Einführungskurs Mathematik

von

Prof. Dr. Michael Junk
Universität Konstanz

Stand: 17.09.2010

Vorwort

Dieser Vorkurs hat das Ziel, die weit verbreiteten Anfangsschwierigkeiten beim Studium des Fachs Mathematik an der Universität abzudämpfen. Der Grund für diese Schwierigkeiten ist dabei wohl die, im Vergleich zum Mathematikunterricht in der Schule, sehr unterschiedliche Zielsetzung. Während in der Schule über viele Jahre die Frage „*Wie* geht das?“ im Vordergrund stand, hat an der Universität plötzlich die Frage „*Warum* geht das?“ allerhöchste Priorität.

Dieser kleine Wechsel von *Wie* nach *Warum* hat enorme Konsequenzen. In der Schule kann man sehr gut in Mathematik sein, wenn man vorgegebene Rechenregeln (z.B. die der Bruchrechnung) oder vorgegebene Algorithmen (etwa schriftliches Dividieren oder Kurvendiskussion) nicht vergisst und korrekt anwenden kann. An der Universität wird diese Fähigkeit quasi stillschweigend vorausgesetzt. Für die Note *sehr gut* reicht sie aber auf keinen Fall, denn Mathematik an der Hochschule bedeutet nicht Fortführung der Schulmathematik mit noch mehr Rechenregeln für noch kompliziertere Objekte. Der entscheidende neue Aspekt ist die Fähigkeit, verstehen und präzise erklären zu können, *warum* gewisse mathematisch Regeln und Zusammenhänge gelten. Nur wer sich diese Fähigkeit aneignet, kann neue Zusammenhänge und Regeln finden, wodurch die Mathematik wächst und sich wandelt und damit lebendig bleibt. Damit wird der leider oft eher maschinelle Umgang mit Mathematik in der Schule durch einen kreativen Zugang ersetzt und genau dieser schöpferische Aspekt macht Spaß!

Konkret äußert sich der Wechsel von *Wie* nach *Warum* darin, dass alle mathematischen Aussagen *bewiesen* werden. Der Beweis ist das *Darum!* auf die Frage *Warum?*. Deshalb wimmelt es in Vorlesungen und Hausaufgaben so von Beweisen.

Es geht also in der Mathematik in erster Linie um sauberes, präzises Argumentieren und Erklären. Die Vermittlung dieser Fähigkeit ist das eigentliche Lernziel an der Universität. Allerdings lässt sich Erklären nicht auswendig lernen wie Bruchrechnen. Ein Rezept für Erklärungen gibt es nicht. Jede neue Fragestellung ist eine neue Herausforderung. Trotzdem ist die Fähigkeit erlernbar. Wenn Sie sich viele Erklärungen (Beweise) genau ansehen und die Gedankengänge selbständig nachvollziehen, wird ihr Gehirn nach einiger Zeit wiederkehrende Muster im Erklären und Argumentieren erkennen – Sie lernen Mathematik zu machen.

Aus dem bisher Gesagten wird klar, dass der Studienbeginn mit einem Perspektivenwechsel verbunden ist. Um eine neue Perspektive anzunehmen, ist es natürlich wichtig, diese überhaupt zu kennen. Hier soll Ihnen der Vorkurs eine Hilfestellung geben.

In Kapitel 1 wird dazu genauer erklärt, wo die Schwerpunkte beim Mathematikstudium an der Universität liegen. Wie eine typische Mathematikvorlesung aussieht und wie man damit umgeht, ist das Thema von Kapitel 2. Im den beiden darauf folgenden Kapiteln werden elementare Beweismuster vorgestellt und gleichzeitig einige mathematische Grundkonzepte eingeführt, die Sie auf jeden Fall in Ihrem Studium brauchen. Bevor das Beweistraining in Kapitel 6 vertieft wird, fasst Kapitel 5 einige Grundkonzepte der mathematischen Logik zusammen. Die Kapitel werden jeweils von Übungsaufgaben begleitet, an denen Sie die neu erworbenen Kenntnisse ausprobieren können.

KAPITEL 1

Anmerkungen zur Hochschulmathematik

In einem Zeitraum von mehreren tausend Jahren haben die Menschen die Wissenschaft *Mathematik* entwickelt, um die von ihnen beobachteten Gesetzmäßigkeiten und Ordnungen in ihrer Umwelt zu beschreiben. Dabei bedeutet *Mathematik machen* nicht nur *Rechnen* bzw. Anwendung von vorgegebenen Regeln, sondern vor allem das Entwickeln *neuer* Regeln und Ordnungsstrukturen, die dabei helfen sollen, die Welt besser zu verstehen.

In diesem Zusammmenhang haben sich eine spezielle *Fachsprache*, eine eigene *Symbolik* sowie eine angepasste *Methodik* entwickelt. Die Formulierung mathematischer Sachverhalte benutzt z.B. Sprachelemente der Logik und Mengenlehre und seit ungefähr einhundert Jahren beruht die Vorgehensweise beim Entwickeln neuer mathematischer Theorien auf der so genannten axiomatischen Methode. Im Vergleich zu anderen Wissenschaften ist die Besonderheit der Mathematik, dass Begriffe und Argumentationen extrem *präzise* genutzt werden. Der Umgang mit dieser Präzision sowie mit der hohen Dichte des über viele Jahre hinweg gesammelten und stark vernetzten Wissens kann zu Studienbeginn erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Dies etwas abzumildern ist das Ziel des Vorkurses.

Vom Gymnasium sind Sie an eine bestimmte Form des Lernens und an einen bestimmten Umgang mit Mathematik gewöhnt. Sie werden sehen, dass sich Ihr Mathematikstudium an der Universität deutlich davon unterscheidet. Einige Gründe für diesen Unterschied sind in den folgenden Abschnitten beschrieben.

1.1. Kondensiertes Wissen

Die Ursprünge des Gebiets „Analysis“ liegen im 17. Jahrhundert und sind verbunden mit den Namen Isaac Newton und Gottfried Wilhelm

Leibniz. Seit dieser Zeit wurde eine riesige Menge praktischer Erfahrungen mit Konzepten wie Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit gesammelt. Die vielen Anwendungsbeispiele wurden zu abstrakteren Aussagen verdichtet, Beziehungen zwischen Konzepten wurden entdeckt, nicht vorhandene (aber oft intuitiv vorausgesetzte) Beziehungen wurden durch geschickte Gegenbeispiele widerlegt.

Das Destillat aus diesem mehr als dreihundert jährigen Prozess wird Ihnen nun in drei Semestern serviert. Der Vorteil: Sie sind 200x schneller fertig! Der Nachteil: Sie lernen die abstrahierten Konzepte aber nicht die vielen Beispiele, Gedankengänge und Irrwege, die zur Abstraktion führten und die zu einem tiefer gehenden Verständnis unverzichtbar sind.

Der einzige Ausweg: Sie müssen sich Beispiele ansehen, Sie müssen Gedankengänge selbst durchführen und eigene Irrwege durchlaufen (Stichwort „wie würde ich das denn machen”). Kurzum, Sie müssen dem Destillat, das in der Vorlesung vermittelt wird wieder „Wasser” hinzufügen, d.h. jedes abstrakte Konzept sofort an *mehreren* Bespielen studieren, beobachten und ausprobieren. Ansonsten ist das Destillat ungenießbar und führt zu Magenverstimmungen.

Gleiches gilt für den Bereich Algebra und Geometrie, mit dem kleinen Unterschied, dass hier noch wesentlich mehr Zeit zum Konzept-Kondensieren zur Verfügung stand. Bereits die Babylonier beschäftigten sich mit algebraischen Fragestellungen und die Geometrie wurde in Griechenland vor knapp zweitausend Jahren bereits sehr weit entwickelt.

Auch hier gilt: immer Beispiele zu abstrakten Konzepten studieren (oder besser noch, eigene Beispiele konstruieren und dann studieren).

1.2. Präzise Ausdrucksweise

Wie bereits angedeutet, gehört es zu den Zielsetzungen der Mathematik, Gesetzmäßigkeiten und Ordnungsstrukturen zu entdecken. Eine unklare bzw. mehrdeutige Sprache wie die Umgangssprache ist allerdings für die Beschreibung von präzisen Gesetzmäßigkeiten ungeeignet. Den in der mathematischen Fachsprache benutzten Vokabeln werden deshalb in so genannten *Definitionen* jeweils unmissverständliche Bedeutungen zugewiesen.

Bei Begriffen wie *Unterverktorraum*, *Spuroperator* oder *kompakte Mannigfaltigkeit* gibt es kaum Verwechslungsgefahr mit Alltagskonzepten und man wird automatisch die genaue Definition zu Rate ziehen, wenn man mit den Objekten arbeitet. Gefährlicher sind da schon Begriffe wie *natürliche Zahl*, *unbeschränktes Gebiet*, *glatte Kurve*, *Inhalt* oder *Wahrscheinlichkeit*, die auch in der Umgangssprache eine ähnliche Bedeutung haben. Hier muss man sorgfältig darauf achten, die präzise mathematische Bedeutung zu verwenden und nicht die umgangssprachliche.

Am Beispiel des Wortes *oder* soll dies etwas genauer beleuchtet werden. In der Umgangssprache denkt man bei Aussagen wie *Alfons kauft Fleisch oder Fisch*, dass Alfons *entweder* mit Fleisch oder mit Fisch nach Hause kommt. Das mathematische *oder* umfasst aber auch den Fall, dass beide Ereignisse eintreffen. D.h. *Alfons kauft Fleisch oder Fisch* ist kompatibel mit drei Fällen (1) Alfons kauft nur Fisch, (2) Alfons kauft nur Fleisch, (3) Alfons kauft Fisch und Fleisch. Denkt man in einer mathematischen Argumentation bei dem Wort *oder* unpräzise an die umgangssprachliche Zweitbedeutung *entweder oder* dann entgleitet ein möglicher Fall der Aufmerksamkeit, was natürlich gravierende Auswirkungen haben kann.

Es ist in der Mathematik also besonders wichtig, auf die Sprache zu achten: Worte haben genau geregelte Bedeutung und es kommt auf jedes Detail an. Beachtet man das nicht, sind Aussagen schnell falsch und „Ich hatte es aber doch so gemeint" hilft nicht weiter.

Schon Goethe kommentierte die besondere Sprachnutzung in der Mathematik:

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald ganz etwas anders.

Die Präzision bezieht sich aber nicht nur auf das Formulieren von Aussagen sondern auch auf die logische Argumentation. Nach genau festgelegten Regeln werden hierbei aus gegebenen wahren Aussagen neue wahre Aussagen abgeleitet. Die abgeleitete Aussage nennt man dabei einen *Satz* und den Nachweis, dass die Aussage wahr ist, einen *Beweis.*

Prinzipiell besteht ein Beweis also aus einer Kette von wahren Aussagen die mit genau angegebenen logischen Schlussregeln verknüpft werden. Diese Vorgehensweise hat einen riesigen Vorteil; denn sie erlaubt es jedem die Argumentation genau nachzuprüfen. Selbst Beweise des größten Mathematikers können prinzipiell vom Studierenden im ersten Semester überprüft und für korrekt bzw. inkorrekt befunden werden. Dazu muss nämlich nur nachgesehen werden, ob die als wahr benutzten

Aussagen tatsächlich wahr sind, d.h. wieder Sätze sind, und ob die logischen Schlussregeln korrekt sind und korrekt benutzt werden (diesen Prozess werden wir uns in Kapitel 5 ansehen).

Die Präzision der Formulierung und Schlussfolgerung verhindert also in der Mathematik, dass Aussagen als wahr bezeichnet werden, nur weil mächtige Personen das gerne hätten. Dies ist ein sehr angenehmer Aspekt!

Andererseits hat absolute Präzision aber auch den Nachteil, sehr zeitraubend und umständlich zu sein. Aus diesem Grund werden Sie kaum einen Beweis finden, in dem wirklich *alle* benutzten wahren Aussagen als solche aufgeführt wurden und genauso wird nicht *jede* benutzte Schlussregel angegeben. Diese Nachlässigkeit führt dann dazu, dass es für Studierende im ersten Semester doch wieder schwierig wird, Beweise zu verstehen und fast unmöglich, Beweise in Forschungsarbeiten nachzuvollziehen.

Wie kommt es dazu? Stellen Sie sich eine Gruppe von Mathematikern vor, die Beweise stets in absoluter Präzision (d.h. in größter Ausführlichkeit) angeben. Nach einiger Zeit stellt sich heraus, dass bestimmte Argumentationsabläufe immer wieder sehr ähnlich sind. Irgendwann werden die Gruppenmitglieder sich darauf einigen, diese immer sehr ähnlichen Schritte nicht mehr im Detail auszuschreiben, um Papier und Zeit zu sparen. Sie schreiben zur Abkürzung nur noch *daraus folgt*, oder *daher*, oder *und damit ergibt sich*, oder einfach gar nichts, da jeder in der Gruppe in der Lage ist, die Details nachträglich wieder einzufügen. Diese Vorgehensweise ist effektiv innerhalb der Gruppe, erschwert aber offensichtlich dem Neueinsteiger das Verständnis.

Die einzige Möglichkeit für den Neuling, die unpräzise Darstellung zu verstehen, besteht darin, den Gruppenprozess zu wiederholen. Die mühsame Anfangsphase des sehr genauen Aufschreibens muss durchlaufen werden, die immer wieder auftretenden Schlussweisen müssen selbst entdeckt werden, bis es langweilig wird, sie stets im Detail anzugeben. Erst wenn Klarheit besteht, wie Beweise auf dem höchsten Präzisionslevel zu führen sind, darf man Abkürzungen benutzen! Wer versucht, die Beweisführung erfahrener Mathematiker einfach nachzumachen, ohne zu wissen, wie der präzise Beweis aussehen müsste, ist in großer Gefahr, falsche Beweise zu produzieren.

Was bedeutet das für Sie? In diesem Vorkurs wird gezeigt, wie das Beweisen auf der höchsten Präzisionsebene funktioniert. Sie werden dabei sehen, dass dies zwar sehr aufwendig ist, aber letztlich einer einzigen sehr einfachen Regel folgt. Mit diesem Wissen ausgestattet können Sie sich dann Vorlesungen anhören und sie anschließend in Eigenarbeit auf Ihren aktuellen Präzisionslevel *übersetzen*. Dazu aber mehr im nächsten Abschnitt.

1.3. Kreativität und Anschauung

Nach dem bisher Gesagten mag es so aussehen, als ob die Mathematik eine Maschinerie sei, um mit vorgegebenen Schlussregeln aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen abzuleiten. Diese Sichtweise ist allerdings sehr verkürzt und würde sicherlich nicht erklären, warum sich viele Menschen leidenschaftlich mit Mathematik beschäftigen.

Mathematik machen ist tatsächlich ein kreativer Prozess und ähnelt oft einer Schatzsuche verknüpft mit Gefühlen wie Spannung, Freude, Ehrgeiz, Wut, Überraschung, Frustration, Mühe, Euphorie und Glück. Kreativität ist gefordert, um in einer bestehenden Theorie neue Fragestellungen zu formulieren bzw. neue Zusammenhänge zwischen den Objekten der Theorie zu entdecken.

Besonders reizvoll ist es auch, Fragestellungen anderer Wissenschaften zu mathematisieren d.h. mathematische Objekte zu kreieren bzw. zu definieren, um die Fragestellung mathematischen Methoden zugänglich zu machen (diese Arbeit wird als mathematisches *Modellieren* bezeichnet). Ist die Fragestellung in Mathematik übersetzt, ergeben sich schnell interessante Folgefragen (hin und wieder auch ganz neue Theorien) und es hat einen besonderen Reiz, die gefundenen mathematischen Ergebnisse in die Sprache des Ausgangsproblems zurück zu übersetzen.

Auch wenn es darum geht, eine mathematische Aussage zu beweisen, ist viel Kreativität gefordert. Beweisen geht nicht nach Rezeptbuch! (Im Gegensatz zum Nachvollziehen von Beweisen, was eine fast mechanisch durchführbare Aufgabe ist.) Einen Beweis zu finden gleicht eher dem Zusammensetzen eines Puzzles mit der zusätzlichen Schwierigkeit, dass mehr Teile als benötigt zur Verfügung stehen [**7, 6**]. Das Puzzlebild (die mathematische Aussage) ist bekannt aber wie setzt man es zusammen? Gewisse Techniken gibt es natürlich schon, aber klare Rezepte wie z.B. *nimm ein Teil und probiere alle anderen durch, bis ein passendes Nachbarteil gefunden ist* funktionieren nur bei sehr kleinen Puzzles. Die Baustrategien sind eher vage und oft abhängig vom Puzzlebild (z.B. *fange mit Randstücken an*, *suche Teile mit ähnlicher Farbe oder Textur*). Auf jeden Fall erfordert Puzzle bauen Kombinationsgabe, Spürsinn und Mustererkennung. Genau das gleiche gilt beim Beweisen und wie beim puzzlen ergibt sich die Regel *Wenn es nicht auf Anhieb klappt, nicht einfach aufgeben, sondern an einer anderen Ecke einen neuen Anlauf versuchen.*

Eine wichtige Voraussetzung um mit mathematischen Objekten kreativ zu arbeiten ist Anschauung. Zu jedem abstrakten Objekt muss man gute Beispiele kennen und unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten selbst ausprobiert haben. Nur diese Vertrautheit erlaubt es, ein Objekt kreativ einsetzen zu können. Dabei unterscheiden sich mathematische Objekte und Konzepte nicht von anderen Werkzeugen wie etwa den Werkzeugen eines Tischlers. Um mit ihnen kreativ arbeiten zu können muss man die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten an konkreten Beispielen studiert haben. Dass viel Übung nötig ist, um mit den Werkzeugen kunstvoll umgehen zu können, versteht sich von selbst. Das Gleiche gilt für die mathematischen Werkzeuge.

1.4. Forschen statt pauken

Was sind eigentlich die Voraussetzungen für erfolgreiches Studieren? Zunächst einmal ist Studieren ein Lernprozess, denn es geht um die sehr genaue geistige Durchdringung eines Themengebietes. Deshalb hat erfolgreiches Studieren viel mit erfolgreichem Lernen zu tun.

Wie das funktioniert, zeigen uns am besten kleine Kinder die Gehen oder Sprechen lernen. Ihr Lernprozess besteht aus einer Wiederholung von beobachten, nachmachen, experimentieren, üben, nachmachen, experimentieren, beobachten... Lernprozesse verlangen eine intensive *selbständige* Beschäftigung mit dem Lerngegenstand. Diese kreative eigenständige Beschäftigung ist wichtig und nicht die Zeit, die dafür erforderlich ist. Lernen wird nicht in Stunden gemessen, sondern in Anzahl der Aha-Erlebnisse, d.h. der selbständig gewonnenen Einsichten.

Betrachten Sie folgende Analogie: Klavierspielen (Mathematik) hat noch *niemand* allein durch den Besuch von Konzerten (Vorlesungen) gelernt. Konzerte zeigen nur *was* gespielt werden kann und vielleicht können Sie einige Griff*techniken* beobachten. Um Klavierspielen zu lernen, müssen Sie aber selbst auf die Tasten drücken! Es nützt auch nichts, wenn Sie viel über die Technik des Klavierspielens lesen und viel Zeit mit Büchern verbringen. Bücher sind wichtig als Anleitungen, aber das eigenhändige selbständige Umgehen mit dem Instrument (der Mathematik) können Sie nicht ersetzen.

Die Vorlesungen versorgen Sie also mit geistigem Futter: sie stellen Themengebiete vor, sie geben Anregungen, es werden Tricks und Kniffe verraten und sie bieten die Möglichkeit Fragen zu stellen und zu diskutieren. Auf jeden Fall werden Sie hier in schneller Folge mit neuen Konzepten (Inhalten) *und* neuen Argumentationsformen (Logik) konfrontiert.

Essen und verdauen müssen Sie das Futter aber selbst! So ist es oft aus Zeitgründen nicht möglich, bei der Darstellung von Beweisen in der Vorlesung stets die kleinstmöglichen logischen Argumentationsschritte zu machen. Verdauen heißt dann, dass Sie die fehlenden Schritte *selbständig* nachträglich hinzufügen, bis Ihnen absolut klar ist, wie die präzise Darstellung des Beweises aussehen müsste. Dies hat mehrere Vorteile. Zum einen müssen Sie eigenständig argumentieren und Symbole benutzen, wobei Sie die mathematische Sprache und Schrift erlernen. Zweitens wiederholen Sie automatisch die Vorlesung sehr gründlich. Drittens bemerken Sie genau, ob und was Sie nicht verstehen und schließlich gewinnen Sie Sicherheit auf dem Level der präzisen Darstellung.

Die Weiterführung der Analogie zwischen Wissen und Futter zeigt uns, dass ein erfolgreiches Studium auch sehr viel Wissenshunger erfordert. Der Wissenshunger ist der Antrieb, der nötig ist, um die Energie und Zeit aufzuwenden, die für das Lernen nötig ist. Außerdem werden wissenshungrige Studierende einen Sachverhalt nicht mit dem Satz *Das ist halt so.* auf sich beruhen lassen, sondern mit der Frage *Warum ist das so?* nach Gründen und Ursachen suchen. Dabei wird das Fragenstellen in Vorlesungen und Übungen oder im Zimmer des Assistenten oder Dozenten *nicht* als Zeichen von Dummheit gewertet. Im Gegenteil. Es wird als Zeichen einer echten Bemühung verstanden, als Zeichen für echten Wissenshunger, als Zeichen für die richtige Geisteshaltung (siehe auch die Diskussion in [**5**]). Trauen Sie sich, mit Ihren Fragen an andere heranzutreten. Sie werden feststellen, dass es sich lohnt.

Möglicherweise ist Ihnen diese forschende Geisteshaltung neu, weil sie in der Schule nicht so notwendig war. Dort wurde Ihnen das Wissen in kleinen wohldosierten Mengen verabreicht. Es war stets klar, was gerade gelernt wurde und jedes Konzept wurde hinreichend lange eingeübt. Das ist an der Universität anders. Hier steht das selbständige Lernen im Vordergrund.

Das fängt damit an, dass Sie selbständig das für Sie passendste Lehrmaterial auswählen. Die Bibliothek enthält z.B. eine Vielzahl von Büchern zu den Anfängervorlesungen. In jedem Buch ist die Sprache und Erklärweise etwas anders. Wenn Sie eine Frage haben, schauen Sie einfach in *mehreren* Büchern mal nach, wie die Autoren den Sachverhalt erklären. Trifft ein Autor genau ihr Verständnisproblem und löst es für Sie befriedigend auf, dann ist das gefundene Buch vielleicht auch an anderen Stellen *Ihr* Buch. Also immer mal wieder stöbern. Als Startpunkt für ausführlich erklärende Autoren im Bereich Analysis können Sie bei [**2, 3**] reinschnuppern. In der linearen Algebra sind vielleicht [**1, 4**] für Sie interessant? Auf jeden Fall schauen Sie sich rasch an, wie der Bibliothekskatalog und die Aufstellsystematik funktioniert, damit der Büchersuche nichts im Wege steht. Natürlich wimmelt es auch im Internet von Vorlesungsskripten ganz unterschiedlicher Qualität. Auch hier lohnt es sich, mal nachzusehen.

