1$ und gehe zu Schritt 1.

5.8 Theorem

Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\varrho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch Algorithmus 5.7 erzeugt. Ist die Folge $(\varrho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist jeder Häufungspunkt von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösung des GNEPs.

Erweiterte Mangasarian-Fromovitz-Constraint Qualification (EMFCQ): EMFCQ gilt in $x \in \mathbb{R}^n$ gilt falls für $\nu \in \{1,\ldots,N\}$ ein $d^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ existiert, sodass für alle i mit $g_i^\nu(x) \geq 0$:

$$\nabla_{x^\nu} g_i^\nu(x)^T d^\nu > 0.$$

5.9 Theorem

Die EMFCQ sei in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch Algorithmus 5.7 erzeugt. Dann ist jeder Häufungspunkt von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösung des GNEP.

Index