Neben dem selbständigen Umgang mit Literatur, ist es sehr wichtig, dass Sie selbst überprüfen, was Sie bereits gut und was noch nicht so gut verstanden haben, um dann gezielt an den Problemstellen zu arbeiten. Sie müssen lernen, kritisch mit sich selbst zu sein, eigene Fragen formulieren zu Dingen, die Sie nicht richtig verstehen und dann gezielt nach Antworten auf diese Fragen suchen, durch Selbstdenken, in Büchern, oder bei Ihren Mitstudierenden oder Lehrern. Diese innere Einstellung ist eine wichtige Voraussetzung für ein erfolgreiches Studium und wird Sie letztendlich zu einem Forscher bzw. einer Forscherin machen.

KAPITEL 2

Umgang mit Vorlesungen – ein Beispiel

In diesem Kapitel soll eine typische Mathematikvorlesung vorgestellt werden und zwar einerseits durch das Manuskript des Dozenten und andererseits als Tafelbild. Dadurch wird deutlich, dass in der Vorlesung mehr Information übermittelt wird als das, was am Ende an der Tafel steht.

Wenn Sie sich, vielleicht weil Sie es so von der Schule gewohnt sind, als Ziel setzen, die Tafel in Schönschrift und möglichst noch mehrfarbig mit Unterstreichungen per Lineal zu kopieren, dann wird Ihnen einiges von dieser Information entgehen. Außerdem berauben Sie sich der Möglichkeit, bereits während der Vorlesung Verständnisfragen zu stellen, denn Fragen ergeben sich nur dann, wenn Sie aktiv mitdenken. Eine bessere Strategie ist daher, möglichst viel Information möglichst schnell zu notieren – natürlich so, dass Sie es anschließend noch entziffern können. Dadurch gewinnen Sie Zeit zum Mitdenken und Mitmachen. Schönschrift ist *nach* der Vorlesung angesagt, wenn Sie Ihre Notizen in Ruhe nochmal durchgehen und z.B. Lücken, die der Dozent gelassen hat, *selbst* füllen oder auch *eigene* Beispiele einarbeiten. Gerade wenn Sie versuchen, Argumentationen mit Ihren *eigenen* Worten zu formulieren und sich nicht sklavisch an die Vorgaben halten, stellen sich oft wichtige Verständnisfragen, deren Antwort Sie dann vielleicht in Büchern suchen oder mit denen Sie auf Kommilitonen, Übungsgruppenleiter, Assistenten oder Dozenten zugehen können, so lange bis Sie eine Antwort gefunden haben. Beispiele für eine solche Nachbereitung sind in Abschnitt 2.3 angegeben. Auch wenn Ihnen dieses Vorgehen als doppelter Aufwand erscheint - es lohnt sich.

Das Erkennen und Stopfen von kleinen Lücken in der Ausführung des Dozenten und das Formulieren von Fragen ist ein wichtiger Schritt zum selbständigen Mathematik machen und stiehlt Ihnen *nicht* die Zeit für die Übungsaufgaben sondern wird Ihnen bei den Übungsaufgaben helfen!

2.1. Manuskript: Intuitive Mengenlehre

Zum Handwerkzeug in den Grundvorlesungen Analysis und lineare Algebra gehören *Mengen* und *Mengenoperationen*. Tatsächlich bildet die Mengenlehre ist ihrer modernen Form das Fundament der Mathematik: alle mathematischen Aussagen werden letztlich mit Begriffen der Mengenlehre formuliert und alle derzeitigen mathematischen Ergebnisse durch logisches Schließen aus einem geeigneten Axiomensystem der Mengenlehre abgeleitet.

Da in den Grundvorlesungen möglichst rasch die Ergebnisse erarbeitet werden sollen, die in weiten Teilen der Mathematik und in den quantitativen Wissenschaften eine begriffliche Voraussetzung darstellen, beginnt die Mathematikausbildung allerdings nicht „ganz unten“ bei der Mengenlehre, sondern arbeitet ohne eine präzise Formulierung des Mengenbegriffs. Didaktisch gesehen ist dies ein Dilemma: gerade in den Grundvorlesungen wird großer Wert darauf gelegt, dass in der Mathematik alle Objekte eine präzise Bedeutung haben und dass Begriffe nicht intuitiv sondern genau nach ihrer Definition benutzt werden. Und dann beginnt die erste Vorlesung selbst mit der intuitiven Einführung des grundlegenden Begriffs „Menge“.... Da wir aber nur mit „harmlosen“ Mengen zu tun haben werden, führt dies trotz allem nicht zu Problemen. Wer will kann natürlich jederzeit ein Buch über die axiomatische Mengenlehre zur Hand nehmen.

Nun aber zum Mengenbegriff: Mengen formalisieren die sehr menschliche Angewohnheit, die Objekte unserer Umwelt nach gewissen Regeln zusammenzufassen. So fassen wir z.B. alle Bäume mit einer ganz bestimmten Blattform unter dem Oberbegriff „Eiche“ zusammen, oder die Worte *rot, gelb, grün, rotgelb* und *aus* unter dem Begriff „Ampelzustände“. Mathematisch schreiben wir solche Zusammenfassungen von Objekten mit geschwungenen Klammern und Kommata als Trennzeichen zwischen den Objekten, also etwa

$$\text{Freunde} = \{\text{Frank}, \text{Elke}, \text{Konrad}, \text{Birgit}\}.$$

Falls die Freunde gerne Tischtennis spielen, dann bilden die möglichen Paare für Einzelspiele wieder eine Menge, wobei hier die Objekte selbst Mengen sind (die zweielementigen Teilmengen von Freunde)

$$\begin{aligned} E = \{&\{\text{Frank}, \text{Elke}\}, \{\text{Frank}, \text{Konrad}\}, \{\text{Frank}, \text{Birgit}\}, \\ &\qquad \{\text{Elke}, \text{Konrad}\}, \{\text{Elke}, \text{Birgit}\}, \{\text{Konrad}, \text{Birgit}\}\}, \end{aligned}$$

und die Kombinationen für Doppelspiele ist eine Menge von Mengen die Mengen enthalten

$$D = \{\{\{\text{Frank}, \text{Elke}\}, \{\text{Konrad}, \text{Birgit}\}\},\\ \{\{\text{Frank}, \text{Konrad}\}, \{\text{Elke}, \text{Birgit}\}\},\\ \{\{\text{Frank}, \text{Birgit}\}, \{\text{Elke}, \text{Konrad}\}\}.$$

Natürlich spielen in der Mathematik besonders Mengen von Zahlen eine große Rolle. Da Zahlen im Überfluss vorhanden sind (z.B. gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine Nachfolgerzahl $n + 1$), kommen hier auch unendlich große Mengen vor, die man nicht mehr direkt hinschreiben kann. Statt dessen gibt man die Regel an, die klar macht, welche Objekte in der Zusammenfassung drin sein sollen und welche nicht. Bezeichnet $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so kann man die Menge G der geraden Zahlen folgendermaßen einführen

$$G = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}.$$

Dabei liest man die öffnende Klammer als „die Menge aller“ und den Doppelpunkt als „mit der Eigenschaft“. Die Volltext-Variante ist also: G ist die Menge aller Elemente n der Menge $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass n gleich 2 mal m ist für ein Element m der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Diese Mengenkonstruktion nennt man auch *Aussonderung*, weil Elemente der Menge, die links vom Doppelpunkt aufgeführt ist, durch die Regel ausgesondert werden, woraus dann die neue Menge entsteht.

Wenn in der Mathematik abkürzende Namen für eine bestimmte Situation eingeführt werden, so spricht man von einer *Definition*. Im vorliegenden Fall haben wir also die geraden Zahlen *definiert*. Wenn im weiteren der Begriff *gerade Zahl* benutzt wird, dann ist damit immer die präzise Bedeutung gemeint, die in der Definition aufgeschrieben ist. Ein beliebter Anfängerfehler ist, statt der präzisen Bedeutung der Definition, eine selbstgemachte Erklärung zu benutzen, die auch irgendwie zum Definitionsbegriff passen könnte. Also etwa: 1, 4 und 7 sind gerade Zahlen, weil die Zeichen aus geraden Linien bestehen; die Zahlen 2, 3, 5, 8 und 9 sind aus dem gleichen Grund ungerade. Natürlich klingt das an dieser Stelle lächerlich. Tatsächlich wird genau dieser Fehler *im Prinzip* in hunderten von Lösungsversuchen zu Übungsaufgaben Jahr für Jahr begangen. Anstatt die präzise Bedeutung der Definition zu benutzen, wozu man sicherheitshalber in einem Buch oder der Mitschrift nachschlägt, wird eine halb oder ganz selbsterdachte Bedeutung benutzt (eine autentische Aussage aus Studierendenmund: „Die Funktion $f(x) = 1/x$ mit der Definitionsmenge $x \in (0, 1)$ ist beschränkt, weil

x ja nur zwischen 0 und 1 liegen kann" ist leider falsch, da sich die Definition von *beschränkt* auf den *Wertebereich* und nicht den Definitionsbereich bezieht). Eine ordentlich aufgeschriebene Definition sieht so aus:

Definition 2.1. *Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt gerade, falls eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, mit der Eigenschaft $n = 2m$.*

Als weiteres Beispiel für eine Aussonderung kann man die Menge der geraden Zahlen größer als 9 so schreiben

$$\{n \in G \,:\, n > 9\}.$$

Nachdem wir nun einige Beispiele von Mengen gesehen haben wollen wir zu unserer intuitiven Definition von Mengen zurückkommen. Eine naheliegende Version wäre doch: *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.* Unpräzise ist diese Beschreibung alleine schon deshalb, weil der Begriff *Objekt* unklar ist. Damit die obigen Beispiele Sinn machen wäre es gut, wenn Zahlen, Wörter und auch Mengen selbst zu den Objekten zählen würden. Dazu kommen bald andere Konstrukte wie Funktionen, Folgen, Vektoren, Matrizen und allerlei Dinge, die aus diesen Zutaten zusammengebaut werden. Aber selbst wenn wir uns mit dem unpräzisen Begriff *Objekt* abfinden, hat die obige Definition einen Konstruktionsfehler, den der englische Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell im Jahr 1901 an folgendem Beispiel deutlich gemacht hat. Da Mengen selbst zu den Objekten zählen sollen (siehe Tischtennisgrüppchen), ist auch die Zusammenfassung aller Mengen eine Menge – denn Zusammenfassungen von Objekten sind ja Mengen. Nennen wir die Menge, die alle Mengen enthält $\mathcal{M}$. Dann enthält $\mathcal{M}$ sich selbst, weil $\mathcal{M}$ ja auch eine Menge ist, was etwas komisch erscheint aber auch nicht zu dramatisch wirkt. Wenn es nun aber Mengen gibt, die sich selbst als Element enthalten ($\mathcal{M}$ ist ein Beispiel), dann macht es auch Sinn, die Menge $\mathcal{A}$ aller Mengen zu betrachten, die sich *nicht* selbst als Element enthalten, also die Aussonderung

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M} : M \notin M\}.$$

Die spannende Frage von Bertrand Russell ist nun: Enthält $\mathcal{A}$ sich selbst als Element oder nicht? Nun ja, eine der beiden Möglichkeiten muss ja wohl zutreffen.

Zum Durchprobieren schauen wir uns erst die Möglichkeit an, dass $\mathcal{A}$ sich selbst enthält, also $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Dann erfüllt $M = \mathcal{A}$ nicht die Bedingung $M \notin M$ und folglich ist $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$. Da nicht gleichzeitig $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ und das Gegenteil richtig sein kann, scheidet diese Möglichkeit aus. Bleibt also die Variante, dass $\mathcal{A}$ sich *nicht* selbst enthält, also $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$. Dann erfüllt aber $M = \mathcal{A}$ die Bedingung $M \notin M$ und gehört deshalb zu $\mathcal{A}$. Wieder ein Widerspruch. Es macht also keine der beiden komplementären Möglichkeiten Sinn – das sprengt endgültig unsere Vorstellungskraft und zeigt, dass *beliebige* Zusammenfassungen von Objekten echte Schwierigkeiten erzeugen können, wenn die Regeln zur Zusammenfassung einen Selbstbezug beinhalten. Anschauliche Varianten des gleichen Konflikts sind z.B. der Frisör, der jedem die Haare schneidet, der sich nicht selbst die Haare schneidet. Schneidet dann der Frisör sich selbst die Haare? Oder der Katalog in einer Bibliothek, der alle Bücher auflistet, die sich nicht selbst auflisten. Führt dieser Katalog sich selbst auf?

Um diese Problematik zu vermeiden, ist es notwendig, den Begriff der Menge etwas vorsichtiger zu definieren, was dann schließlich zu den Axiomen der Mengenlehre führt. Die Grundidee ist dabei, genau festzulegen, wie aus gegebenen Mengen neue Mengen konstruiert werden können. Damit das Mengenspiel beginnen kann, muss dann nur noch die Existenz gewisser Menge angenommen werden und los geht's: aus der „Urmenge" lassen sich dann andere Mengen bauen und daraus wieder andere und so weiter. In unserem intuitiven Zugang werden wir uns auf die Regeln zur Konstruktion von neuen Mengen aus gegebenen Mengen beschränken. Dass es tatsächlich Mengen gibt, wie z.B. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, werden wir einfach axiomatisch fordern und damit den aufwändigeren aber möglichen Weg der Konstruktion ausgehend von den Mengenaxiomen stark abkürzen.

Eine Möglichkeit aus einer gegebenen Menge M eine neue Menge zu konstruieren haben wir schon im Zusammenhang mit den geraden Zahlen erwähnt – die Aussonderung. Wir benötigen dafür eine Regel $A(x)$, die für jedes Element $x \in M$ entweder wahr oder falsch ist. Durch

$$\{x \in M : A(x)\}$$

wird dann eine Menge erzeugt, die alle Elemente x von M enthält, für die $A(x)$ wahr ist.

Eine ganz besondere Menge, die man so konstruieren kann, ist die *leere Menge*, die mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet wird. Man erhält sie aus jeder beliebigen anderen Menge M durch Aussonderung mit der Bedingung $x \neq x$, d.h.

$$\emptyset = \{x \in M : x \neq x\}.$$

Obwohl das Nichts $\emptyset$ vielleicht nutzlos erscheint, kann man in der Mengenlehre viel damit machen. Zusammen mit der Möglichkeit aus zwei

Mengen M und N eine neue Menge $M \cup N$, die so genannte Vereinigungsmenge zu bilden, die alle Elemente aus M und alle Elemente aus N enthält, eröffnen sich ungeahnte Möglichkeiten: während $A_0 = \emptyset$ keine Elemente enthält hat die Menge $A_1 = A_0 \cup \{A_0\} = \{\emptyset\}$ ein Element, die Vereinigung $A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ zwei Elemente, $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$ drei Elemente usw. Letztlich lassen sich auf diese Weise die natürlichen Zahlen n aus dem Nichts erschaffen, wenn man sie mit den entsprechenden Mengen A_n identifiziert.

Neben der Vereinigung von zwei Mengen, ergibt auch der Durchschnitt $M \cap N$ und die Differenz $M \backslash N$ von zwei Mengen M, N wieder eine Menge. Das folgt bereits aus den obigen Möglichkeiten, wenn wir geschickt aussondern

$$\begin{aligned} M \cap N &= \{x \in M : x \in N\}, \\ M \backslash N &= \{x \in M : x \notin N\}. \end{aligned}$$

Nachdem wir nun einige Mechanismen zur Konstruktion von Mengen vorgestellt haben, können wir damit beginnen, erste Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu formulieren.

Welche Menge ergibt sich zum Beispiel bei der Vereinigung von $M \cap N$ und $M \backslash N$? Zur Veranschaulichung und damit zur Hypothesengenerierung ist es hilfreich, den Spezialfall von Punktmengen in der Ebene zu betrachten.

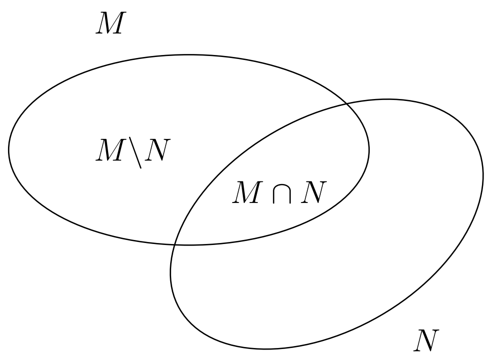


Abbildung 2.1: Veranschaulichung von Schnitt und Differenz zweier Punktmengen M und N in der Ebene.

Die Darstellung in Abbildung 2.1 suggeriert, dass der Zusammenhang

$$(M \cap N) \cup (M \backslash N) = M \tag{2.1}$$

gilt. Da die Darstellung aber nur einen von vielen möglichen anderen Fällen beschreibt (was ist, wenn M und N gar keinen Überlapp haben, oder M vollständig in N liegt etc.), ist die Skizze noch kein Beweis für die Gültigkeit von (2.1). Um (2.1) sauber überprüfen zu können, muss erst klar gestellt werden, dass zwei Mengen definitionsgemäß genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente haben. Der übliche Weg um eine Gleichheit von zwei Mengen A und B zu zeigen funktioniert so, dass man zunächst überprüft ob alle Elemente von A in B enthalten sind und dann umgekehrt ob auch alle Elemente von B in A liegen. Man zeigt also die beiden *Inklusionen* $A \subset B$ (lies: A ist Teilmenge von B) und $B \subset A$ (lies: B ist Teilmenge von A).

Setzen wir also $A = (M \cap N) \cup (M \backslash N)$ und $B = M$ und konzentrieren uns auf die erste Teilaufgabe, die Überprüfung von $A \subset B$. Dazu nehmen wir irgend ein Element $x \in A$ und zeigen, dass x auch in B enthalten ist. Um jetzt weiter zu machen, müssen wir uns ganz pingelig an die Definition der Mengenoperationen halten. Da A die Vereinigung von $M \cap N$ und $M \backslash N$ ist, enthält A nach Definition von $\cup$ alle Elemente von $M \cap N$ und alle Elemente von $M \backslash N$. Unser gewähltes x ist also in mindestens einer der beiden Mengen enthalten. Betrachten wir deshalb die beiden Möglichkeiten separat.

Im Fall 1 nehmen wir an $x \in M \cap N$. Dann gilt nach Definition von $\cap$, dass $x \in M$ und $x \in N$ erfüllt ist. Insbesondere sehen wir, dass x in $M = B$ liegt, womit der erste Fall erfolgreich erledigt ist.

Im Fall 2 gehen wir von $x \in M \backslash N$ aus. Nach Definition der Mengendifferenz sehen wir, dass dann $x \in M$ und $x \notin N$ erfüllt ist. Also wieder gilt $x \in M = B$.

Insgesamt führen beide möglichen Fälle auf $x \in B$ und damit ist die erste Teilaussage $A \subset B$ bewiesen. Für die zweite Teilaussage $B \subset A$ schnappen wir uns ein Element $x \in B = M$. Auch hier gibt es zwei Fälle für die Lage von x bezüglich N. Entweder gilt $x \in N$ oder das Gegenteil $x \notin N$. Im ersten Fall haben wir also $x \in M$ und $x \in N$, also nach Definition $x \in M \cap N$. Im zweiten Fall haben wir $x \in M$ und $x \notin N$ und damit nach Definition $x \in M \backslash N$. Da also x auf jeden Fall in einer der beiden Mengen $M \cap N$ oder $M \backslash N$ liegt, finden wir x auch in der Vereinigung der beiden Mengen also in A, womit auch die zweite Teilaussage $B \subset A$ erledigt ist. Wir haben die Gleichung (2.1) damit für alle möglichen Mengen nachgewiesen! ■

Ach ja, das kleine Quadrat markiert übrigens das Ende eines Beweises.

Weitere einfache Gesetzmäßigkeiten und Muster im Zusammenspiel von Mengenoperationen sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 2.2. *Für beliebige Mengen A, B und C gilt*

Idempotenz:	$A \cup A = A$ *und* $A \cap A = A$
Kommutativität:	$A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$
Assoziativität:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *und*
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivität:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und*
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Der Nachweis dieser Aussagen folgt, wie der Beweis von (2.1), immer dem gleichen Strickmuster: Es sind jeweils Mengengleichheiten zu beweisen, was ganz mechanisch mit dem Nachweis von zwei Inklusionen erledigt wird. Im Nachweis der Inklusionen müssen nur peinlich genau die Definitionen der Operationen benutzt werden. Dann kann eigentlich nichts schief gehen. Als Kostprobe betrachten wir die Idempotenz von $\cup$.

Mit den Abkürzungen $M = A \cup A$ und $N = A$ lautet die Aufgabe: zeige $M = N$, d.h. $M \subset N$ und $N \subset M$. Nehmen wir ein $x \in M = A \cup A$. Da $A \cup A$ aus allen Elementen von A und allen Elemente von A aufgebaut ist, liegt x somit in A, was $x \in N = A$ beweist. Für die umgekehrte Inklusion nehmen wir ein $x \in N = A$. Dann liegt x nach Definition von $\cup$ auch in $A \cup A = M$, woraus $N \subset M$ folgt.

Die restlichen Aussagen des Satzes sind ein sehr gutes Beweistraining, das Sie sich nicht entgehen lassen sollten. ∎

2.2. Tafelbild: Intuitive Mengenlehre

Der Inhalt des vorangegangenen Abschnitts kann in einer typischen Vorlesung von zweimal 45 Minuten, wie hier gezeigt, auf 6 Tafeln komprimiert werden. Optimal wäre, wenn Ihre Notizen mehr Information enthalten als das reine Tafelbild. Bei der Nachbereitung der Vorlesung, können Sie damit eine auf Ihre Bedürfnisse zugeschnittenen *eigene* Version der Vorlesung aufschreiben.

Intuitive Mengenlehre

(*) Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.

Beispiele: i) Angabe durch Aufzählung

Frank Elke Konrad Birgit

Freunde = $\{F, E, K, B\}$

Name der Menge

Mengen-klammer

Objekte

Komma als Trennzeichen

Tischtennispaarungen:

Objekte sind selbst Mengen

Einzel = $\{\{F,E\},\{F,K\},\{F,B\},\{E,K\},\{E,B\},\{K,B\}\}$

Doppel = $\{\{\{F,E\},\{K,B\}\}, \{\{F,K\},\{E,B\}\},$
$\{\{F,B\},\{E,K\}\}\}$

oder Mengen von Mengen ...

2) Angabe durch Aussonderung mit einer Regel

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots$

„Element von" Regel

$G = \{ n \in \mathbb{N} : n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N} \}$ gerade Zahlen

„die Menge aller" „mit der Eigenschaft"

gerade Zahlen größer als 9 : $\{ n \in G : n > 9 \}$

Probleme mit (*):

unpräzise: was sind Objekte?

widersprüchlich: Beispiel von Bertrand Russell (1901)

$\leadsto$ (*) ist keine mathematisch brauchbare Definition

korrekter Zugang: axiomatische Mengentheorie ...

Das Russellsche Beispiel:

Sei $\mathcal{M}$ die Zusammenfassung aller Mengen

beachte: Mengen können Objekte sein (siehe Beispiel)

wegen (*) ist $\mathcal{M}$ eine Menge

komisch: $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ ... aber wieso nicht ...

Betrachte Aussonderung:

$$\mathcal{A} = \{ M \in \mathcal{M} : M \notin M \}$$

Beispiel: $\mathcal{M} \notin \mathcal{A}$

Frage von Russell:

$$\mathcal{A} \notin \mathcal{A} \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} \in \mathcal{A} \ ?$$

$\Downarrow$ $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ erfüllt Regel $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$

$\Downarrow$ $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ erfüllt die Regel $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$ <u>nicht</u>, also $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$.

d.h. wenn $\mathcal{A}$ drin ist, ist $\mathcal{A}$ draußen und umgekehrt: logischer Widerspruch ↯

Problem: <u>beliebige</u> Zusammenfassungen sind gefährlich

Ausweg: Mengenkonstruktion nur nach eingeschränkten Regeln ausgehend von anderen Mengen M, N.
(Existenz mindestens einer Menge muss angenommen werden)

Aussonderung: $\{x \in M : A(x)\}$ ← Regel
enthält alle Elemente x von M, für die $A(x)$ wahr ist.

Vereinigung: $M \cup N$
enthält alle Elemente aus M und alle Elemente aus N

Durchschnitt: $M \cap N = \{x \in M : x \in N\}$

Differenz: $M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\}$

Konsequenzen: $\{x \in M : x \neq x\}$ enthält <u>kein</u> Element
sog. <u>leere Menge</u> $\emptyset$ bzw $\{\}$

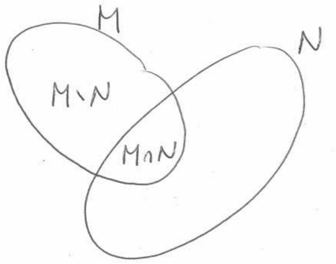
mit „Nichts" kann man viel machen:

$A_0 = \emptyset$, $A_1 = A_0 \cup \{A_0\}$, $A_2 = A_1 \cup \{A_1\}$, $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$, ...

$A_1 = \{\emptyset\}$, $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $A_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset$

0 Elemente, 1 Element, 2 Elemente, 3 Elemente ...

Gesetzmäßigkeiten



Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.
Nachweis durch zwei Inklusionen:

$A \subset B$
und
$B \subset A$

„ist Teilmenge von"
d.h. alle Elemente von B sind in A

Vermutung: $\underbrace{(M \cap N) \cup (M \setminus N)}_{A} = \underbrace{M}_{B}$

Teilaufgabe $A \subset B$:

Sei $x \in A = (M \cap N) \cup (M \setminus N)$ beliebig

Nach Def. von $\cup$ enthält A Elemente von $M \cap N$ und Elemente von $M \setminus N$

Fall 1: $x \in M \cap N$. Nach Def. von $\cap$ ist $x \in M$ und $x \in N$
also $x \in B = M$.

Fall 2: $x \in M \setminus N$. Nach Def von $\setminus$ ist $x \in M$ und $x \notin N$
also $x \in B = M$

in jedem Fall: $x \in B = M$ also $A \subset B$

Teilaufgabe $B \subset A$: Sei $x \in B = M$ beliebig.

Fall 1: $x \in N$. Dann $x \in M$ und $x \in N$ also $x \in M \cap N$

Fall 2: $x \notin N$. Dann $x \in M$ und $x \notin N$ also $x \in M \setminus N$

in jedem Fall ist $x \in (M \cap N) \cup (M \setminus N) = A$ also $B \subset A$

Beweisende $\square$

weitere Gesetzmäßigkeiten...

Satz: Für beliebige Mengen A, B, C gilt

Idempotenz: $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$

Kommutativität: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$

Assoziativität: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Beweis mit gleichem Strickmuster:

- Mengengleichheit durch zwei Inklusionen
- Inklusionsnachweis durch genaue Anwendung der Definitionen.

Kostprobe: $\underbrace{A \cup A}_{M} = \underbrace{A}_{N}$

$M \subset N$: Sei $x \in M = A \cup A$ d.h. $x \in A$ oder $x \in A$
denn $A \cup A$ besteht aus Elementen von A
und aus Elementen von A; d.h. $x \in A = N$.

$N \subset M$: Sei $x \in N = A$. Dann ist $x \in A \cup A = M$

Rest ist Hausarbeit $\rightarrow$ $(\square)$

2.3. Nachbereitung: Intuitive Mengenlehre

Nehmen wir die ideale Situation an, dass Sie in der Vorlesung versucht haben, immer am Ball zu bleiben und die Gedankengänge des Dozenten direkt nachzuvollziehen. Bei Verständnisproblemen haben Sie die Möglichkeit direkt nachzufragen genutzt, ohne Angst, dass Ihre Mitstudierenden oder der Dozent Sie wegen Ihrer Fragen für dumm hält, da Sie Abschnitt 1.4 genau gelesen haben.

Wegen Ihrer hohen Konzentration auf den gerade laufenden Gedankengang blieb Ihnen allerdings keine Zeit, den Tafeltext ordentlich zu kopieren. Sie mussten kritzeln, um genauso schnell schreiben zu können wie der Dozent und um zusätzliche Notizen zu machen. So war es Ihnen z.B. wichtig, die Antworten auf Ihre Fragen zu notieren oder auch die Fragen von anderen Studierenden mit den entsprechenden Antworten.

Jetzt, nachdem Sie etwas Abstand gewonnen haben und die direkte Erinnerung an die Vorlesung schon wieder verblasst ist, nehmen Sie Ihre Notizen zur Hand und wollen sie so in Ordnung bringen, dass Sie auch noch in einem Jahr wissen, worum es hier gegangen ist.

Sie entziffern also eine Notizpassage und überlegen, wie Sie den Tafeltext mit Ihren zusätzlichen Anmerkungen am besten organisieren.

Dabei gehen Sie sehr kritisch vor und verfolgen genau, ob das, was Sie da jetzt aufschreiben, auch 100% Sinn macht. Wenn nicht ist es ja gut möglich, dass Sie beim Abschreiben oder der Dozent beim Anschreiben einen Fehler gemacht hat. Im Zweifelsfall schauen Sie in einem Buch nach oder markieren sich zumindest die unklare Stelle und notieren sich eine Frage dazu, die Sie dann Ihren Kommilitonen oder den Übungsgruppenleitern bzw. Assistenten oder Dozenten stellen können.

Um zu überprüfen, ob Sie alles verstanden haben, oder ob irgendwo unentdeckte Unklarheiten schlummern, schreiben Sie Beweise nicht einfach von Ihren Notizen ab. Statt dessen überfliegen Sie (wenn überhaupt) nur kurz die Beweispassage, legen mit dem Ausspruch „Das kann ich auch!“ die Notizen zur Seite und versuchen dann den Beweis so sorgfältig und überzeugend wie möglich selbst zu formulieren. Wenn Sie stecken bleiben, haben Sie eine Unklarheit entdeckt, die Sie beim einfachen Abschreiben nicht bemerkt hätten. Aber auch wenn Sie scheinbar ohne Probleme durchkommen, lohnt es sich den eigenen Beweis mit den Notizen zu vergleichen. In jedem Fall liest sich der Vorlesungstext jetzt ganz anders, weil Sie ihn mit Ihren eigenen Gedanken vergleichen können. Unterschiede schauen Sie sich dann ganz automatisch genauer an – wieso wird das so gemacht? Geht meine Argumentation auch? Mache ich einen Denkfehler? Oder ist mein Beweis nicht eigentlich eleganter? Wenn Sie Ihre Beweisversion fertig haben, dann schreiben Sie sie sauber auf. Bei dieser intensiven Nacharbeitung der Beweise merken Sie auch, dass die überzeugende Stimme des Dozenten in der Vorlesung vieles klarer erscheinen lässt, als es beim eigenen Durchdenken ist.

Neben dem „Das kann ich auch!" Ansatz beim Durcharbeiten von Beweisen verfolgen Sie auch das Prinzip, Definitionen mit *eigenen* Beispielen zu beleben. Typischerweise wird in der Vorlesung zu jeder Definition ein Beispiel angegeben, aber aus Zeitgründen sind diese Passagen oft knapper als für ein volles Verständnis notwendig wäre. Deshalb denken Sie sich beim Nachbereiten einfach noch ein paar Beispiele aus, die Sie dann in Ihrer sauberen Mitschrift einbauen. Wenn Ihnen nichts einfällt ist das vielleicht schon ein Anzeichen für ein Verständnisproblem. Hier hilft das Nachschauen in verschiedenen Büchern oder im Internet. Meistens lassen sich aber Beispiele durch Abwandlung der Vorlesungsvorgaben gewinnen.

Nach dieser Beschreibung der idealen und sicherlich zeitintensiven Nachbereitung haben Sie bemerkt, dass es sicherlich keine reine Schönschreibübung ist. Es geht vielmehr um eine Überprüfung, ob Sie den Stoff voll verstanden haben. Durch das eigenständige nochmalige Beweisen und die Beispielsuche beschäftigen Sie sich intensiv mit dem Vorlesungsthema. *An dieser Stelle findet der eigentliche Lernprozess statt!* Deshalb unterschätzen Sie diesen Schritt nicht und berauben Sie sich nicht des Zwangs ihn durchführen zu müssen, indem Sie schon in der Vorlesung alles „sauber" aufschreiben. Lassen Sie Ihr Gekritzel eine Mahnung sein, alles nochmal wie oben beschrieben durchzugehen.

Um den Nachbereitungsprozess an unserem Beispiel deutlicher werden zu lassen, sollen hier einige Anregungen gegeben werden, wie das Tafelbild durch eigene Aspekte angereichert werden könnte.

Zunächst wäre es sinnvoll, wenn aus dem vorderen Manuskriptteil die ein oder andere Notiz in die Aufzeichnungen eingeflossen wäre, auch wenn Sie nicht explizit an der Tafel erschienen ist. So ist sicherlich die Bemerkung, dass die Mengentheorie die Grundlage der modernen Mathematik bildet, eine wichtige Information, die den Stellenwert des Themas verdeutlicht. Auch die Stichwörter *axiomatische Mengentheorie* und *Bertrand Russell* sollten auftauchen und vielleicht Anlass geben einmal in Wikipedia oder in einem Mathematiklexikon wie [**8**] nachzuschlagen und ein wenig zu schmökern. Schließlich hat es die halbe Seite über den Begriff der Definition aus irgendeinem Grund nicht auf die

Tafel geschafft, vielleicht weil es dem Dozenten zwischendurch eingefallen ist und er nichts dazu in seinen Notizen hatte. Auch hier wäre Mitschreiben natürlich sehr wichtig gewesen.

Bei den geraden Zahlen G als Beispiel für das Aussonderungsprinzip liegt es nahe, zu überlegen, wie denn wohl die Menge U der ungeraden Zahlen notiert werden könnte. Weitere Beispiele für Mengen, die per Aussonderung formuliert werden, sind nicht schwer zu finden, etwa

- die Menge aller Quadratzahlen
- die Lösungsmenge der Gleichung $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
- die Koordinatenpaare aller Punkte die innerhalb des Einheitskreises liegen

An der Stelle der Vorlesung, wo durch eine Skizze die Vermutung (2.1) aufgestellt wurde, kann man die Idee der Darstellung aufgreifen und auch die anderen Mengenoperationen durch Punktmengen in der Ebene darstellen.

Außerdem kann man sich im Zusammenhang mit der Mengengleichheit die elementare Frage stellen, welche der folgenden Mengen identisch sind

$$\{1, 3, 4\}, \quad \{4, 3, 1, 4\}, \quad \{3, 1, 4\}, \quad \{3, 4, 1, 3\}, \quad \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

Schließlich soll die Bemerkung, den Beweis des Satzes zu komplettieren nicht nur als rhetorisches Geplänkel betrachtet werden, sondern als echte Aufforderung, die gleiche Beweisidee in den verschiedenen Fällen zu wiederholen, damit Ihre endgültige Vorlesungsmitschrift auch an dieser Stelle vollständig ist.

2.4. Übungsaufgaben

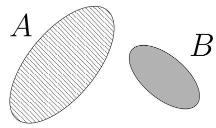
Aufgabe 2.1. Formulieren Sie folgende Mengen mit dem Aussonderungsprinzip.

a) Die ungeraden Zahlen,
b) die Quadratzahlen,
c) die Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$,
d) die Koordinatenpaare aller Punkte die innerhalb des Einheitskreises liegen.

Aufgabe 2.2. Beschreiben Sie den Inhalt der folgenden Mengen umgangssprachlich:

$$M_m = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{n}{m} \notin \mathbb{N} \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2.3. Beziehungen zwischen Mengen veranschaulicht man oft mit Teilmengen der Zeichenebene (selbst wenn die Mengen andere Objekte enthalten also z.B. Zahlen, Folgen, Vektoren, etc.). Typische Teilmengen A, B einer Menge M veranschaulicht man also so:



wobei man den Teil, der zur Menge gehört, durch Färbung bzw. Schraffierung hervorhebt. Natürlich können Teilmengen der Zeichenebene im Prinzip auch schrumpelig, spitz, dürr und unzusammenhängend sein – überlegen Sie immer, ob die von Ihnen gewählte Mengenform im betrachteten Zusammenhang allgemein genug ist.
Die relative Lage von zwei Mengen umfasst fünf Möglichkeiten: die Gleichheit, die echte Teilmengensituation (A echte Teilmenge von B oder umgekehrt) und die beiden Fälle, wo die Mengen teilweise bzw. gar nicht überlappen.

Zeichnen Sie die fünf Grundfälle sowie für jeden Fall die folgenden Mengen:

(1) Die Schnittmenge $A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
(2) Die Vereinigungsmenge $A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\}$.
(3) Die Differenzmenge $A \backslash B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
(4) Die symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
(5) Das Komplement $A^c := M \backslash A$

Veranschaulichen Sie folgende Aussage $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ indem Sie die Mengenoperationen links vom Gleichheitszeichen und getrennt davon die Mengenoperationen rechts veranschaulichen. Erhalten Sie das gleiche Bild. Wie ist es mit $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$?

Aufgabe 2.4. Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$$\{1, 3, 4\}, \quad \{4, 3, 1, 4\}, \quad \{3, 1, 4\}, \quad \{3, 4, 1, 3\}, \quad \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

Aufgabe 2.5. Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C

Idempotenz :	$A \cup A = A$ und $A \cap A = A$
Kommutativität:	$A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$
Assoziativität:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivität:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe 2.6. Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $A + B$ die Menge aller reellen Zahlen r, die als Summe $r = a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ dargestellt werden können, also

$$A + B := \{r \in \mathbb{R} : r = a + b \text{ für ein } a \in A \text{ und ein } b \in B\}.$$

Basteln Sie eine nach oben unbeschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(A + A) \cap A = \emptyset$. (Bem: nach oben unbeschränkt heißt, dass die Menge Zahlen enthält, die jede noch so große vorgegebene Zahl übersteigen).

Aufgabe 2.7. Geben Sie zu jeder Menge jeweils einige Elemente an, die darin enthalten sind und auch einige Elemente, die nicht darin enthalten sind. Wenn möglich, geben Sie einfachere Darstellungen der Mengen an.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 1| = |x - 3|\} \cup \{w \in \mathbb{R} \,|\, w^2 - w + 10 > 16\}$
b) $\{M \in \mathbb{R} \,|\, M \text{ ist obere Schranke von } [0, 1]\}$
c) $\{q \in \mathbb{Q} \,|\, \sqrt{2} + q \in \mathbb{Q}\}$
d) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
e) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 + 1/2 + \cdots + 1/n < 2\}$

Zur Erläuterung von (b): M ist eine obere Schranke einer Menge A, wenn $a \leq M$ für alle Elemente a von A gilt.

KAPITEL 3

Beweisvarianten

In Kapitel 1 wurde darauf hingewiesen, dass Mathematik ein wichtiges Werkzeug zum Formulieren und Verstehen von Gesetzmäßigkeiten unserer Umwelt ist. Dabei nennen wir solche Zusammenhänge *Gesetzmäßigkeiten*, die uneingeschränkt gültig sind.

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Formel

$$n^2 + n + 41. \tag{3.1}$$

Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ liefert (3.1) die Zahlen 41,43,47,53,61. Sehen Sie eine Gemeinsamkeit? Es sind alles Primzahlen, also natürliche Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar sind. Wir haben hier ein Muster, eine Gesetzmäßigkeit (der mathematischen Umwelt) vor uns, oder? Wenn wir weiter probieren mit $n = 5, 6, 7$ finden wir 71, 83, 97 ... nur Primzahlen. Mit $n = 8, 9, 10$ klappt's auch: 113, 131, 151. Tatsächlich können wir bis $n = 39$ weiterprobieren und werden *immer* Primzahlen finden.

Doch die erdrückende Tatsachenlage, die den einen oder die andere schon davon überzeugt haben mag, dass (3.1) wirklich immer Primzahlen liefert, bricht bei $n = 40$ in sich zusammen. Die Zahl

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41$$

ist offensichtlich keine Primzahl, da sie durch 41 ohne Rest teilbar ist. Was zunächst wie ein universeller Zusammenhang aussah, ist doch keiner.

Wir können somit zwei wichtige Dinge an diesem Beispiel lernen: zunächst macht es deutlich, dass eine große Zahl von positiven Beispielen *keine* Aussage über die generelle Richtigkeit einer Behauptung macht. Umgekehrt genügt *ein einziges* Beispiel zum Beweis, dass eine behauptete Gesetzmäßigkeit *falsch* ist.

Diese Tatsache sollten Sie im Hinterkopf behalten, da sie an vielen Stellen in der Mathematik benutzt wird, um Aussagen zu widerlegen und damit Begriffe und Konzepte voneinander abzugrenzen (z.B. dass stetige Funktionen nicht automatisch differenzierbar sind, oder dass die Ableitungen differenzierbarer Funktionen nicht unbedingt stetig sein müssen). Die Konstruktion eines Gegenbeispiels kann dabei unter Umständen sehr aufwendig sein.

Merke: Der Nachweis, dass eine Aussage falsch ist, kann durch ein Gegenbeispiel geführt werden.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns verschiedene Möglichkeiten ansehen, wie man zeigen kann, dass Aussagen generell gültig sind. Gleichzeitig werden wir weitere grundlegende Begriffe der Mengenlehre einführen.

3.1. Direkter Beweis

Den direkten Beweis haben wir bereits in Kapitel 2 kennen gelernt. In gewisser Weise ist dies die klarste Beweisstrategie, da man ausgehend von den gegebenen Voraussetzungen durch eine Folge von logischen Schlüssen die Wahrheit der aufgestellten Behauptung nachweist.

Sehen wir uns ein einfaches Beispiel an.

Satz 3.1. *Sei n eine gerade Zahl. Dann ist auch n^2 gerade.*

Beweis: Wir starten mit der Annahme, dass n eine gerade Zahl ist. Ein Rückgriff auf die Definition 2.1 zeigt uns, dass n dann in der Form $n = 2m$ geschrieben werden kann, wobei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. Bilden wir das Quadrat und benutzen Kommutativitäts- und Assoziativitätsgesetze, so erhalten wir

$$n^2 = n \cdot n = (2m) \cdot (2m) = 2(2m^2) = 2k \qquad \text{mit } k = 2m^2.$$

Nutzen wir nun die Tatsache, dass Produkte natürlicher Zahlen wieder natürliche Zahlen sind, so sehen wir, dass $k \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich hat n^2 die Darstellung $n^2 = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und die Definition der geraden Zahlen 2.1 zeigt uns, dass n^2 gerade ist ■

Entscheidend für die Vollständigkeit des Beweises ist, dass bei jeder Schlussfolgerung eine Begründung angegeben wird. Im obigen Beweis wird zweimal als Begründung auf die Definition 2.1 verwiesen. Die Begründung, warum $n^2 = n \cdot n$ ist, wurde dagegen unterschlagen. Das ist Ihnen wohl gar nicht aufgefallen, da Ihnen dieser Zusammenhang sehr geläufig ist. Streng genommen handelt es sich dabei aber auch um eine Definition, die die Bedeutung der Symbolgruppe n^2 klärt. Scheuen Sie sich gerade am Anfang nicht, auch an den Stellen nach

Begründungen zu fragen, die Ihnen offensichtlich erscheinen. *Offensichtlichkeit* ist nämlich keine mathematische Kategorie. Es ist eher ein Zeichen dafür, dass eine oder mehrere Begründungen unterschlagen werden. *Das ist doch klar* zu sagen, zählt nicht. Statt dessen gelten als Begründung nur die Angabe von *Definitionen* oder mathematischen *Sätzen*, d.h. von bereits bewiesenen Sachverhalten. Auf diese Möglichkeit wurde auch mehrmals im Beweis zurückgegriffen. So wurde etwa angegeben, dass das Produkt zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist. Wahrscheinlich werden Sie diesen Satz in naher Zukunft entweder in der Vorlesung oder auf einem Übungsblatt wiedertreffen. Außerdem wurden die Rechenregeln *Kommutativitätsgesetz* und *Assoziativitätsgesetz* angesprochen. Je nachdem, wie die Zahlen in Ihrer Analysis Vorlesung eingeführt werden, sind diese Regeln entweder Sätze, die bewiesen werden, oder es sind *Axiome*, d.h. Aussagen deren Wahrheit postuliert wird, die also wie ein nicht weiter begründetes Gesetz gelten. Die Stärke der Mathematik liegt übrigens darin, dass mit einer sehr kleinen Zahl von Axiomen ein riesiges Gebäude aus relevanten Sätzen errichtet werden kann.

Merke: Korrekte Begründungen verweisen entweder auf Definitionen, auf Axiome, oder auf bereits bewiesene mathematische Sätze.

Bevor wir uns ein weiteres Beispiel für einen direkten Beweis anschauen, sollen zunächst die Schnitt- und Vereinigungsoperationen von Mengen etwas erweitert werden. Während wir bisher nur paarweise Schnitte und Vereinigungen eingeführt haben, zeigt die in Satz 2.2 formulierte Assoziativität und Kommutativität der beiden Operationen, dass man, ohne auf Reihenfolgen zu achten, auch mehr als zwei Mengen schneiden oder vereinigen kann. Dazu führt man eine allgemeinere Notation ein. Ist z.B. $\mathcal{M}$ eine Menge, die Mengen enthält (ein so genanntes Mengensystem), so ist $\cup\mathcal{M}$ eine Menge, die jedes Element enthält, das in mindestens einer Menge aus $\mathcal{M}$ enthalten ist. Entsprechend ist $\cap\mathcal{M}$ eine Menge, die nur Elemente enthält, die in allen Mengen aus $\mathcal{M}$ enthalten sind. Werden die Mengen $M_i \in \mathcal{M}$ durch Indizes i aus einer Menge I eindeutig gekennzeichnet, so wird der gleiche Sachverhalt oft auch so notiert

$$\cup\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} M_i, \qquad \cap\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} M_i.$$

Als Beispiel betrachten wir die Intervalle

$$M_n = [0, n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

wobei die eckigen Klammern [bzw.] bedeuten, dass der jeweilige Randpunkt zum Intervall dazugehört, während runde Klammern (und) andeuten, dass die Randpunkte keine Intervallelemente sind, also

$$M_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die Indexmenge ist hier die Menge der natürlichen Zahlen. Die Vereinigung und den Schnitt der ersten drei Mengen kann man mit

$$\bigcup_{n \in \{1,2,3\}} M_n, \qquad \bigcap_{n \in \{1,2,3\}} M_n$$

bezeichnen, wobei hier nochmal eine andere Notation üblich wäre, nämlich

$$\bigcup_{n=1}^{3} M_n, \qquad \bigcap_{n=1}^{3} M_n$$

Die Vereinigung aller Mengen würde man entsprechend mit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \qquad \text{oder} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

bezeichnen. Haben Sie eine Idee, wie diese Vereinigung aussieht? Wenn man sich den Vereinigungsprozess veranschaulicht, kommt man bestimmt auf folgende Vermutung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

aber ist diese Vermutung richtig? Versuchen wir Sie zu beweisen!

Zunächst stellen wir fest, dass eine Mengengleichheit $M = N$ zu zeigen ist, wobei im vorliegenden Fall etwa M die Vereinigungsmenge und N die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen ist. Nach Definition der Mengengleichheit und der Teilmengenbeziehung, führt dies auf die Aufgabe, die beiden Teilaussagen $M \subset N$ und $N \subset M$ nachzuweisen.

Nach Definition der Vereinigungsmenge ist jedes Element x aus M in mindestens einem M_n enthalten. Da M_n eine Teilmenge von N ist, erkennen wir, dass x ebenfalls in N liegt. Folglich ist $M \subset N$ nach Definition der Teilmengenbeziehung.

Für die andere Inklusion nehmen wir an, x sei irgend ein Element von N, d.h. $x \geq 0$. Nehmen wir nun eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, die größer als x ist, so gilt $x \in M_n$ nach Definition der M_n. Folglich ist x in mindestens einer Menge M_n enthalten und damit nach Definition der Vereinigungsmenge auch in M. Dies bedeutet $N \subset M$. ■

Finden Sie die Argumentation stichhaltig? Ist sie auch, allerdings haben wir stillschweigend einen Zusammenhang zwischen natürlichen und reellen Zahlen benutzt, der streng genommen auch erst noch nachgewiesen werden muss, nämlich die Tatsache, dass es zu jeder reellen Zahl r eine größere natürliche Zahl n gibt. Ohne einen Verweis auf diesen mathematischen Satz ist der obige Beweis für pingelige Zeitgenossen daher unordentlich.

3.2. Kontrapositionsbeweis

Zum Verständnis dieser Beweismethode ist es sinnvoll, sich zunächst mit Implikationen und deren Umkehrungen zu beschäftigen. Betrachten wir dazu die wahre Aussage

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

Stimmt auch die umgekehrte Implikation? D.h. ist auch

Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.

eine wahre Aussage? Vielleicht würde Dr. Watson hier nach zu kurzem Nachdenken zustimmen, aber Sherlock Holmes würde seine Ablehnung direkt mit einem Gegenbeispiel belegen: Die Straße könnte auch nass sein, ohne dass es regnet, etwa wegen einer Straßenreinigung oder eines Wasserrohrbruchs. Die einfache Umkehrung einer wahren Aussage ist im Allgemeinen also falsch.

Das Gegenbeispiel von Holmes zeigt übrigens auch, dass die Implikation der Negierungen

Wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nicht nass.

im Allgemeinen falsch ist. Die letzte Möglichkeit ist die umgekehrte Implikation der verneinten Aussagen, d.h.

Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.

Diese so genannte *Kontraposition* der Ausgangsaussage ist tatsächlich korrekt, wenn die Ausgangsaussage wahr ist. Ein weiteres Beispiel für eine Aussagen und ihre Kontrapositionen ist

Wenn wir durch einen Tunnel fahren, wird es dunkel.
Wenn es nicht dunkel wird, fahren wir nicht durch einen Tunnel

Wenn Sie hier meinen, die Kontraposition sei falsch, da wir durch einen Tunnel fahren können, ohne dass es dunkel wird, da z.B. die Innenbeleuchtung eingeschaltet ist, dann ist dies nicht unberechtigt. Allerdings kritisieren Sie damit in gleicher Weise die Ausgangsaussage. Die wäre bei eingeschalteter Beleuchtung ja auch falsch. Wir stellen also fest, dass der Wahrheitsgehalt einer Aussage mit dem Wahrheitsgehalt ihrer Kontraposition übereinstimmt. Hier noch ein Beispiel, dass sich auf natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bezieht.

Wenn n eine Primzahl ist, dann ist n nicht durch 4 teilbar.
Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n keine Primzahl.

Da die Wahrheitswerte der beiden Aussagen identisch sind, ist es legitim, statt der eigentlichen Aussage ihre Kontraposition zu beweisen (den präzisen Nachweis dieser Identität werden wir in Kapitel 5 führen). Ein direkter Beweis der Kontraposition wird Kontrapositionsbeweis genannt. Als Beispiel betrachten wir den

Satz 3.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n^2 gerade, dann ist auch n gerade.*

Beweis: Formulieren wir zunächst die Kontraposition: Ist n nicht gerade, dann ist n^2 nicht gerade. Zusammen mit der Tatsache, dass eine natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist, kann man die Kontraposition auch so formulieren: Ist n ungerade, dann ist n^2 ungerade. Diese Aussage lässt sich direkt beweisen. Eine ungerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ können wir in der Form $n = 2m - 1$ schreiben für ein $m \in \mathbb{N}$. Bilden wir das Quadrat, so folgt mit den üblichen Rechenregeln

$$n^2 = (2m-1)\cdot(2m-1) = 4m^2-4m+1 = 2(2m(m-1)+1)-1 = 2k-1,$$

wobei $k = 2m(m-1) + 1$ eine natürliche Zahl ist, folgt mit der Darstellung der ungeraden Zahlen, dass n^2 ungerade ist. Damit ist die Kontraposition bewiesen, woraus auch die Wahrheit der ursprünglichen Aussage folgt. ■

Als angehende mathematische Ordnungshüter ist Ihnen aufgefallen, dass diesem Beweis die Definition der ungeraden Zahlen

$$U = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m - 1 \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}\}$$

voraus gehen müsste, sowie der Beweis, dass $U = \mathbb{N}\backslash G$ gilt. Uns interessiert im Moment aber mehr die Art der Beweisführung.

Was wäre passiert, wenn wir einen direkten Beweis versucht hätten? Dann wären wir mit der Aussage gestartet, dass n^2 gerade ist. Mit der Definition hätten wir dann $n^2 = 2p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ schreiben können. Jetzt müssten wir auf die Form von n schließen. Vielleicht würden wir dazu die Wurzel ziehen und $n = \sqrt{2p}$ schreiben. Aber was nun? Wir wissen noch zusätzlich, dass $n = \sqrt{2p}$ eine natürliche Zahl ist, woraus folgt, dass p nicht ganz beliebig sein kann. Aber welche Struktur p genau hat ist auch wieder nicht klar... Wir scheinen uns in einem Gestrüpp zu verfangen, der direkte Beweis erscheint unelegant.

An solchen Punkten ist die Kunst, nicht aufzuhören, sondern entweder weiter ins Gestrüpp vorzudringen, oder die Perspektive zu wechseln. Zum Wechsel der Perspektive gehört z.B., die zu beweisende Aussage umzuformen. Eine Möglichkeit ist dabei, die Kontraposition zu formulieren und zu überprüfen, ob diese leichter zu beweisen ist.

Merke: Der Beweis einer Implikation kann durch einen direkten Beweis der Kontraposition geführt werden.

3.3. Widerspruchsbeweis

Auch bei dieser Beweismethode sind einige Vorbemerkungen notwendig. Zunächst wollen wir den Begriff der mathematischen *Aussage* präzisieren.

Eine Aussage steht im engeren Sinne für einen Sachverhalt, der entweder *wahr* oder *falsch* ist. Dabei geht es nicht darum, ob wir den Wahrheitsgehalt tatsächlich kennen, sondern nur darum, dass prinzipiell genau einer der beiden Wahrheitswerte angenommen wird. So sind $5 < \ln(148)$, oder auch *die Wurzel einer ungeraden Zahl ist irrational* mathematische Aussagen, selbst wenn Sie nicht wissen, ob sie wahr sind.

Wenn aber eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, dann gilt das gleiche für die Negation bzw. Verneinung der Aussage und auch wenn wir den Wahrheitswert der Aussage nicht kennen, so wissen wir doch, dass die Negation genau den umgekehrten Wahrheitswert hat.

Merke: Ist eine Aussage wahr, so ist die negierte Aussage falsch und umgekehrt.

Diese Beobachtung ermöglicht uns, die Wahrheit einer Aussage nachzuweisen, indem wir zeigen, dass die negierte Aussage falsch ist. Aber wie zeigt man, dass eine Aussage *falsch* ist?

Die Grundüberlegung ist, dass aus einer wahren Aussage durch korrekte logische Schlussfolgerungen keine falsche Aussage abgeleitet werden kann. Umgekehrt formuliert liefert dies folgende Regel.

Merke: Wenn aus einer Aussage durch korrektes logisches Schließen eine falsche Aussage folgt, dann ist die Ausgangsaussage falsch.

Kombiniert man die beiden Merkregeln, so ergibt sich der Widerspruchsbeweis. Dazu startet man mit der Annahme, dass die behauptete Aussage *falsch ist*, bzw. dass die negierte Aussage wahr ist. Durch korrektes Schließen versucht man dann auf einen Widerspruch, d.h. auf eine falsche Aussage zu kommen. Dann muss aber die negierte Behauptung als Ausgangsannahme falsch sein, was wiederum besagt, dass die Behauptung selbst wahr ist.

Als leicht überschaubares Beispiel betrachten wir

Satz 3.3. *Sei M eine Menge. Dann gilt $\emptyset \subset M$.*

Beweis: Nehmen wir an, die Aussage sei falsch, d.h. $\emptyset \not\subset M$. Laut Definition der Teilmengenbeziehung ist dann nicht richtig, dass alle Elemente von $\emptyset$ in M enthalten sind. Es muss also mindestens ein Element $x \in \emptyset$ existieren, das nicht in M liegt. Dies ist aber eine falsche Aussage, da die leere Menge kein Element enthält. ■

Wenn wir versuchen würden, diese Aussage direkt zu beweisen, müssten wir laut Definition überprüfen, dass alle Elemente aus $\emptyset$ auch in M enthalten sind. Das erscheint schwierig durchführbar, da ja in $\emptyset$ überhaupt keine Elemente liegen. Im obigen Widerspruchsbeweis umgeht man diese Blockade elegant. Wie man auch in einem direkten Beweis weiterkommt, werden wir in Kapitel 5 sehen, wo eine präzise Definition des Implikationspfeils $\Rightarrow$ angegeben wird.

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Aussage, die wie (2.1) durch Abbildung 2.1 suggeriert wird und zwar, dass für beliebige Mengen M und N gilt

$$(M \cap N) \cap (M \backslash N) = \emptyset.$$

Auch hier bietet sich ein Widerspruchsbeweis an. Nehmen wir an, die Aussage sei nicht richtig, es gelte also $(M \cap N) \cap (M \backslash N) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein Element $x \in (M \cap N) \cap (M \backslash N)$. Dieses Element muss dann in $M \cap N$ und in $M \backslash N$ liegen. Wieder nach Definition des Schnitts und der Mengendifferenz heißt das, dass $x \in N$ und $x \notin N$ gelten muss. Da dies nicht sein kann, haben wir einen logischen Widerspruch gefunden. ■

Unser letztes Beispiel für einen Widerspruchsbeweis ist klassisch. Die entsprechende Aussage beweist zusammen mit dem Satz von Pythagoras, dass die Diagonale im Einheitsquadrat keine rationale Länge hat.

Satz 3.4. *Es gibt keine positive rationale Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.*

Beweis: Nehmen wir an, dass Gegenteil der Aussage sei wahr, d.h. es gibt eine rationale Zahl $x > 0$, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst. Rationalität von x bedeutet, dass es zwei teilerfremde natürliche Zahlen p, q gibt, so dass $x = p/q$. Zusammen mit $x^2 = 2$ liefert dies $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist gerade. Nun können wir Satz 3.2 anwenden und folgern, dass dann auch p gerade ist, also $p = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in $p^2 = 2q^2$ ergibt dies $q^2 = 2k^2$ womit auch q eine gerade Zahl ist. Damit haben p und q die 2 als gemeinsamen Teiler. Dies ist aber ein Widerspruch, da p und q teilerfremd sind. ■

In den beiden vorangegangenen Beweisen hatte die negierte Aussage den Vorteil, dass von der Existenz eines Elements mit konkreten Eigenschaften ausgegangen werden konnte. Dies zeigt ein typisches Einsatzgebiet des Widerspruchsbeweises. Wenn die Aussage die Existenz von bestimmten Dingen verneint, dann ist die negierte Aussage einer direkten Beweisführung meist besser zugänglich, da man hier von der Existenz ausgehen darf und damit etwas zum Argumentieren in der Hand hat.

3.4. Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Beweise und Beweistechniken

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(1) $a < b \Rightarrow a \leq b$
(2) $a < b$ und $b > c$ und $c < d \;\Rightarrow\; a < d$

Zeigen Sie sowohl mit direktem Beweis als auch mit einem Kontrapositionsbeweis, dass für alle reelle Zahlen $a, b > 0$

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b.$$

Aufgabe 3.2. Retten Sie die Mathematik durch Sorgfalt

Hans Wurst stellt folgende Behauptung auf: *Die Mathematik ist widersprüchlich.* Überprüfen Sie den Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x-2 \geq y-1$. Dann gilt $x - y \geq 1$ und damit auch $(x - y)^2 \geq 1$. Setzt man speziell $x = 3$, so ergibt sich $(3 - y)^2 \geq 1$ bzw. $(y - 3)^2 \geq 1$, woraus $y - 3 \geq 1$ folgt. Also ist in diesem Fall $y \geq 4$.
Andererseits folgt aus $x - 2 \geq y - 1$ und $x = 3$ auch $y \leq 2$ - ein unauflösbarer Widerspruch. ■

Aufgabe 3.3. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x^2 = \alpha$ höchstens eine reelle Lösung $x \geq 0$ hat. Gibt es eine solche Lösung im Fall $\alpha < 0$?

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem Begriff der Halbgruppe, den wir zunächst in einer Definition einführen.

Definition 3.5. *Eine Halbgruppe ist ein Paar $(H, *)$ bestehend aus einer Menge $H \neq \emptyset$ und einer assoziativen, zweistelligen (binären) Verknüpfung $*$, die je zwei Elementen $a, b \in H$ ein eindeutig bestimmtes Element zuordnet, das $a * b$ genannt wird. Assoziativität bedeutet, dass für beliebige $a, b, c \in H$ stets gilt*

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Aufgabe 3.4. Überlegen Sie sich einige Beispiele für Halbgruppen und beweisen Sie Ihre Vermutung über die Halbgruppeneigenschaft der folgenden Beispiele:

(1) die natürlichen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{N}, +)$,
(2) die ganzen Zahlen mit der Subtraktion $(\mathbb{Z}, -)$,
(3) die Zusammenfassung $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen einer Menge M zusammen mit der Schnittmengenbildung $(\mathcal{P}(M), \cap)$,
(4) die natürlichen Zahlen mit der Potenzierung $a\pi b = a^b$, also $(\mathbb{N}, \pi)$,
(5) die Zusammenfassung $\mathbb{R}^2$ aller Paare (x, y) reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ zusammen mit der Verknüpfung

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya),$$

also $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Viele Halbgruppen wie z.B. $(\mathbb{Z}, +)$ oder $(\mathbb{Z}, \cdot)$ zeichnen sich dadurch aus, dass sie ein Element e enthalten, das sich bei Verknüpfung mit einem anderen Element $a \in H$ neutral verhält, d.h. dass den Wert von a nicht ändert. Im Fall $(\mathbb{Z}, +)$ ist etwa 0 ein neutrales Element und in $(\mathbb{Z}, \cdot)$ lässt 1 die Partnerzahl im Produkt unverändert.

Definition 3.6. *Ein Element $e \in H$ einer Halbgruppe $(H, *)$ heißt neutrales Element, falls für alle $a \in H$ gilt*

$$a * e = a = e * a.$$

Aufgabe 3.5. Neutrale Elemente in Halbgruppen

(1) Zeigen Sie, dass es in einer Halbgruppe höchstens ein neutrales Element geben kann.

(2) Welche Halbgruppen aus Aufgabe 3.4 besitzen ein neutrales Element?

Die letzte Aufgabe in diesem Zyklus behandelt invertierbare Elemente in einer Halbgruppe. Eine Halbgruppe mit neutralem Element, in der jedes Element invertierbar ist, wird auch *Gruppe* genannt.

Definition 3.7. *Sei* $(H, *)$ *eine Halbgruppe mit einem neutralen Element* $e \in H$*. Ein Element* $a \in H$ *heißt invertierbar, falls ein* $\bar{a} \in H$ *existiert, so dass*

$$a * \bar{a} = e = \bar{a} * a.$$

Das Element $\bar{a}$ *wird inverses Element zu* a *genannt.*

Aufgabe 3.6. Inverse Elemente in Halbgruppen

(1) Zeigen Sie, dass in einer Halbgruppe mit neutralem Element zu jedem Element höchstens ein inverses Element existiert.
(2) Zeigen Sie, dass es in jeder Halbgruppe mit neutralem Element mindestens ein invertierbares Element gibt.
(3) Welche Halbgruppe aus Aufgabe 3.4 ist eine Gruppe?
(4) Geben Sie eine Halbgruppe an, in der nur ein invertierbares Element existiert.

Aufgabe 3.7. Sei M eine Menge mit $A \subset M$ und $A_i \subset M$ for all $i \in I$. Bestimmen Sie

$$\bigcup_{i\in I} A, \qquad \bigcap_{i\in I} A, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [1, n]$$

und beweisen Sie mit $A_i^c = M \backslash A_i$ die sogenannten deMorganschen Gesetze

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

KAPITEL 4

Funktionen, Rekursionen und Induktionsbeweise

Bevor wir die etwas speziellere Beweismethode der vollständigen Induktion vorstellen, wollen wir die in Kapitel 2 begonnene und in Abschnitt 3.1 weitergeführte Vorstellung von Mengenkonstruktionsmechanismen mit zwei weiteren Möglichkeiten abschließen: dem *kartesischen Mengenprodukt* und der *Potenzmenge*.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist dabei die Zusammenfassung aller Teilmengen der Menge M. Am Beispiel $M = \{1,2\}$ wäre dies

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Um das kartesische Produkt zweier Mengen M und N zu erklären, müssen wir zunächst den Begriff des geordneten Paares (m,n) von Elementen $m \in M$ und $n \in N$ einführen. Dabei sind zwei geordnete Paare (m,n) und (u,v) genau dann gleich, wenn $m = u$ und $n = v$ gilt. Die Zusammenfassung aller geordneten Paare (m,n) mit beliebigem $m \in M$ und beliebigem $n \in N$ ist wieder eine Menge, die als kartesisches Produkt $M \times N$ bezeichnet wird. Beachten Sie, dass $(1,2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(2,1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zwei *unterschiedliche* Paare sind. Im Gegensatz zu den beiden Mengen $\{1,2\}$ und $\{2,1\}$ die identisch sind, kommt es bei Paaren auf die Reihenfolge der Auflistung an.

Prinzipiell kann man statt Paaren auch Tripel (u,v,w), Quadrupel (u,v,w,x), etc. betrachten und die Zusammenfassung jeweils als kartesisches Produkt mehrerer Mengen einführen. So ist etwa $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge der Zahlentripel (x,y,z) mit beliebigen $x,y,z \in \mathbb{R}$, oder $\mathbb{R}^4 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge der Zahlenquadrupel usw. (Das Symbol $:=$ bedeutet, dass alles was auf der Seite mit dem Doppelpunkt steht durch das, was auf der Seite ohne Doppelpunkt steht, definiert wird.)

Allgemein sind die Elemente des kartesischen Produkts $A_1 \times \cdots \times A_n$ von n Mengen $A_1, \ldots, A_n$ so genannte n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in A_i$. An dieser Stelle ist es angebracht, vor *Pünktchen* in mathematischen Definitionen zu warnen. Pünktchen wie $\cdots$ oder $\ldots$ stehen normalerweise für *und so weiter in entsprechendem Sinn*. Meistens ist der Sinn dabei wirklich nur durch mutwilliges Schrägdenken nicht zu erkennen, aber streng genommen ist eine Pünktchendefinition nicht eindeutig. Wie man beliebige kartesische Produkte präzise und ohne Pünktchen definieren kann, wird weiter unten erwähnt.

Sind M und N zwei reelle Intervalle und fasst man die Zahlenpaare (m, n) als xy-Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem auf, so erhält man eine rechteckige Punktmenge, wenn man alle Punkte $(m, n) \in M \times N$ einfärbt.

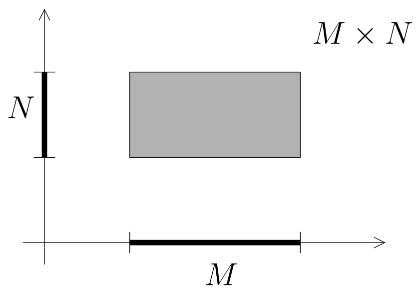


Abbildung 4.1: Veranschaulichung des kartesischen Produkts von zwei reellen Intervallen als Punktkoordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem.

4.1. Funktionen

Das kartesische Mengenprodukt spielt eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik, da es erlaubt, *Kausalitäten* zu modellieren. Laut Wikipedia bezeichnet Kausalität

> [...] die Beziehung zwischen Ursache und Wirkung, also die Einheit beider Ereignisse/Zustände zusammen.

Denken wir an ein physikalisches Experiment, wo das betrachtete System (z.B. ein Gas in einem Kolben) durch das Einstellen einer Größe u in einer gewissen Menge $U \subset \mathbb{R}$ von Werten beeinflusst werden kann (z.B. könnte u die Temperatur des Gases darstellen). Das System reagiert kausal durch Änderung einer weiteren Größe w (z.B. des Drucks), die an einem geeigneten Instrument abgelesen werden kann und deren mögliche Werte in der Menge $W \subset \mathbb{R}$ liegen. Eine strenge Kausalität besteht nun darin, dass, wenn immer eine bestimmte Ursache $u \in U$ eingestellt wird, stets eine zugeordnete Wirkung $w \in W$ eintritt.

Die Ursache-Wirkung Beziehung ist also mathematisch gesehen eine Teilmenge aller möglichen Wertepaare in $U \times W$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass in den ersten Komponenten der Paare alle Elemente von U vorkommen und keine unterschiedlichen Paare existieren, die in der ersten Komponente identisch sind. Solche Teilmengen wollen wir *Graphen* nennen.

Definition 4.1. *Seien U, W Mengen und $G \subset U \times W$. Die Menge G ist ein Graph in $U \times W$, wenn für jedes $u \in U$ genau ein $w \in W$ existiert, so dass $(u, w) \in G$ gilt.*

Ein Tripel $F = (U, V, G)$, bestehend aus zwei Mengen U und V und einem Graphen G in $U \times V$ heißt Funktion von U nach V. Das $u \in U$ eindeutig zugeordnete Element wird auch mit $F(u)$ bezeichnet. Die Menge U heißt auch Definitionsmenge oder Definitionsbereich von F, die Menge W wird Zielmenge von F genannt und G heißt auch Graph von F. Die Funktion F selbst wird statt als Tripel oft auch so notiert:

$$\begin{array}{rccc} F: & U & \longrightarrow & W \\ & u & \mapsto & F(u) \end{array}$$

Eine Funktion ist durch ihren Graphen und ihre Zielmenge eindeutig bestimmt. Stimmen zwei Funktionen in ihren Graphen überein, so sagt man auch, sie seien im Wesentlichen gleich.

Die Ihnen aus der Schule wohlbekannten Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

entpuppen sich also damit als spezielle Tripel $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$ von Mengen, wobei G jeweils eine Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Visualisiert man diese Teilmenge wie in Abbildung 4.1 in einem kartesischen Koordinatensystem, so sieht man übrigens den Funktionsgraphen. Das ist der Grund, warum wir auch für viel allgemeinere Fälle die Menge aus Paaren $(x, F(x))$ als Graph von F bezeichnet haben.

Welche Kosequenzen in Definition 4.1 stecken, soll mit einer Frage veranschaulicht werden: Sind folgende Funktionen F und H *gleich*?

$$\begin{array}{rccc} F: & (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 - \frac{1}{x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} H: & (0,10) & \longrightarrow & (0,1) \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array}$$

Zunächst sehen wir, dass fast alle entscheidenden Bestandteile unterschiedlich aussehen. Auf den zweiten Blick stellen wir aber fest, dass

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Die sogenannte Funktionsvorschrift ist also identisch. Außerdem ist für $x > 0$ der Bruch $1/(x+1)$ zwischen 0 und 1, so dass $1 - 1/(x+1)$ tatsächlich nur Werte im offenen Intervall $(0, 1)$ annimmt. Die Zielmenge der Funktion H ist damit also nur präziser gefasst, als die von F. Tja, sind die Funktionen jetzt gleich oder nicht?

Um hier Klarheit zu schaffen, müssen wir nur überprüfen, was Gleichheit von Funktionen eigentlich bedeutet. Die einzige Quelle, die hier weiterhelfen kann ist Definition 4.1, denn hier ist der Begriff Funktion eingeführt worden und zwar sind Funktionen Tripel von Mengen. Die Gleichheit von Funktionen wandelt sich also in die Frage nach der Gleichheit von Tripeln um. Ein Blick zurück zeigt uns, das Paare, Tripel, Quadrupel usw. genau dann gleich sind, wenn alle Komponenten gleich sind. Damit wird die Frage weitergeleitet und es sind jetzt mehrere Mengen auf Gleichheit zu überprüfen. Wieder nach Definition sehen wir, dass in allen Fällen geklärt werden muss, ob die zu überprüfenden Mengen die gleichen Elemente beinhalten. Das ist nun endlich eine Formulierung, mit der wir handeln können. Nennen wir die Graphen G_F und G_H

$$\begin{aligned} G_F &= \{(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : y = x/(1 + x)\}, \\ G_H &= \{(x, y) \in (0, 10) \times \mathbb{R} : y = x/(1 + x)\} \end{aligned}$$

so sehen wir schnell, dass G_F das Element $(100, 100/101)$ enthält, welches in G_H nicht enthalten ist, also $F \neq H$. Anders zusammengefasst bedeutet dies

Merke: Zwei Funktionen sind gleich, wenn die Definitionsmenge, die Zielmenge und die Funktionsvorschrift übereinstimmen.

Zum Abschluss dieses Ausflugs in den Bereich der Funktionen sollen noch einige übliche Schreibweisen eingeführt werden. So bezeichnet man die Menge aller Funktionen von U nach W mit dem Symbol W^U oder auch mit $\mathcal{F}(U, W)$. Einer Funktion $F \in \mathcal{F}(U, W)$ sind in natürlicher Weise zwei weitere Funktionen auf den Potenzmengen zugeordnet. Die erste wird dabei oft mit dem selben Funktionssymbol F bezeichnet. Sie ordnet jeder Teilmenge von $A \subset U$ die Menge aller Bilder $F(a)$ zu, die zu den Elementen $a \in A$ gehören, d.h.

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{P}(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}(W) \\ & A & \mapsto & F(A) = \{y \in W : y = F(a) \text{ für ein } a \in A\}. \end{array}$$

Die Tatsache, dass hier das gleiche Funktionssymbol benutzt wird, birgt natürlich eine Verwechslungsgefahr in sich und ist etwas unsauber. Allerdings zeigt uns das Argument von F an, welche Version gemeint ist.

Der Grund für die Doppelnutzung ist die sehr intuitive Form: $F(a)$ ist das Bild *eines* Elementes $a \in U$ und $F(A)$ sind die Bilder *aller* Elemente $a \in A$.

Die zweite F zugeordnete Funktion ist die *Urbildabbildung* F^{-1}

$$\begin{array}{rrcl} F^{-1}: & \mathcal{P}(W) & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) \\ & B & \mapsto & F^{-1}(B) = \{u \in U : F(u) \in B\}. \end{array}$$

In Worten besteht $F^{-1}(B)$ aus den Elementen, die nach B abgebildet werden. Auch hier wird leider ein Symbol doppelt genutzt, denn F^{-1} bezeichnet ebenfalls die *inverse Funktion* zu F, falls diese existiert. Die inverse Funktion ordnet jedem Element w aus W das eindeutige Element aus $u \in U$ zu, das auf w abgebildet wird, d.h. für das $F(u) = w$ gilt. Offensichtlich kann die inverse Abbildung nur existieren, wenn F jedes Element aus W in seinem *Wertebereich* $F(U)$ hat und falls nicht zwei verschiedene Elemente in U auf das gleiche Element in W abgebildet werden. Die erste Eigenschaft nennt man *Surjektivität*, die zweite *Injektivität*. Sind beide erfüllt, dann spricht man von *Bijektivität* der Funktion F und nur in diesem Fall hat F^{-1} die zweite Bedeutung einer Funktion von W nach U. Die Bedeutung als Urbildabbildung, ist dagegen für jede Funktion F sinnvoll.

Zur Klärung der noch ausstehenden pünktchenfreien Definition des allgemeinen kartesischen Produkts können wir nun den Begriff der Funktion benutzten. Sei zunächst I eine nichtleere (Index-)Menge und für jedes $i \in I$ existiere eine Menge A_i. Dann können wir Funktionen als pünktchenfreien Ersatz der Tupel benutzen und zwar

$$\begin{array}{rrcl} x: & I & \longrightarrow & \bigcup_{i \in I} \{i\} \times A_i \\ & i & \mapsto & x(i) \end{array}$$

die die zusätzliche Eigenschaft $x(i) = (i, y)$ für jedes $i \in I$ erfüllen. Die Zusammenfassung aller dieser Funktionen ist dann wieder eine Menge, die als kartesisches Produkt $\Pi_{i \in I} A_i$ bezeichnet wird.

Die Funktionswerte $x(i)$ werden in diesem Fall auch oft mit x_i bezeichnet und die Funktionen mit $(x_i)_{i \in I}$. Ist I die Menge I_n der n ersten natürlichen Zahlen, dann hat x die Funktionswerte $\{(1, x_1), \dots, (n, x_n)\}$, woraus sich das n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ aufbauen lässt. Umgekehrt kann man aus einem Tupel wie (a, b, c) mit $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$ ein Element x des kartesischen Produkts $A \times B \times C$ konstruieren, indem man die benötigten ersten Komponenten der Paare aus den Positionen im Tupel ermittelt, d.h. $x = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

Auf den Begriff der *Matrix* stößt man nun ganz automatisch, wenn man als Indexmenge das kartesische Produkt $K = I_m \times I_n$ wählt und, zum Beispiel $A_k = \mathbb{R}$ für jeden Index $k \in K$. Die Funktionswerte $x(k)$ zu Elementen $k = (i,j) \in K$ werden dann auch kurz mit x_{ij} bezeichnet und übersichtlich in einem rechteckigen Tableau, einer sogenannten Matrix, angeordnet. Der Wert x_{ij} wird in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte angeordnet. Als Beispiel betrachten wir $m = 2$ und $n = 3$, d.h. $K = \{1,2\} \times \{1,2,3\}$ und die Funktion

$$x = \{((1,1),2),((1,2),3),((1,3),4),((2,1),3),((2,2),4),((2,3),5)\}$$

deren Darstellung kompakt mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

erfolgen kann. Das kartesische Produkt $\Pi_{k \in I_m \times I_n} \mathbb{R}$ wird auch kurz mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ notiert.

4.2. Rekursion und Induktion

Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir die Menge $I_n = \{1, \ldots, n\}$ der n ersten natürlichen Zahlen eingeführt. Für eine pünktchenfreie Definition dieser Mengen benötigen wir das Prinzip der *Rekursion.* Wir starten mit der Menge $I_1 = \{1\}$ und geben dann noch an, wie man aus der n-ten Menge I_n die nächste Menge I_{n+1} konstruiert, nämlich

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}. \tag{4.1}$$

Statt mit Pünktchen beschreiben wir die Struktur der Menge I_n also durch einen präzisen Konstruktions*algorithmus.* Wenn wir jetzt fragen, wie z.B. die Menge I_4 aussieht, so sagt uns die mehrfache Anwendung der Regel (4.1)

$$I_4 = I_3 \cup \{4\} = I_2 \cup \{3,4\} = I_1 \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$$

wobei im letzten Schritt die explizite Form von I_1 benutzt wurde. Entsprechend kann man mit $I_0 = \emptyset$ anfangen und von dort aus die Regel (4.1) benutzen. Dann sind die Mengen I_n sogar für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert.

Wenn wir irgendwelche Aussagen über die Mengen I_n beweisen wollen, brauchen wir aufgrund der rekursiven Definition fast immer die Beweismethode der *vollständigen Induktion.* Hier ist ein Beispiel, bei dem es um die Anzahl der Elemente von I_n geht. Im weiteren kürzen wir die Anzahl der Elemente einer Menge A mit $|A|$ ab.

Satz 4.2. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat I_n genau $|I_n| = n$ Elemente.*

Beweis: Zunächst weisen wir im sogenannten *Induktionsanfang* nach, dass die Aussage $|I_n| = n$ für das erste n richtig ist. Das ist hier nicht schwer, denn $I_0 = \emptyset$ hat keine Elemente, d.h. $|I_0| = 0$. Damit ist der Anfang gemacht und nun folgt die Aussage für alle weiteren n im sogenannten *Induktionsschritt*. Wir beweisen dazu, dass wenn $|I_n| = n$ richtig ist, auch $|I_{n+1}| = n + 1$ stimmt. In einem direkten Beweis nehmen wir dazu an, dass $|I_n| = n$ wahr ist und benutzen nun die Rekursionsvorschrift (4.1), nach der $I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\}$ gilt. Da $n + 1$ nicht in I_n enthalten ist, hat I_{n+1} also ein Element mehr als I_n, d.h. $|I_{n+1}| = |I_n| + 1 = n + 1$, woraus die Behauptung folgt. Damit endet der Induktionsbeweis, denn mit den beiden Zutaten Induktionsanfang und Induktionsschritt ist tatsächlich die Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. Nehmen wir als Beispiel die Aussage $|I_4| = 4$. Mit dem Induktionsschritt ist dies korrekt, falls $|I_3| = 3$ stimmt und das ist wieder mit dem Induktionsschritt richtig wenn $|I_2| = 2$ stimmt und das ist wahr, falls $|I_1| = 1$ wahr ist und wieder mit dem Induktionsschritt ist dies korrekt wenn $|I_0| = 0$ ist, was nach Induktionsanfang stimmt. Sie sehen, dass für die Aussage $|I_{100}| = 100$ insgesamt 101 Begründungen fällig sind: 100 mal wird der Induktionsschritt und einmal der Induktionsanfang bemüht und das funktioniert genauso für jede der Aussagen $|I_n| = n$. ■

Falls Sie nicht bemerkt haben, dass der Beweis an einer Stelle wegen einer fehlenden Begründung unordentlich war, können Sie ihn ja noch einmal kritisch lesen. Tatsächlich wurde behauptet, dass $n + 1$ nicht in I_n enthalten ist. Das scheint zwar klar zu sein, wenn wir an die Pünktchendefinition denken, aber gilt das auch für unsere rekursive Definition? Das muss natürlich nachgewiesen werden und da es eine Aussage über eine rekursiv definierte Struktur ist, läuft dies wieder auf einen Induktionsbeweis heraus. Wir formulieren diese Aussage zur Abwechslung einmal als ein sogenanntes *Lemma*. Ein Lemma ist, wie ein Satz, eine wahre Aussage, deren Stellenwert in der Theorie aber meist untergeordnet ist und eher den Rang einer Hilfsaussage hat. Mathematisch gesehen besteht aber kein Unterschied zwischen Sätzen und Lemmata.

Lemma 4.3. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, dass $m \notin I_n$.*

Beweis: Der Induktionsanfang ist wieder leicht, da $I_0 = \emptyset$ überhaupt kein Element enthält. Für den direkten Beweis des Induktionsschritts nehmen wir an, dass $m \notin I_n$ für $m > n$. Ist $m > n + 1$, dann gilt insbesondere $m > n$ und folglich $m \notin I_n$ und $m \notin \{n+1\}$. Also ist nach Definition der Vereinigung $m \notin I_n \cup \{n+1\} = I_{n+1}$ womit der Induktionsschritt bewiesen ist. ■

Heimlich wurden auch hier wieder Begründungen unterschlagen und zwar im Zusammenhang mit der $>$ Beziehung. Wenn Sie streng durch den Beweis gehen und bei jeder Argumentation *Warum?* fragen, dann wird es Ihnen auffallen (achten Sie auf Überredungsversuche wie *insbesondere*). Diese Lücken können Sie aber im Verlauf der Vorlesung noch stopfen, wenn erst einmal das Zeichen $>$ präzise eingeführt ist.

Wenn Ihnen die bisherigen Aussagen zu den Mengen I_n allzu langweilig vorkommen, dann wird Sie vielleicht mehr interessieren, dass die Potenzmenge von I_n insgesamt 2^n Elemente hat. Wenn Sie jetzt erst einmal nachfragen, wie denn 2^n überhaupt definiert ist, dann haben Sie bereits eine sehr kritische Haltung eingenommen – gut! Die häufig anzutreffende Version

$$2^n = \underbrace{2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n \text{ mal}}$$

werden Sie natürlich weiter im Kopf behalten, aber der Vollständigkeit halber über die präzisen Definition nachdenken. Das geht hier wieder rekursiv und zwar definiert man für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1, \qquad a^{n+1} = a^n a \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 4.4. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $|\mathcal{P}(I_n)| = 2^n$.*

Beweis: Der Induktionsanfang ist wieder einfach. Wegen $I_0 = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(I_0) = \{\emptyset\}$ und damit $|\mathcal{P}(I_0)| = 1 = 2^0$. Der Induktionsschritt ist hier die Aussage: wenn $|\mathcal{P}(I_n)| = 2^n$, dann $|\mathcal{P}(I_{n+1})| = 2^{n+1}$, die wir wieder direkt beweisen. Sei dazu für ein $n \in \mathbb{N}$ die Annahme $|\mathcal{P}(I_n)| = 2^n$ erfüllt. Nehmen wir nun eine beliebige Teilmenge A von I_{n+1}, dann können zwei Fälle $n+1 \notin A$ und $n+1 \in A$ auftreten. Im ersten Fall ist $A \in \mathcal{P}(I_n)$ und damit eine von 2^n möglichen Mengen. Im zweiten Fall ist A von der Form $A = B \cup \{n+1\}$ mit $n+1 \notin B$, d.h. $B \in \mathcal{P}(I_n)$. Auch hier gibt es wieder 2^n viele verschiedene Möglichkeiten für B. Nehmen wir beide Fälle zusammen, so zählen wir $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$ unterschiedliche Möglichkeiten. Wegen der Definition von 2^{n+1} folgt die Behauptung. ■

Eine große Zahl von Induktionsbeweisen treten in der Analysis im Zusammenhang mit dem Summensymbol auf. Beginnen wir zunächst wieder mit der Pünktchendefinition. Sind n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben, so bezeichnet man die Summe dieser Zahlen mit dem Symbol

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Entsprechend kann durch $\sum_{i=4}^{7} a_i$ die Summation über einen zusammenhängenden Abschnitt $a_4, \ldots, a_7$ der Zahlen beschrieben werden.

Eine pünktchenfreie Definition des Summensymbols kann wieder rekursiv erfolgen. Zum Start legen wir fest, dass

$$\sum_{i=k}^{m} a_i = 0, \qquad m < k \tag{4.2}$$

d.h. die Summe ergibt stets 0, wenn die obere Indexgrenze kleiner als die untere ist. Für den Fall $m \geq k$ setzen wir dann rekursiv

$$\sum_{i=k}^{m} a_i = a_m + \sum_{i=k}^{m-1} a_i. \tag{4.3}$$

Wenn wir nun die Formel $S_n = n(n+1)/2$ für die Summe der n ersten natürlichen Zahlen beweisen sollen, dann können wir statt des Pünktchenbeweises

$$2S_n = (1+\cdots+n)+(n+\cdots+1) = \underbrace{(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ mal}} = n(n+1)$$

die folgende präzisere Variante angeben.

Satz 4.5. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.*

Beweis: Wegen der rekursiven Definition des Summensymbols liegt wieder die Benutzung eines Induktionsbeweises nahe. Der Induktionsanfang mit $n = 0$ führt dabei wegen (4.2) auf $\sum_{i=1}^{0} i = 0$. Andererseits ist $0(0+1) = 0$, so dass die Behauptung gezeigt ist. Für den direkten Beweis des Induktionsschritts nehmen wir an, dass $\sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2$ wahr ist. Dann gilt wegen (4.3)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=1}^{n} i = n+1+\frac{n(n+1)}{2} \\ = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

womit auch der Induktionsschritt bewiesen ist. ∎

Genauso viel Spaß wie mit dem Summensymbol kann man auch mit dem Produktsymbol haben. Die rekursive Definition des Produkts von reellen Zahlen a_i funktioniert analog zur Summe. Der Start ist hier

$$\prod_{i=k}^{m} a_i = 1, \qquad m < k$$

d.h. das Produkt ergibt stets 1, wenn die obere Indexgrenze kleiner als die untere ist. Für den Fall $m \geq k$ setzen wir rekursiv

$$\prod_{i=k}^{m} a_i = a_m \cdot \prod_{i=k}^{m-1} a_i.$$

4.3. Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Beweisen Sie: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Aufgabe 4.2. Geben Sie die Potenzmenge von $\{1, 2, 3\}$ an.

Aufgabe 4.3. Zu Formeln immer Beispiele anschauen

Konkretisieren Sie die abstrakten Formeln durch sinnvolle Wahl verschiedener $m \in \mathbb{N}$, z.B.

$$\sum_{k=2}^{m} 1 \quad \text{mit } m = 4 \quad \text{ergibt} \quad \sum_{k=2}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Mit $m = 1$ ergibt sich $\sum_{k=2}^{1} 1 = 0$.

(1) $\sum_{k=3}^{m} \frac{1}{k}$
(2) $\prod_{k=5}^{m} \frac{k+1}{k}$
(3) $M_m = \{n \in \mathbb{N} | m + n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 4.4. Mechanisches Arbeiten - ein Experiment

Die Findung mathematischer Konzepte und ihre Anwendung zur Beantwortung praxisrelevanter Fragen verlangt Kreativität. Das formale Arbeiten mit gegebenen Konzepten (Definitionen, Sätzen) ist dagegen zum großen Teil ein mechanischer Vorgang.

Wenn eine definierte Eigenschaft nachzuweisen ist, so muss *genau* die Bedingung der Definition *sorgfältig* nachgeprüft werden, wie bei einer Checkliste! Wenn ein Objekt eine definierte Eigenschaft hat, dann dürfen genau die Zusammenhänge *benutzt* werden, die in der Definition angegeben sind - wie bei einer Gebrauchsanleitung!

Um Ihnen dieses typische Vorgehen zu verdeutlichen betrachten wir die (sinnlose) Theorie der **dummbrumm** und der **brummdumm** Zahlen. Wegen der Sinnlosigkeit können Sie sich ausschließlich auf das mechanische Vorgehen konzentrieren, ohne irgendwelche Inhalte verstehen zu müssen. Die Namen der Eigenschaften sind bewusst verwirrend gewählt, um Sie zu zwingen, jeweils genau in den Definitionen nachzusehen, wenn Sie ein Konzept benutzen bzw. nachweisen wollen. Die Aufgaben sind inhaltlich einfach – die Schwierigkeit liegt im konsequenten logischen Vorgehen.

Das Vorgehen, das mit dieser Aufgabe trainiert werden soll, ist *typisch* und *wesentlich* in der Mathematik!

Wenn Sie Schwierigkeiten bei der Bearbeitung haben, versuchen Sie deshalb auf jeden Fall herauszufinden (und zu notieren), worin diese Schwierigkeiten genau bestehen.

Definition 1: Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **dummbrumm**, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x-3)/4 = m$. Die Zahl heißt **brummdumm**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.

b) Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **schnickschnack**, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle x, die brummdumm sind. Die Funktion heißt **schnackschnick**, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle x, die dummbrumm sind.

c) Zeigen Sie mit (a), dass f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.

d) Benutzen Sie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ um zu zeigen, dass die Umkehrung von Satz (c) nicht richtig ist.

Definition 3: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heißt **pingpong**, wenn für jede schnackschnick Funktion f das Bild $T(f)$ auch schnackschnick ist. Die Funktion T heißt **pongping**, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

e) Unteruchen Sie, ob die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $T(f) = 2f + 1$ pingpong oder pongping ist.

f) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung (Verkettung) von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.

Aufgabe 4.5. Veranschaulichen Sie sich folgende rekursive Mengendefinition durch Angabe einiger Elemente von R_2, R_3 und R_4

$$R_1 = \mathbb{R}, \qquad R_{n+1} = \mathbb{R} \times R_n.$$

Aufgabe 4.6. Wie zeigt man für alle $a, b > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$a^n < b^n \Rightarrow a < b.$$

Aufgabe 4.7. Das Summensymbol

1) Seien $m < 0$ und $n > 0$ ganze Zahlen und seien $a_m, \dots, a_n$ positiv. Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$:
(Tipp: schreiben Sie die Summenausdrücke zum besseren Verständnis in der $+\cdots+$ Form, also z.B. $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$)

$$\sum_{\phi=m}^{n} a_\phi, \quad \sum_{j=m+1}^{n+1} a_{j+1}, \quad \sum_{t=n}^{m} a_t, \quad \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k},$$

$$\sum_{r=m}^{n} \left[\left(\sum_{s=m}^{r} a_s \right) - \left(\sum_{t=m}^{r-1} a_t \right) \right], \quad \sum_{\beta=n}^{m} a_{n-\beta+m},$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-m} a_{m+\lambda}, \quad \sum_{\mu=-n}^{-m} a_{-\mu}, \quad \sum_{k=m}^{n} a_i, \quad \sum_{i=m}^{0} a_i + \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

2) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit *einem* Summensymbol:

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=2}^{n+1} b_j + \sum_{i=0}^{n-1} c_i,$$

$$a_{n+1} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{m=0}^{n} b_m.$$

3) Beim Umgang mit *Doppelsummen* ist es hilfreich, die von den Indizes durchlaufenen Werte in einem Diagramm zu veranschaulichen. Markieren Sie dazu für die folgenden drei Doppelsummen jeweils die Paare $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, die in der Summation auftreten, als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem. Welche der Summenausdrücke sind gleich?

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

4) Oft ist es nützlich, den Indexbereich bei der Summation durch eine Menge anzugeben. Sind a_i Zahlen, die mit einem Index $i \in I$ indiziert

sind und ist $A \subset I$, so bezeichnet $\sum_{i \in A} a_i$ die Summe aller a_i, deren Index i in A enthalten ist. Definitionsgemäß gilt $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$.

Stellen Sie die Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ in der Form $\sum_{k \in A} a_k$ dar. Wie muss die Menge A definiert sein, damit beide Fälle $n < m$ und $n \geq m$ korrekt wiedergegeben werden?

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $B_j = \{k \in \mathbb{N} | k < j$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ so dass $k = 2n\}$ und für beliebige $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m = \{n \in \mathbb{N} | m - n > 0\}$. Was ist $\sum_{m \in B_5} \sum_{i \in A_m} a_i$.

Unter welchen Bedingungen an A und B gilt $\sum_{i \in A} a_i + \sum_{j \in B} a_j = \sum_{k \in A \cup B} a_k$

Schreiben Sie $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{(i,j)}$ als Summe mit einer geeigneten Indexmenge $A \subset \mathbb{N}^2$.

Aufgabe 4.8. Fingerübung mit Funktionen

1) Sei $f : D \to B$ eine Funktion und $A, C \subset D$. Überlegen Sie sich mit *Eiermengen*, die wenige Punkte beinhalten, dass $f(A \cap C) \subset f(A) \cap f(C)$ gilt und beweisen Sie die Aussage danach sorgfältig. Sie *müssen* dabei die Definition der Konstruktion f(Menge) benutzen.

2) Geben Sie Beispiele reeller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und Teilmengen $A, C \subset [0,1]$ an, so dass $f(A \cap C) = f(A) \cap f(C)$, bzw. $f(A \cap C) \neq f(A) \cap f(C)$ gilt.

3) Was ist eigentlich $f(\emptyset)$? Beweis!

4) Geben Sie eine genaue geometrische Bedingung an, mit der Sie anhand des Graphen einer reellen Funktion $f : D \to B$ mit $D, B \subset \mathbb{R}$ überprüfen können, ob die Funktion injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist.

Aufgabe 4.9. Gleichheit von Funktionen

Kann es sein, dass zwei Funktionsvorschriften unterschiedlich *aussehen* und trotzdem die gleiche Funktion beschreiben? Hier ist ein Beispiel: Finden Sie eine möglichst große Menge $D \subset \mathbb{R}$, so dass die folgenden Funktionen gleich sind.

$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x - 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

Aufgabe 4.10. Sauberes Argumentieren

Untersuchen Sie welches Monotonieverhalten die Verkettung $h = g \circ f$ einer streng monoton fallenden Funktion f mit einer monoton fallenden Funktion g hat. Zur Klärung der Begriffe: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton fallend (bzw. monoton wachsend) falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets gilt $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$). Der Zusatz *streng* bedeutet, dass die Ungleichungen strikt sind, d.h. $f(x) > f(y)$ (bzw $f(x) < f(y)$).
Schließlich berechnet sich die Verkettung $g \circ f$ (sprich: g nach f) zweier Funktionen durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(1) Überlegen Sie, wie sich h verhält.
(2) Formulieren Sie eine Behauptung über das Verhalten von h mit geeigneten Vorraussetzungen an f und g.
(3) Beweisen Sie Ihre Behauptung durch sorgfältigen Nachweis und Ausnutzung der Definitionsbedingungen.

Aufgabe 4.11. Beweisen Sie, dass folgende Formel für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Aufgabe 4.12. Kommentieren Sie den Beweis von folgendem **Satz:** Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)

Induktionsanfang ($n = 1$)*:* Es ist offensichtlich, dass in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.

Induktionsschritt: Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n + 1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.

Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Pferde dieselbe Farbe haben. ■

KAPITEL 5

Logik auf den Punkt gebracht

In diesem Abschnitt wollen wir den Prozess des logischen Schließens untersuchen und damit zusammenhängende intuitive Vorstellungen präzisieren. Zunächst stellen wir fest, dass logisches Argumentieren ein bestimmtes *Verknüpfen von Aussagen* bedeutet. Dabei bezeichnet im Folgenden eine Aussage einen Sachverhalt, der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist. Weitere Wahrheitswerte wie z.B. *möglich* sind in der *zweiwertigen* Logik nicht zugelassen. Es gibt durchaus grammatikalisch korrekte Sätze, die weder wahr noch falsch sein können, z.B. der Satz

Diese Aussage ist falsch.

Wäre die Aussage wahr, dann wäre sie falsch; wäre sie falsch, dann wäre sie wahr. Das Problem in dieser Aussage ist der Selbstbezug!

Ein Satz: *Peter hat rote Haare* ist eine Aussage (in einem Kontext, wo Peter eindeutig eine Person beschreibt), selbst wenn Sie Peter nicht kennen und deshalb der Wahrheitswert nicht *bekannt* ist. Es ist nur wichtig, dass die Aussage entweder wahr oder falsch ist.

5.1. Verknüpfung von Aussagen

Wenn Sie verschiedene Beispiele für *logisches Schlussfolgern* betrachten, merken Sie, dass dieser Prozess gar nicht vom Inhalt der Aussagen abhängt.

Man kann sich also Gedanken über Logik an sich machen. Zum Beispiel werden Sie folgende Argumentation eines Technikers wohl richtig finden, obwohl Sie die Details nicht verstehen.

Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor. Die Taktstörung ist es diesmal nicht. Also haben wir einen Kriechstrom im Bereich der Sensorik.

Warum wir diese Argumentation als solche richtig finden, obwohl wir die beteiligten Aussagen nicht verstehen (und auch deren Wahrheitsgehalt nicht wirklich kennen), wollen wir im folgenden systematisch untersuchen. Zunächst sammeln wir die beteiligten *elementaren Aussagen.*

A = *Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.*

B = *Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

Diese Aussagen werden in der Argumentation des Technikers in einer bestimmten Weise miteinander verknüpft. Zunächst erkennen wir die oder-Verknüpfung:

Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder *ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

Diese Verknüpfung ist sinngemäß identisch mit

$$C = A \text{ oder } B \qquad \text{kurz} \qquad C = A \vee B$$

Als nächstes bemerken wir, dass die Teilaussage *Die Taktstörung ist es diesmal nicht* sinngemäß mit der *Verneinung* von A identisch ist

$$D = \text{nicht } A \qquad \text{oder kurz} \qquad D = \neg A.$$

Da die beiden ersten Sätze gleichrangig nebeneinander stehen liegt hier (sinngemäß) eine und- Verknüpfung vor. Man kann nämlich statt

Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor. Die Taktstörung ist es diesmal nicht.

auch sagen

Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor und *die Taktstörung ist es diesmal nicht.*

Die neue Teilaussage $E = C$ und D wird auch mit $E = C \wedge D$ abgekürzt. Die Gesamtaussage ist schließlich eine *Implikation*, da der Techniker ja die Aussage B aus $E = C \wedge D$ schlussfolgert. Dies wird an dem Wort *Also* deutlich. Bezeichnen wir die Gesamtaussage mit G, so ist $G =$ (aus E folgt B), oder $G =$ (E impliziert B), oder symbolisch $G = (E \Rightarrow B)$. Zur Bildung der Gesamtaussage haben wir die Verknüpfungsoperationen $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ benutzt. Expandiert ergibt sich

$$G = [(A \vee B) \wedge (\neg A)] \Rightarrow B$$

Dies ist die (stark komprimierte) Form der Argumentation des Technikers. Setzen Sie für A, B doch einfach mal andere Aussagen ein, z.B.

$$A = \text{„Der Hund bellt“}.$$
$$B = \text{„Die Karawane zieht weiter“}.$$

Die Gesamtaussage ist dann

Da der Hund bellt oder die Karawane weiterzieht und der Hund nicht bellt, zieht die Karawane weiter.

Die Tatsache, dass wir eine solche Argumentation unabhängig vom Inhalt als richtig empfinden, sollte sich dadurch äußern, dass die Implikationsaussage

$$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$$

unabhängig von den Aussagen A, B wahr ist, d.h. eine sogenannte *Tautologie* darstellt. Es geht also um die Frage, ob prinzipiell richtig gefolgert wird und *nicht* ob die Folgerung richtig ist (das hängt ja vom Wahrheitswert der Aussage B ab). Umgangssprachlich trennt man diese beiden Aspekte oft nicht voneinander was zur Verwirrung führen kann.

Um diese Verwirrung zu verhindern, hat man sich in der Mathematik auf klare Regeln geeinigt, wie mit den Verknüpfungs-Symbolen $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ bzw. den zugehörenden Worten umzugehen ist.

Insbesondere wird sichergestellt, dass bei der Verknüpfung von Aussagen wieder Aussagen entstehen, d.h. Sachverhalte die entweder wahr oder falsch sind. Der Wahrheitswert einer verknüpften Aussage soll dabei aus den Werten der beteiligten elementareren Aussagen bestimmt werden können.

5.2. Wahrheitstabellen

Betrachten wir als Beispiel die Verneinung $\neg$. Wenn eine Aussage A wahr ist, dann ist $\neg A$ nicht wahr also falsch (da wir uns auf Zweiwertigkeit geeinigt haben). Umgekehrt ist $\neg A$ wahr, wenn A falsch ist. Diesen Sachverhalt fasst man in einer sogenannten Wahrheitstabelle zusammen

A	¬ A
0	1
1	0

Die Wahrheitstabelle für die oder- Verknüpfung ergibt sich folgendermaßen: $A \vee B$ ist wahr, wenn A wahr ist, oder B wahr ist

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Beachten Sie, dass $A \vee B$ auch wahr ist, wenn A und B wahr sind. Es handelt sich also hierbei *nicht* um das entweder-oder sondern um das und-oder. Das ist einer der ersten Punkte, an denen die mathematische Sprache von Ihrer gewohnten Umgangssprache abweichen kann, sofern sie *oder* synonym für *entweder-oder* benutzen. In der Mathematik ist die Wahrheitstabelle für *oder* verbindlich. Für die entweder-oder Verknüpfung gibt es ein spezielles Symbol $A \oplus B$ mit der Wahrheitstabelle

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(dies entspricht der binären Addition ohne Übertrag, was das $\oplus$ Zeichen erklärt). Die verknüpfte Aussage $A \wedge B$ ist dann wahr, wenn A wahr ist und B wahr ist, also

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Betrachten wir nun die Implikationsverknüpfung $A \Rightarrow B$. Unter welchen Umständen würden Sie sagen, dass die Aussage *aus A folgt B* richtig bzw. falsch ist?

Wie schon angedeutet, ist diese Frage etwas kniffelig, da wir die Antwort immer an einen kausalen Zusammenhang zwischen A und B knüpfen wollen und das funktioniert nicht, wenn die Aussagen gar nicht bekannt sind. Den Wahrheitswert *hängt davon ab* gibt es aber in der zweiwertigen Logik nicht. Es stellt sich heraus, dass nur eine ganz bestimmte Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$ mit unserer intuitiven Vorstellung gut zusammenpasst.

A	B	A ⇒ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Trotzdem ist diese Tabelle möglicherweise gewöhnungsbedürftig, da die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr ist, wenn A falsch ist, d.h.

- Es ist wahr, dass eine falsche Aussage jede andere Aussage impliziert.

Entsprechend legt die Tabelle fest:

- Es ist wahr, dass eine wahre Aussage jede wahre Aussage impliziert.
- Es ist falsch, dass eine wahre Aussage eine falsche Aussage impliziert.

Beachten Sie nochmal, dass $A \Rightarrow B$ nicht bedeutet *ich kann mit der Voraussetzung A beweisen, nachrechnen oder schlussfolgern, dass B stimmt.*

Es handelt sich um eine reine Aussagenverknüpfung wie *und*, *oder*, *nicht* – sonst gar nichts.

Zum Beispiel ist

$$1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2$$

eine gültige Aussage, mit dem Wahrheitswert falsch und

$$1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 3$$

ist eine wahre Aussage.

Insbesondere sagt $A \Rightarrow B$ alleine *nichts* über den Wahrheitswert von B aus! Nur wenn bekannt ist, dass A wahr ist *und* $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann kann man aus der Tabelle ablesen, dass auch B wahr ist. So benutzen wir Implikationen tatsächlich umgangssprachlich. Wenn Ihnen die

Wahrheitstabelle für $\Rightarrow$ nicht intuitiv sinnvoll erscheint, so bleibt Ihnen nur übrig Ihre Intuition zu ändern! Die zweiwertige Aussagenlogik und damit die gesamte Mathematik die wir betreiben werden basiert nämlich auf genau dieser Tabelle. Allerdings würde das nie vernünftig funktionieren, wenn die Implikation der Aussagenlogik letztlich nicht doch genau die gesunde-Menschenverstand Implikation wäre, wenn Sie sich also immer noch etwas unwohl fühlen kann ich Sie vielleicht folgendermaßen überzeugen.

5.3. Die Implikationsvernüpfung

Lassen wir die Wahrheitstabelle für $P \Rightarrow K$ zunächst variabel weil uns nicht alle Einträge klar sind.

Prämisse	Konklusion	
P	K	$P \Rightarrow K$
0	0	W_{00}
0	1	W_{01}
1	0	W_{10}
1	1	W_{11}

Offensichtlich gibt es $2^4 = 16$ mögliche Tabellen. Wir wollen jetzt nach dem Ausschlussprinzip vorgehen und alle Tabellen ausschließen die mit unserer natürlichen Vorstellung von $\Rightarrow$ in Konflikt stehen. Dazu müssen wir zunächst solche Eigenschaften sammeln, über die wir uns intuitiv einig sind.

Dass die Aussage $A \Rightarrow A$ unabhängig von der Aussage A richtig ist (d.h. eine sogenannte Tautologie darstellt) bereitet Ihnen wohl kein großes Unbehagen. Als Beispiel betrachten wir den Satz wenn Peter rote Haare hat dann hat Peter rote Haare. Dieser *Schlussfolgerung* werden Sie wohl zustimmen, selbst wenn Sie nicht wissen ob Peter rote Haare hat oder nicht. Auch werden Sie nicht daran zweifeln, dass $P \Rightarrow K$ selbst *keine* Tautologie ist, denn sonst würde es wahr sein, dass jede Aussage jede andere Aussage impliziert.

Eine weitere intuitiv nachvollziehbare Eigenschaft der Implikation sieht man an folgendem Beispiel, dass mit den Elementaraussagen

$A =$ *Das Seil reißt*, $B =$ *Armin fällt*, und $C =$ *Beatrix fällt* arbeitet.

Wir betrachten die zusammengesetzte Aussage *Wenn das Seil reißt, fällt Armin, und wenn Armin fällt dann fällt Beatrix*, also symbolisch $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Diese Kette aus zwei Regeln impliziert mit dem natürlichen Implikationsbegriff *zwangsläufig* die neue Regel *Wenn das Seil reißt, dann fällt Beatrix*, d.h. $(A \Rightarrow C)$. Zwangsläufig bedeutet dabei, dass die Gesamtaussage

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

von uns auf jeden Fall als korrekt (d.h. wahr) betrachtet wird. Dieser sogenannte *Kettenschluss* spiegelt dabei unsere Alltagserfahrung mit kausalen Zusammenhängen wider. Er beschreibt die korrekte Zusammenfassung einer Kette von Regeln und beschäftigt sich gar nicht mit dem Wahrheitsgehalt der beteiligten Elementaraussagen! Merken Sie, dass Sie den Kettenschluss akzeptieren, ohne zu wissen, ob das Seil reißt oder nicht bzw. ob Armin oder Beatrix tatsächlich fallen oder nicht. Wir haben also eine weitere intuitive Tautologie entdeckt, denn wir betrachten

$$T = ([(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

als wahr unabhängig vom Wahrheitsgehalt der beteiligten Aussagen.

Um die noch unbestimmten Wahrheitswerte der Implikationstabelle zu ermitteln können wir uns nun nacheinander die 16 möglichen Tabellen vornehmen und jeweils überprüfen, ob sie unseren intuitiven Anforderungen genügen. Dabei stellt sich heraus, dass die oben angegebene Tabelle die einzige Möglichkeit ist, für die

$$A \Rightarrow A \qquad \text{und} \qquad [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Tautologien sind, aber $A \Rightarrow B$ keine Tautologie ist. Damit die intuitiven Forderungen gelten, *müssen* wir also die etwas-nicht-intuitive Wahrheitstabelle akzeptieren.

Übrigens, falls Sie nicht alle Tabellen durchgehen wollen, gibt es auch eine etwas geschicktere Methode. Schauen wir uns dazu die Tabelle von $A \Rightarrow A$ an.

A	$A \Rightarrow A$
0	W_{00}
1	W_{11}

Da $A \Rightarrow A$ eine Tautologie sein soll, können wir uns sofort auf die vier Tabellen konzentrieren, für die $W_{00} = W_{11} = 1$ gilt. Darunter befindet sich auch die Tabelle $W_{00} = W_{01} = W_{10} = W_{11} = 1$, die wir verwerfen können, da $A \Rightarrow B$ ja *keine* Tautologie sein soll.

Es bleiben also noch drei Tabellen übrig wobei $W_{00} = W_{11} = 1$ gilt und mindestens einer der beiden Werte W_{01}, W_{10} gleich 0 ist. Benutzen wir nun die Tautologie T, im Fall $W(A) = W(C) = 1$ und $W(B) = 0$, wobei $W(\cdot)$ den Wahrheitswert einer Aussage bezeichne. Es gilt dann entsprechend der Implikationstabelle $W(A \Rightarrow B) = W_{10}, W(B \Rightarrow C) = W_{01}$ und $W(A \Rightarrow C) = W_{11} = 1$. Da entweder $W_{01} = 0$ oder $W_{10} = 0$ ist, ergibt die und-Verknüpfung $W((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) = 0$ und ein erneuter Blick auf die Implikationstabelle zeigt $W(T) = W_{01}$. Da T eine Tautologie sein soll, müssen wir uns auf die Tabelle mit $W_{01} = 1$ festlegen, d.h. die einzige Tabelle, die allen unseren intuitiven Anforderungen entspricht ist die mit $W_{00} = W_{01} = W_{11} = 1$ und $W_{01} = 0$.

5.4. Tautologien

Kommen wir nun zurück zu unserem Ausgangsbeispiel

A = “Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.”

B = “Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.”

Die Schlussfolgerung des Technikers

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$$

empfanden wir dabei intuitiv als logisch korrekt. Jetzt können wir nachrechnen, dass unser Gefühl für logische Korrektheit tatsächlich ein Gefühl für Tautologien ist. Notieren wir unter den Elementaraussagen die möglichen Wahrheitswerte und unter den Verknüpfungszeichen die Werte der entsprechend verknüpften Aussagen, so ergibt sich

((	A	∨	B	)	∧	¬	A	)	⇒	B
	0	0	0		0	1	0		**1**	0
	0	1	1		1	1	0		**1**	1
	1	1	0		0	0	1		**1**	0
	1	1	1		0	0	1		**1**	1

Da die Gesamtaussage unabhängig von den beteiligten Wahrheitswerten stets wahr ist, handelt es sich um eine Tautologie.

Gleiches gilt für andere vertraute Schlussweisen, z.B. ist

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

eine Tautologie, wie man leicht nachrechnet

((	A	⇒	B	)	∧	A	)	⇒	B
	0	1	0		0	0		**1**	0
	0	1	1		0	0		**1**	1
	1	0	0		0	1		**1**	0
	1	1	1		1	1		**1**	1

Probieren Sie einfach aus, ob diese Tautologie in einem konkreten Fall tatsächlich logisch korrekt erscheint. Mit $A =$ „Das Seil reißt” und $B =$ „Armin fällt” ergibt sich „Das Seil reißt und wenn das Seil reißt, fällt Armin. Also fällt Armin.” Hierbei haben wir aus stilistischen Gründen die Aussage umgestellt in die Form

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Dürfen wir das einfach so? Beschreibt die umgestellte Aussage den gleichen Sachverhalt wie

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B?$$

Dies ist die Frage nach der Äquivalenz von Aussagen. Inzwischen wissen wir ja, dass der Wahrheitswert in verknüpften Aussagen entsprechend den Wahrheitstabellen aus dem Wahrheitswert der Teilaussagen gebildet wird. Ersetzen wir nun eine Teilaussage durch eine andere mit genau den gleichen Wahrheitswerten, ändert sich der Gesamtwahrheitsgehalt nicht. Zwei Aussagen, die den gleichen Wahrheitswert haben nennen wir *äquivalent*. Die Wahrheitstabelle der Äquivalenz ist also

D	E	D ⟺ E
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nun kann man sehr leicht nachrechnen, dass die Aussagen $A_1 \wedge A_2$ äquivalent zur Aussage $A_2 \wedge A$, ist, d.h. dass

$$A_1 \wedge A_2 \Longleftrightarrow A_2 \wedge A_1$$

eine Tautologie ist.

A_1	$\wedge$	A_2	$\iff$	A_2	$\wedge$	A_1
0	0	0	**1**	0	0	0
0	0	1	**1**	1	0	0
1	0	0	**1**	0	0	1
1	1	1	**1**	1	1	1

Aus diesem Grund ist dann auch

$$[((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B] \iff [A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$$

für jedes Paar von Aussage A, B eine wahre Aussage (da ja der Wahrheitswert der Prämisse auf beiden Seiten gleich ist).

Bevor wir die Beobachtungen dieses Abschnitts zusammenfassen, soll schnell noch ein kleiner Test durchgeführt werden, ob unsere formale Logik auch tatsächlich mit der Bauchlogik zusammenpasst. Aus wahrscheinlich nicht mehr genau lokalisierbarer Vorzeit ist Ihnen bekannt, dass wenn aus A die Aussage B folgt und aus B die Aussage A, dann sind A und B äquivalent.

Mit Symbolen geschrieben sollte also

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A) \iff (A \iff B)$$

eine Tautologie sein. Rechnen Sie es nach!

5.5. Aussageformen und Quantoren

Viele mathematischen Sätze machen eine Aussage über die Gesamtheit aller Elemente einer Menge. Als Beispiele seien die Sätze über gerade Zahlen in Kapitel 3 genannt. Die Aussagen beinhalten dann typischerweise Platzhalter für die Elemente der Menge, wie in Satz 3.2, wo für ein beliebiges Element $n \in \mathbb{N}$ gezeigt wird, dass n gerade ist, falls n^2 gerade ist. Mit dem Implikationspfeil und der Definition 2.1 der geraden Zahlen kann man dies auch so formulieren.

$$n^2 \in G \quad \Longrightarrow \quad n \in G. \tag{5.1}$$

Da Ausdrücke der Form $n \in G$ keinen eindeutigen Wahrheitswert besitzen (für $n = 1$ ist die entsprechende Aussage falsch, für $n = 2$ ist sie aber wahr), handelt es sich hier nicht um Aussagen sondern um sogenannte *Aussageformen*. Eine Aussageform $A(n)$ ist also eine Zeichenkette, die zu einer Aussage wird, wenn man für das Symbol n ein geeignetes Objekt einsetzt. Ein Beispiel ist die Aussageform $A(n)$ definiert durch den Ausdruck (5.1). Natürlich kann eine Aussageform auch von mehreren Variablen abhängen, etwa die durch $x < y$ definierte Aussageform $B(x, y)$.

Aussageformen sind uns bereits im Kapitel 2 begegnet. Ist M eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, so besagt das Aussonderungsaxiom, dass auch die Elemente $x \in M$ für die $A(x)$ wahr ist, wieder eine Menge bilden. Die Schreibweise für diese neue Menge ist

$$\{x \in M : A(x)\}$$

Ein wichtiges Sprachkonstrukt im Zusammenhang mit Aussageformen sind die sogenannten *Quantoren*, der Existenzquantor $\exists$ und der Allquantor $\forall$. Dabei ist die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

wahr, wenn es (mindestens) ein Element $x \in M$ gibt, für das $A(x)$ wahr ist. Entsprechend ist die Aussage

$$\forall x \in M : A(x)$$

wahr, wenn für alle Elemente $x \in M$ die Aussage $A(x)$ wahr ist. Der Doppelpunkt wird dabei jeweils als *für das gilt* bzw. als *gilt* gelesen. Im Volltext lautet also die Existenzquantoraussage: *Es existiert ein x in M, für das $A(x)$ gilt.* Die Allquantoraussage liest sich so: *Für alle Elemente x aus M gilt $A(x)$.*

Unsere bisherigen Definitionen und Sätze lassen sich mit Quantorenschreibweise wortfrei formulieren, wie z.B. die Menge der geraden Zahlen

$$G = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}.$$

Die Aussage von Satz 3.2 kann so geschrieben werden

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \in G \quad \Longrightarrow \quad n \in G.$$

Schon bald werden Sie die Definition einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergenten Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Quantorenschreibweise so formulieren:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Eine etwas angenehmere Lesart ist sicherlich: Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Zahl $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn zu jedem noch so kleinen Toleranzparameter $\varepsilon > 0$ ein passender Index $N \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, so dass für jeden größeren Index $n \geq \mathbb{N}$ der Abstand zwischen x_n und a kleiner als der Toleranzparameter ist, d.h. $|x_n - a| < \varepsilon$.

Welche Schreibweise Sie auch bevorzugen, Sie sollten nach einer gewissen Trainingsphase in der Lage sein, zwischen beiden Darstellungsformen fließend zu übersetzen.

Im Zusammenhang mit Kontrapositions- oder Widerspruchsbeweisen kommt es häufiger vor, dass man Negationen von Quantoraussagen formulieren muss. Schauen wir uns zunächst die Allquantor Situation an. Gilt nicht $\forall x \in M : A(x)$, dann ist $A(x)$ nicht für alle Elemente $x \in M$ wahr, d.h. es muss mindestens ein Element $x \in M$ existieren für das $A(x)$ falsch bzw. $\neg A(x)$ wahr ist. Folglich ist

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg A(x)$$

eine Tautologie. Umgekehrt gilt die Tautologie

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg A(x).$$

5.6. Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, wie mit Aussageverknüpfungen und Quantoren aus gegebenen Aussagen bzw. Aussageformen neue Aussagen gebildet werden können. Dabei wurde über Wahrheitstabellen stets genau angegeben, wie sich die Wahrheitswerte der Teilaussagen bei der Verknüpfung in den Wahrheitswert der neugebildeten Aussage transformieren.

Bemerken Sie dieselbe Taktik wie in der Mengenlehre? Es werden genaue Regeln spezifiziert, wie die relevanten Objekte (hier Aussagen, da Mengen) miteinander zu neuen Objekten kombiniert werden können. Dann fehlen nur noch einige Startobjekte und schon können die Regeln zum Einsatz kommen, um neue Objekte zu konstruieren. Während in der Mengenlehre die Existenz einer Menge postuliert werden muss, benötigt man in der Logik einige Aussagen und deren Wahrheitswert, um neue Aussagen mit bekanntem Wahrheitswert daraus zu konstruieren.

Die Startaussagen werden dabei so formuliert, dass Sie den Wahrheitswert 1 tragen, also wahr sind. Sie werden auch als *Axiome* bezeichnet. Die Axiome stehen damit am Anfang einer Theorie und alle weiteren Aussagen sind letztlich äquivalent zu mehr oder weniger lange Verkettungen dieser Elementaraussagen.

Die Ableitung des Wahrheitswertes einer verknüpften Aussage wird *Beweis* genannt. Schwierig werden Beweise dadurch, dass ihre Durchführung eine genau abgestimmte Anwendung von Tautologien und die Hinzunahme geeigneter Aussagen mit bereits bekannten Wahrheitswerten erfordert. Die Tautologien erlauben dabei die Umformulierung von Aussageverkettungen, wie etwa die Abschnitt 3.2 benutzte Tautologie

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A),$$

die sogenannte Kontraposition. Den Nachweis mit einer Tabelle, dass es sich hierbei wirklich um eine Tautologie handelt ist eine Übungsaufgabe.

5.7. Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Begriffsklärungen

a) Was versteht man in der Logik unter Aussagen, Aussageformen sowie unter Junktoren und Ausdrücken?
b) Was ist im Sinne der zweiwertigen Aussagenlogik eine Tautologie, was eine Kontradiktion?
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Tautologien und den Kontradiktionen? Ist eine Kontradiktion das *Gegenteil* zu einer Tautologie?
d) Welche Klassen von Tautologien unterscheidet man?
e) Was besagen die logischen de Morgan Regeln?
f) Geben Sie Beispielsätze an, welche die logischen Distributivgesetze veranschaulichen.
g) Formulieren Sie den Kontrapositionssatz und begründen Sie die Namensgebung.
h) Erklären Sie die lateinische Floskel *ex falso quod libet* (wörtl. *aus Falschem was beliebt*).
i) Was bedeuten die folgenden Begriffe: Implikation, Konklusion, Prämisse, notwendige Bedingung, hinreichende Bedingung?

Aufgabe 5.2. Mathematische Sprachübung

a) Definieren Sie Elementaraussagen und schreiben Sie den Satz mit Hilfe der üblichen Aussageverknüpfungen der Logik.

> Wenn es regnet geht Klaus Regenwürmer suchen, aber
> er geht nicht ohne Gabi.

b) Ordnen Sie jedem der umgangssprachlichen Sätze (i)-(iv) die entsprechende logische Formel aus der Liste (a)-(f) zu. Die Menge A enthalte alle Lebewesen, $F(x)$ sei die Aussageform „x ist ein Mensch“ und $G(x, y)$ sei die Aussageform „x liebt y“.

i) Jeder Mensch liebt einen Menschen.
ii) Ein Mensch liebt einen Menschen.
iii) Ein Mensch liebt alle Menschen.
iv) Alle Menschen lieben alle Menschen.

a) $\exists x \in A : F(x) \wedge \forall y \in A : F(y) \Rightarrow G(x, y)$
(Leseprobe: *Es existiert ein Wesen x, so dass x ein Mensch ist und für alle Wesen y gilt, wenn y ein Mensch ist, dann liebt x die Person y.* Diese Aussage ist wahr, wenn es einen Menschen gibt, der alle anderen liebt, d.h. die Aussage entspricht (iii).)
b) $\forall x \in A : F(x) \wedge \forall y \in A : F(y) \Rightarrow G(x, y)$
c) $\exists y \in A : F(y) \wedge \exists x \in A : F(x) \wedge G(x, y)$
d) $\forall y \in A : F(y) \Rightarrow \forall x \in A : F(x) \Rightarrow G(x, y)$
e) $\exists x \in A : F(x) \Rightarrow \exists y \in A : F(y) \wedge G(x, y)$
f) $\forall x \in A : F(x) \Rightarrow \exists y \in A : F(y) \wedge G(x, y)$

Aufgabe 5.3. Übersetzung Symbole → Anschauung

1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Was bedeutet folgende Aussage geometrisch? Geben Sie je ein Beispiel für f an, so dass die Aussage erfüllt bzw. nicht erfüllt ist.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)] : \exists x \in [a, b] : f(x) = y.$$

2) Die Menge $\mathcal{F}(A, B)$ enthalte alle Funktionen $f : A \to B$. Zeigen Sie durch ein konkretes Beispiel, dass folgende Aussage wahr ist.

$$\exists f \in \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R}) : \exists x \in [-1, 1] :$$
$$\forall \theta \in [0, 1] : f(x) \neq (1 - \theta) f(-1) + \theta f(1).$$

Aufgabe 5.4. Die Kontraposition

Weisen Sie nach, dass es sich bei der Kontraposition

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

um eine Tautologie handelt.

Aufgabe 5.5. Die NOR-Verknüpfung

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Sätze:
   i) *Weder regnet noch schneit es.*
   ii) *Es ist nicht am Regnen oder Schneien.*

Versuchen Sie zunächst die zweistellige logische Verknüpfung *weder - noch* (Symbol $\bigtriangledown$) mittels anderer logischer Verknüpfungen zu definieren und stellen Sie eine Wahrheitstafel auf. Rechnen Sie dann anhand einer Wahrheitstabelle nach, dass die beiden Sätze sinngemäß äquivalent sind. Welche Tautologie ist dabei zu überprüfen?

b) Es seien A, B zwei Aussagevariablen. Zeige: $\neg A = A \bigtriangledown A$. Finden Sie äquivalente Ausdrücke für $A \vee B$ und $A \wedge B$, in welchen nur $\bigtriangledown$ vorkommt.

Tipp: Benutzen Sie zunächst ein Beispiel, etwa:

Es ist kalt und nass. $\Leftrightarrow$ *Weder ist es warm (nicht kalt) noch trocken (nicht nass).*

Bemerkung: Die Möglichkeit andere Verknüpfungen allein auf die NOR-Verknüpfung zurückführen zu können (siehe auch Aufgabe 5.6) ist von grundlegender Bedeutung für die elektronische Schaltungstechnik. Daneben spielt die NAND-Verknüpfung (nicht zugleich) eine wichtige Rolle.

Aufgabe 5.6. Auflösung von Konditionalgefügen

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen zunächst spontan hinsichtlich eines möglichen Sinnunterschieds:

i) *Hans besteht die Klausur nicht, wenn er die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet.*
ii) *Hans bearbeitet die Übungen sorgfältig, oder er besteht die Klausur nicht.*
iii) *Es ist nicht möglich, dass Hans die Klausur besteht, ohne die Übungen sorgfältig zu bearbeiten.*

Beachten Sie, dass es sich in Satz ii) nicht um ein ausschließendes *oder* handelt, d.h. Hans kann die Klausur nicht bestehen trotz sorgfältiger Bearbeitung der Übungsaufgaben. Analysieren Sie nun die Sätze mittels der Aussagenlogik:

a) Isolieren Sie die Teilaussagen in den drei Beispielsätzen und geben Sie an, wie (durch welche Junktoren) diese jeweils zu der Gesamtaussage verknüpft sind.
b) Rechnen Sie anhand von Wahrheitstabellen nach, ob die drei Sätze den gleichen Wahrheitswert besitzen.
c) Stellen Sie die Verknüpfung $A \Rightarrow B$ mittels eines Ausdrucks dar, welcher nur den NOR-Junktor $\bigtriangledown$ enthält (Aufgabe 5.5).
d) Betrachten Sie abschließend die beiden folgenden Aussagen:

C: Hans bekommt den Übungsschein.
D: Hans besteht die Klausur.

Finden Sie verschiedene Formulierungen analog zu i),ii) und iii), welche die Äquivalenz dieser beiden Aussagen zum Ausdruck bringen. Welche Bedingungen sind für den Erhalt des Übungsscheines notwendig, welche hinreichend?

Aufgabe 5.7. Vom mathematischen Beweisen

a) Was ist ein direkter Beweis? Erläutern Sie kurz die Vorgehensweise.
b) Was versteht man unter einem Kontrapositionsbeweis?
c) Wie funktioniert ein indirekter Beweis?
d) Es sei $A(x)$ eine Aussageform über der Menge X. Verneinen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{i) } \forall x \in X : A(x), \qquad \text{ii) } \forall x \in X : \neg A(x),$$
$$\text{iii) } \exists x \in X : A(x), \qquad \text{iv) } \exists x \in X : \neg A(x).$$

Geben Sie an, wie die Ausdrücke bzw. ihre Verneinungen in Worten zu lesen sind.

Aufgabe 5.8. Kommentieren Sie den folgenden Satz:

Alle Schnecken haben Häuser, und alle Häuser haben Schornsteine. Ergo haben alle Schnecken Schornsteine.

KAPITEL 6

Beweistraining

Ein Satz ist eine wahre Aussage. Sein Beweis (d.h. der Nachweis der Wahrheit) besteht üblicherweise aus einer logischen Kette wahrer Aussagen, die am Ende die Aussage des Satzes impliziert.

Aus dieser Beschreibung erkennen Sie, dass Beweisen ein *rekursiver* Prozess ist: um zu zeigen, dass eine Aussage wahr ist, werden weitere wahre Aussagen und damit weitere Beweise benötigt. Teilabschnitte dieser rekursiven Reise enden immer dann, wenn eine Aussage auftritt, deren Wahrheitswert schon überprüft wurde (Satz), die als wahr angenommen wurde (Axiom), oder die nur eine sprachliche Vereinbarung widerspiegelt (Definition).

Bei jeder Teilaussage die nicht von diesem Basistyp ist, *muss* die Beweis-Reise weitergehen, wobei die gleichen Regeln gelten wie für den Beweis der Ausgangsaussage (das Wort *muss* ist hier die entscheidende Anleitung zu einem gültigen Beweis – solange Sie nicht auf einen Satz, eine Definition oder ein Axiom verweisen können *müssen* Sie weiter beweisen). Insgesamt ist die Reiseroute aber so zu wählen, dass mit jeder weiteren Teilaussage die Rückführung auf bekannte Sätze, Axiome oder Definitionen näher rückt. Da dieser Teil Planung und Kreativität verlangt (d.h. Verständnis der Aufgabenstellung, eine gewisse Übersicht über das Problem, eine Lösungsstrategie), lassen sich hier nur wenig Rezepte angeben. Durch eine klare *Strukturierung* lässt sich aber zumindest Konfusion vermeiden, so dass die Gedankenarbeit an der richtigen Stelle ansetzen kann. Hier ist ein Versuch der Strukturierung.

6.1. Rekursives Rezept

Die folgenden Regeln gelten für alle Aussagen, die in einem Beweis auftreten, also sowohl für die Ausgangsaussage (die eigentliche Behauptung) als auch für die Teilaussagen, die während der Beweisführung zu klären sind.

6.1.1. Beim Aufschreiben ist Ordnung das ganze Leben. Formulieren Sie die Aussage *präzise.* Dabei hilft die symbolische Schreibweise (Quantoren, logische Verknüpfungen, Mengen etc.), um Mehrdeutigkeiten der Alltagssprache zu verhindern.

6.1.2. Auflösung von Definitionen. Enthält die zu beweisende Aussage Objekte, die in ähnlicher Form immer wieder auftauchen und deshalb durch Definitionen abgekürzt wurden (z.B. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, f ist stetig, f ist differenzierbar, $\int_a^b f(x)dx = c$, etc.), so kann es hilfreich sein, die Definitionen aufzulösen: ersetzen Sie die Objekte durch die in der Definition angegebenen äquivalenten und detaillierten Beschreibung. Anstelle von Definitionen kann man zur Auflösung aber auch Charakterisierungen verwenden, also Sätze die die Äquivalenz der definierenden Beschreibung mit anderen Beschreibungen zeigen (z.B. die $\epsilon - \delta$ Charakterisierung der Stetigkeit anstelle der lim-Definition). Da durch das Auflösen von Definitionen die Detailfülle zwangsläufig zunimmt, muss dieses Mittel natürlich dosiert eingesetzt werden, damit der Überblick nicht verloren geht (siehe Abschnitt 6.1.3). Zum Umgang mit Definitionen und Sätzen lesen Sie auch den Abschnitt 6.2.

6.1.3. Namen geben. Tatsächlich versperrt bei Beweisen oft die auftretende Fülle an Details die Einsicht, dass etwa eine Definition oder ein Satz anwendbar wären und die Problemlösung dadurch näher kommen würde. Hier hilft es, durch sinnvolles Zusammenfassen von Details wieder Übersichtlichkeit herzustellen. Konkret geschieht das meist durch die Einführung von Abkürzungen, die dann nach und nach wieder durch die Details ersetzt werden. Als Beispiel sei die Berechnung der Ableitung von $\exp(\sin(\ln(3-x)+5x)-3^x)$ genannt: Fülle an Details äußert sich hier als *komplizierter Ausdruck* und Einführung von Abkürzungen bedeutet etwa $g(x) := \sin(\ln(3-x)+5x)-3^x$, so dass nur noch $\exp(g(x))$ auszurechnen ist. Durch die geschickte, eigenständige Definition von g, sehen Sie jetzt ganz klar, dass ein Satz anwendbar ist - die Kettenregel. Sie liefert als Ableitung $\exp(g(x))g'(x)$. Beachten Sie wie hilfreich der Name g war! Zur Berechnung des noch fehlenden Ausdrucks $g'(x)$, befolgen wir nun Abschnitt 6.1.2 und ersetzen g entsprechend unserer Definition. Dabei merken wir natürlich sofort, dass der Ausdruck immer noch unübersichtlich ist und eine erneute Namensgebung ansteht, also etwa $g(x) = \sin(h(x)) - u(x)$. Hier sieht man jetzt, dass die Summenregel und die Kettenregel zur Berechnung von $g'(x)$ benutzt werden können. Das Definieren von Abkürzungen und das anschließende Auflösen wird solange fortgeführt, bis das Endergebnis erreicht ist.

6.1.4. Textversatzstücke und Fortsetzung der Rekursion. Hier sind einige Möglichkeiten zum Umgang mit üblichen Aussagekonstrukten aufgeführt.

1) Die Aussage ist eine Implikation $A \Rightarrow B$.
Aus dem Bauch heraus (oder mit Hilfe der Wahrheitstabelle, wenn Sie sich nicht auf Ihren Bauch verlassen – was zu empfehlen ist) ist klar was zu tun ist: Sie nehmen an A ist wahr und zeigen, dass auch B wahr ist. In diesem Fall ist die Implikation wahr. Den verbleibenden Fall, dass A nicht wahr ist brauchen Sie nicht zu untersuchen, da in diesem Fall $A \Rightarrow B$ per Definition wahr ist. Im Beweistext schreiben Sie: ***Wir nehmen an,*** A ***ist wahr und müssen zeigen dass*** B ***wahr ist.*** Dies definiert auch sofort die nächste Teilaufgabe: mit der Aussage B zurück zu Abschnitt 6.1.1.

2) Allgemeiner gilt: ist die Aussage eine logische Verknüpfung von Aussagen, so zeigt Ihnen die Wahrheitstabelle welche Wahrheitswerte für die beteiligten Aussagen zu überprüfen sind, damit die Verknüpfung wahr ist. Genauso können Sie hier durch Anwendung von Tautologien die Verknüpfung anders darstellen (z.B. ist eine Äquivalenz gleichbedeutend mit zwei Implikationen). Mit den erforderlichen Teilaussagen gehen Sie jeweils zurück zu 6.1.1

3) Die Aussage ist von der Form $\forall x \in M : A(x)$.
Die Aufgabe ist hier zu zeigen, dass die Aussage $A(x)$ für jede Wahl von $x \in M$ wahr ist (siehe Definition des Quantors $\forall$). Im Beweistext schreiben Sie: ***Sei*** $x \in M$***. Wir müssen zeigen, dass*** $A(x)$ ***wahr ist.*** Dies definiert auch sofort die nächste Teilaufgabe. Für das gegebene $x \in M$ muss nun die Aussage $A(x)$ validiert werden ... also mit der Aussage $A(x)$ zurück zu Abschnitt 6.1.1.

4)Die Aussage ist von der Form $\exists x \in M : A(x)$.
Hier wird es etwas kniffliger. Die Aussage verlangt die Angabe eines $x \in M$, so dass $A(x)$ wahr ist. Dieses Element x ist konkret anzugeben! Üblicherweise benötigt man zur Konstruktion von x wahre Aussagen, die im Beweis bereits aufgetreten sind (z.B. die Voraussetzung wenn die Gesamtaussage eine Implikation ist), oder man erhält die Existenz durch Anwendung von Sätzen. Im Beweis schreibt man: ***Wir suchen ein*** $x \in M$***, so dass*** $A(x)$ ***gilt.*** Um klarer zu sehen, wie das x gewählt

werden muss, gehen Sie mit $A(x)$ zurück zu Abschnitt 6.1.1. Sie arbeiten also rekursiv weiter um die Aussage $A(x)$ in eine handlichere Form zu bringen. Dabei müssen Sie aber von nun an Ihre Augen offen halten, ob ein x gefunden werden kann, so dass $A(x)$ gilt.

5) Sie können einen Satz anwenden, um die Aussage nachzuweisen. Schreiben Sie dazu den Satz noch einmal auf, und überprüfen Sie sorgfältig, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind. Dabei können alle wahre Aussagen, die im Beweis bis zu diesem Punkt schon aufgetreten sind benutzt werden. (Vorsicht: benutzen Sie beim Aufschreiben des Satzes Bezeichnungen, die nicht mit bereits benutzten Bezeichnungen im Beweis kollidieren.) Die Anwendung eines Satzes entspricht übrigens meist der Tautologie $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$. Dabei ist $A \Rightarrow B$ der Satz (die Implikation ist also wahr) und die Überprüfung der Voraussetzungen des Satzes entsprechen dem Nachweis, dass A ebenfalls wahr ist. Da die Tautologie stets wahr ist und die linke Seite $((A \Rightarrow B) \wedge A)$ der Implikation nun ebenfalls den Wahrheitswert 1 hat, können wir aus der Wahrheitstabelle ablesen, dass auch B den Wahrheitswert 1 hat. Wir haben gezeigt, dass B wahr ist, weil A wahr ist und der Satz $A \Rightarrow B$ wahr ist.

6) Sie kommen mit der Aussage nicht weiter. Denken Sie daran, dass manchmal ein indirekter Beweis helfen kann. Sie formulieren dazu (mit Hilfe einer logischen Tautologie) die Aussage um. Statt z.B. eine Implikation direkt zu beweisen, können Sie es mit einer Kontraposition oder einem Widerspruchsbeweis versuchen (Details siehe Kapitel 3).

7) Falls Sie durch den Verlauf des Beweises daran zweifeln, ob die zu beweisende Aussage überhaupt stimmt, können Sie mit den bereits durchgeführten Schritten versuchen ein Beispiel zu konstruieren, so dass die zu beweisende Aussage logisch korrekt auf eine falsche Aussage führt. Dann haben Sie ein Gegenbeispiel und die Ausgangsfrage, wenn auch negativ, beantwortet.

6.2. Definitionen und Sätze

Bevor wir uns konkrete Beweisbeispiele anschauen, soll hier noch einmal auf den Umgang mit Definitionen und Sätzen hingewiesen werden.

6.2.1. Umgang mit Definitionen. Definitionen dienen der Zusammenfassung bzw. Abkürzung von komplizierten Sachverhalten mit einem (möglichst suggestiven) Symbol oder Wort.

Im Zusammenhang mit Definitionen treten daher prinzipiell zwei Situationen auf

(1) In einem konkreten Sachverhalt stellt sich die Frage, ob die Definition greift, so dass mit der Abkürzung weiter argumentiert werden kann.
(2) Eine Voraussetzung oder das Ergebnis eines mathematschen Satzes garantiert, dass die Definition greift. Dann treffen alle in der Abkürzung versteckten Inhalte zu und können zur weiteren Argumentation verwendet werden.

Schauen wir uns das Beispiel einer Definition an, die mehrere Eigenschaften zu einer neuen Eigenschaft zusammenfasst.

Definition 6.1. *Sei V ein Vektorraum und $B \subset V$. Die Menge B heißt Basis von V, wenn B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.*

Hier wird die neue Eigenschaft *ist Basis von* als Abkürzung von einigen anderen Eigenschaften eingeführt. Will man entsprechend obigem Punkt (1) für eine bestimmte Menge $\{(3,2),(1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ nachprüfen, ob das Label *ist Basis von* vergeben werden darf, dann sollte man sich die Definition als Checkliste vorstellen:

Checkliste:	*ist Basis von*	
Eingabe:	B, V	
Frage 1:	Ist $B \subset V$?	☐
Frage 2:	Ist V ein Vektorraum?	☐
Frage 3:	Ist B linear unabhängig in V?	☐
Frage 4:	Ist B ein Erzeugendensystem von V?	☐
Ausgabe:	B ist Basis von V	☐

Zur Überprüfung muss zunächst die Eingabe sauber identifiziert werden, also

$$B = \{(3,2),(1,2)\}, \qquad V = \mathbb{R}^2.$$

Haben Sie gemerkt, dass hier im Sinne von Abschnitt 6.1.3 Namen vergeben wurden, damit die Benutzbarkeit der Definition klarer hervortritt? Dies ist eine ganz typische Situation.

Als nächster Schritt werden die Fragen in der Liste der Reihe nach bearbeitet, was üblicherweise das Abarbeiten weiterer Checklisten erfordert (hier der Checklisten für *Vektorraum*, $\subset$, *linear unabhängig*, *Erzeugendensystem*). Wird eine Frage positiv beantwortet, gibt es einen Haken im zugehörigen Kästchen. Im anderen Fall kann man mit der Checkliste aufhören, da das untere Kästchen nur dann einen Haken bekommt, wenn alle Kästchen darüber einen Haken haben. Geht die Überprüfung durch, so kann man danach für die konkreten Mengen B und V die Eigenschaft *ist Basis von* verwenden.

Selbst wenn in einer solchen Checkliste einige Fragen leichter zu beantworten sind als andere, so sind doch alle Antworten gleich wichtig für den Gesamthaken. Der Versuchung, über gewisse Fragen wegen vermeindlicher Banalität nicht einmal nachzudenken, müssen Sie auf jeden Fall widerstehen.

Weiß man entsprechend Punkt (2), dass $B = \{b_0, \dots, b_n\}$ eine Basis von $V = \Pi_n$ ist, dann entspricht die Definition einer Gebrauchsanleitung oder einer Produktbeschreibung:

Produktbeschreibung:	B ist Basis von V	
Eigenschaft 1:	$B \subset V$	✓
Eigenschaft 2:	V ist ein Vektorraum	✓
Eigenschaft 3:	B ist linear unabhängig in V	✓
Eigenschaft 4:	B ist ein Erzeugendensystem von V	✓

Alle zugesicherten Eigenschaften sind nun in der weiteren Argumentation verwendbar.

Zur Übung können Sie einfach einige Definitionen in Ihrer Vorlesungsmitschrift in detaillierte Checklisten umschreiben. Haken Sie dann in Ihren Übungsaufgaben oder beim Nachbereiten von Beweisen der Vorlesung die Kästchen konkret ab. Wenn ein Haken fehlt müssen Sie die Bedingung natürlich überprüfen.

6.2.2. Anwenden von Sätzen. Mathematische Sätze bestehen aus zwei Teilen, den Voraussetzungen und den daraus erzielten Folgerungen. Um die Folgerungen nutzen zu können, muss nachgewiesen werden, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind. Dieser Nachweis entspricht dem Abarbeiten von Checklisten wie im Fall der Definitionen.

Stellen Sie sich also auch mathematische Sätze wie Checklisten vor, die Sie vor der Benutzung abarbeiten müssen.

6.3. Beispiele

Um den Beweisprozess zu üben, beginnen Sie am besten mit ganz offensichtlichen Aussagen. In solchen Fällen ist der kreative Anteil des Beweises auf ein Minimum reduziert, so dass Sie sich ganz auf die Strukturierung konzentrieren können. Eine andere Möglichkeit ist, Beweise aus der Vorlesung oder aus Lehrbüchern *besser* d.h. im Sinne des obigen Rezepts zu strukturieren. Die benötigten Ideen sind dann bereits vorgegeben und es gilt nur noch, die vielen Lücken zu schließen (aus Gründen der Zeit- bzw. Druckkostenersparnis werden nämlich oft nicht alle Aussagen solange verfolgt, bis man auf einen Satz, ein Axiom oder eine Definition stößt). Als elementare Verhaltensregel beim sorgfältigen Beweisen gilt:

Egal was Sie hinschreiben, geben Sie ***immer*** *eine sorgfältige Begründung an! Als sorgfältige Begründungen zählen nur sorgfältige Anwendungen von Sätzen bzw. Definitionen, oder sorgfältige Begründungen.*

Die Verhaltensregel ist natürlich wieder *rekursiv*. Letztlich kann eine sorgfältige Begründung also nur mit einem Verweis auf einen Satz oder eine Definition enden.

6.3.1. Ein einfaches Beispiel. Dieses Beispiel ist während eines Gesprächs mit einer Studentin entstanden. Zunächst unterhielten wir uns über die Beschreibung von Sachverhalten mit Quantoren. Auf die Frage, wie man streng monoton wachsende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ charakterisiert, kamen wir nach einigen Skizzen von Funktionsgraphen auf die Bedingung

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall y > x : f(y) > f(x). \tag{6.1}$$

Die in der Vorlesung angegebene Definition

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{6.2}$$

klingt zwar so ähnlich sieht aber formal anders aus. Ich forderte die Studentin auf, die Äquivalenz der beiden Bedingungen zu beweisen. Darauf erntete ich zunächst nur einen ungläubigen Blick und den Satz „Das ist doch klar“. Dies ist eine typische Situation für einen einfachen Beweis und damit eine optimale Trainingssituation Beachten Sie, dass Sie sich solche Aufgaben leicht selbst basteln können, indem Sie gegebene Aussagen nach *Ihrem* Geschmack und Verständnis umformulieren und dann die Frage stellen, ob Sie den Sinn bei der Umformulierung geändert haben oder nicht.

Wenden wir jetzt aber mal das rekursive Rezept an. Wir beginnen mit Punkt 6.1.1 und räumen zunächst einmal auf. Die Aussagen um die es hier geht sind zwar klar, aber nicht ganz in Standardform. Die Standardform einer Allquantor-Aussage ist nämlich $\forall m \in M : A(m)$. In der Aussage (6.1) fehlt beim zweiten $\forall$ offensichtlich die Menge M. Das ist leicht repariert mit einem Intervall

$$A: \quad \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x). \tag{6.3}$$

Die Aussage (6.2) ist ebenfalls nicht ganz sauber. Hier schreiben wir

$$B: \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{6.4}$$

Die zu beweisende Aussage ist also von der Form $A \Leftrightarrow B$. Nach Rezept 6.1.4 Punkt (2) ersetzen wir die Aussage durch zwei Teilaussagen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, die jeweils bewiesen werden müssen. Wir beginnen mit $A \Rightarrow B$. Da es sich bei der Aussage um eine Implikation handelt, sagt uns 6.1.4 Punkt (1), dass der Beweistext *Wir nehmen an, A ist wahr und zeigen B.* lautet. Jetzt schauen wir uns an, was sich genau hinter B verbirgt. Wir müssen ja wissen *was* wir zu zeigen haben. Gemäß (6.4) handelt es sich um eine Allquantor-Aussage so dass der nächste Beweistext durch 6.1.4 Teil (3) gegeben ist:

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir müssen zeigen, dass $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ wahr ist.

Im nächsten Rekursionsschritt ist also wieder eine Implikation zu zeigen, was mit 6.1.4 Punkt (1) zum Text *Wir nehmen an $x < y$ und zeigen $f(x) < f(y)$.* führt. Um schließlich die Aussage $f(x) < f(y)$ zu zeigen, greifen wir auf die Voraussetzung, d.h. auf die Aussage A zurück. Um diese anwenden zu können, sind aber zunächst einige kleine Vorbereitungen nötig.

Da A als wahr angenommen ist (siehe (6.3)), könnten wir die enthaltene Aussage $f(y) > f(x)$ benutzen, sofern wir in der Lage sind nachzuweisen, dass $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x, \infty)$ gilt. Was wissen wir über die von uns benutzten Größen x und y? Um diese Frage zu beantworten müssen Sie den bisherigen Beweistext lesen. Da steht sauber und ordentlich genau das, was wir über die relevanten Grössen wissen. In diesem Fall sind es zwei Aussagen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$.

Nach Definition von $\mathbb{R}^2$ folgt aus $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dass $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Außerdem folgt mit der Definition des Intervalls

$$(x, \infty) = \{u \in \mathbb{R} \,|\, x < u\}, \tag{6.5}$$

und den beiden Aussagen $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$, dass tatsächlich $y \in (x, \infty)$ gilt. Beachten Sie, dass zur Begründung der letzten beiden Aussagen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x, \infty)$ jeweils Definitionen zur sorgfältigen Begründung angegeben wurden.

Insgesamt sagt uns jetzt die Voraussetzung, dass wie gewünscht $f(x) < f(y)$ gilt, womit der erste Teil des Beweises beendet ist.

Wenden wir uns nun der Implikation $B \implies A$ zu. Die Beweiszeile lautet also gemäß 6.1.4 Punkt (1) *Wir nehmen an, B sei wahr und zeigen A.* Da A von der Form $\forall x \in \mathbb{R} : C(x)$ ist, führen wir mit 6.1.4 Punkt (3) den Beweis fort. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $C(x)$ wahr ist.* Ein Blick auf (6.3) verrät, dass $C(x)$ gleich der Aussage $\forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x)$ ist. Erneut greifen wir zu 6.1.4 Punkt (3) und schreiben *Sei $y \in (x, \infty)$. Wir müssen zeigen dass $f(y) > f(x)$ ist.* Zum Nachweis der Aussage $f(y) > f(x)$ juckt es natürlich in den Fingern, unsere Voraussetzung d.h. Aussage B anzuwenden. Gemäss der Definition (6.5) des Intervalls (x, ∞) impliziert die Aussage $y \in (x, \infty)$ dass $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$ ist. Ferner erkennen wir aus unserem bisherigen Beweis, dass $x \in \mathbb{R}$ gilt. Nach Definition von $\mathbb{R}^2$ folgt also $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit wissen wir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$, so dass die Voraussetzung B die Wahrheit der Aussage $f(x) < f(y)$ impliziert. Dies schließt den Beweis ab. Fassen wir alles ohne Gemurmel zusammen, so ergibt sich nach einigen sprachlichen Umstellungen folgender Beweistext.

Satz 6.2. *Die beiden Aussagen*

$$A : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x)$$

und

$$B : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

sind äquivalent

Beweis: Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, A ist wahr und zeigen, dass B wahr ist. Um B zu zeigen, sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir müssen zeigen, dass $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ wahr ist. Um $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ zu zeigen, nehmen wir an $x < y$ und zeigen $f(x) < f(y)$. Da nach Definition von $\mathbb{R}^2$ sowohl $x \in \mathbb{R}$ als auch $y \in \mathbb{R}$ gilt und nach Definition von (x, ∞) die Aussage $y \in (x, \infty)$ richtig ist, können wir die Voraussetzung benutzen und erhalten $f(x) < f(y)$.

Um $B \Rightarrow A$ zu zeigen, nehmen wir an, B ist wahr und zeigen, dass A wahr ist. Um A zu zeigen sei $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $\forall y \in (0,\infty) : f(y) > f(x)$ gilt. Sei dazu $y \in (0,\infty)$. Wir müssen zeigen, dass $f(y) > f(x)$ ist. Nach Definition des Intervalls (x,∞) ist aber $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Da auch nach Definition von $\mathbb{R}^2$ das Paar (x,y) in $\mathbb{R}^2$ liegt, folgt mit der Voraussetzung wie gewünscht $f(x) < f(y)$. ■

Diesen Beweis kann man natürlich deutlich straffen:

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x < y$. Dann gilt $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x,\infty)$ so dass mit A sofort $f(y) > f(x)$ folgt. Dies beweist die Aussage B.

Sei umgekehrt $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0,\infty)$. Dann ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$ so dass mit B die Aussage A folgt. ■

Vergleichen Sie einmal beide Beweise. Ein großer Teil der ausführlichen Variante besteht darin, klar zu machen, was überhaupt zu zeigen ist. In der kurzen Variante kommt dieser Teil nur bruchstückhaft vor. So ist z.B. die Passage *Sei* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *mit* $x < y$. eine Kurzfassung der Auflösung des Allquantors und der Implikation. Außerdem taucht in der Kurzfassung der Verweis auf die Definition von $\mathbb{R}^2$ und (x,∞) nicht auf. Streng genommen ist der kurze Beweis also nicht sorgfältig und nur für jemanden mit hinreichender Erfahrung wirklich unmittelbar zu verstehen.

6.3.2. Eine Klausuraufgabe. Auch wenn Sie den Hintergrund zum Symbol $\lim_{x\to a} f(x)$ also den *Grenzwert einer Funktion an einer Stelle* a (noch) nicht kennen, so ist es trotzdem lehrreich, den Beweis des folgenden Satzes zu lesen. Dort werden beim sorgfältigen Begründen alle benötigten Definitionen angegeben. Wichtiger ist aber zu beachten, wie das rekursive Auflösen der Definitionen funktioniert. Viel Spaß!

Satz 6.3. *Seien* $a, c \in \mathbb{R}$ *und* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$*, so dass* $|f(x) - c| < \varepsilon$ *falls* $|x - a| < \delta$ *gilt, so ist* $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

Zunächst bringen wir die Aussage in Quantorensprache, damit unser Rezept besser greifen kann. Wenn Sie diesen Schritt im Schlaf beherrschen, können Sie natürlich auch direkt mit dem Beweis loslegen. Die $\varepsilon - \delta$ Voraussetzung übersetzt sich so

$$A: \quad \forall \varepsilon \in (0,\infty) : \exists \delta \in (0,\infty) : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) : |f(x) - c| < \varepsilon$$

und die Behauptung ist

$$B: \quad \lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Die zu beweisende Aussage ist also von der Form $A \Rightarrow B$, so dass der Beweis mit *Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, A sei wahr und zeigen, dass B wahr ist.*

Wie im vorangegangenen Beispiel schauen wir uns zunächst genau an, was eigentlich zu beweisen ist, d.h. wir formulieren B per Rezept solange um, bis wir einen Zusammenhang zur Voraussetzung erkennen. Da $\lim_{x \to a}$ nur eine Abkürzung für ein ganzes Grenzwertgewitter ist, benutzen wir zunächst 6.1.2, um Klarheit zu schaffen. Die Definition sagt im Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \Longleftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$$

Arbeiten wir mit der aufgelösten Aussage weiter, so ergibt sich der Beweistext nach 6.1.4 Punkt (3). *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir zeigen*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

Mit 6.1.4 Punkt (1) geht es weiter: *Wir nehmen an* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ *und zeigen* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$. Die nun zu beweisende Aussage

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

ist wieder eine Abkürzung hinter der sich eine präzise Handlungsanweisung versteckt. Allgemein gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Wenden wir diese Definition im Spezialfall $a_n = f(x_n), b = c$ an, so müssen wir also zeigen, dass

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$$

gilt. Mit 6.1.4 Punkt (3) geht unser Beweis weiter mit den Worten *Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$$

Die neue Aussage ist also vom $\exists$-Typ und 6.1.4 Punkt (4) sagt uns, dass der Beweistext folgende Form hat: *Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$ gilt.*

An diesem Punkt ist die zu beweisende Aussage soweit aufgelöst, dass wir anfangen müssen zu denken, um weiterzukommen. Wieso sollte $f(x_n)$ nahe an c sein, wenn wir ein x_n mit großem Index n einsetzen?

Ein Blick auf die Voraussetzung liefert uns diesen Grund. Mit der Aussage A wissen wir nämlich, dass $f(x)$ nahe bei c ist, falls nur das Argument x nahe genug bei a ist. Etwas präziser müssen wir die Voraussetzung A wie einen Satz anwenden. Beim Anwenden von Sätzen befolgen

Sie bitte die folgende Regel: Schreiben Sie den Satz hin und ändern Sie dabei solche Variablennamen ab, die in der ursprünglichen Fassung (Skript, Buch, Erinnerung etc.) mit Variablennamen im laufenden Beweis zwar zufällig übereinstimmen, zwischen denen aber eigentlich gar kein Zusammenhang besteht. In unserem Fall ist die Aussage A z.B. mit einer Variable ε formuliert, aber in unserem Beweis kommt ε schon mit einer bestimmten Bedeutung vor (es ist ein positiver Toleranzwert, der für die Konvergenzüberprüfung von $f(x_n)$ benutzt wird). Wir schreiben deshalb A noch einmal auf und ändern dabei ε überall durch den unverbrauchten Namen μ ab:

$$\forall \mu \in (0, \infty) : \exists \delta \in (0, \infty) : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x) - c| < \mu.$$

Da diese Aussage nach unserer obigen Annahme wahr ist, gilt sie insbesondere auch für $\mu = \varepsilon$, da ε in unserem Beweis strikt positiv ist (siehe oben). Es gilt also

$$\exists \delta \in (0, \infty) : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x) - c| < \varepsilon$$

Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ ist, falls das Argument x nur nahe genug an a ist, d.h. falls $|x - a| < \delta$ gilt. Sind wir in unserem Beweis in einer solchen Situation, d.h. ist x_n nahe bei a wenn n genügend groß ist? Die Antwort kann nur unser bisheriger Beweistext liefern. Ein Blick nach oben zeigt alles war wir über x_n wissen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Um weiter zu kommen, lösen wir die lim-Definition auf, die ja etwas über das Annäherungsverhalten von x_n zu a aussagt. Um nicht in Konflikt mit bereits benutzter Notation zu geraten, schreiben wir uns vorsichtshalber die Definition noch einmal mit unverbrauchten Variablennamen auf

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall \eta \in (0, \infty) : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [M, \infty) : |x_n - \alpha| < \eta.$$

Für den speziellen Fall $\eta = \delta$ erhalten wir also ein $M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - \alpha| < \delta$ gilt falls $n > M$ ist.

Für solche Indizes gilt dann aber auch $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ nach Voraussetzung, so dass mit der Wahl $N = M$ ein geeigneter Wert gefunden ist. Damit ist der Beweis beendet. ■

Ohne das Zwischengemurmel und etwas umgestellt lautet er zusammengefasst.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, welche gegen a konvergiert. Es ist zu zeigen, dass dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c strebt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle

$x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existiert definitionsgemäß ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty)$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Dies impliziert aber $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. nach Definition gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. ∎

In dieser Form finden Sie den Beweis als Klausurmusterlösung. Wenn Sie die lange Fassung betrachten, merken Sie, wieviele kleine Schritte eigentlich in einem solchen Beweis stecken und wie dicht die kurze Fassung eigentlich ist. Nach ausreichend viel Übung werden Sie es schaffen, an alle kleinen Schritte zu denken und nur die wesentlichen Schritte hinzuschreiben (das sind die Schritte, die für den roten Faden der Argumentation entscheidend sind).

6.3.3. Noch eine Klausuraufgabe.

Satz 6.4. *Die Ableitung von $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass f auf (a, b) global Lipschitz-stetig ist.*

Wir beginnen mit 6.1.1 und führen die beiden Aussagen

A : f' ist beschränkt $\qquad$ B : f ist global Lipsschitz stetig

ein, so dass $A \Rightarrow B$ zu zeigen ist. Wie in den vorangegangenen Beispielen konkretisieren wir zunächst die Behauptung durch Auflösen der Definition der globalen Lipschitz-Stetigkeit.

$$B \quad \Leftrightarrow \quad \exists L \in (0, \infty) : \forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Hier wird ein wenig geschummelt, da die zweite Allquantor-Aussage nicht in der Standardform $\forall m \in M : A(m)$ vorliegt. Statt $\forall x, y \in (a, b)$ müssten wir streng $(a, b)^2 = (a, b) \times (a, b)$ für die Menge aller Zahlenpaare steht, deren beide Komponenten aus dem Intervall (a, b) stammen. Die abweichende Schreibweise $\forall x, y \in (a, b)$ drückt das Gleiche aus, benötigt aber drei Zeichen weniger beim Aufschreiben. Wir immer gilt: abkürzende Schreibweisen dürfen benutzt werden, wenn der schreibenden Person klar ist, wie die ausführliche Form aussieht - vorausgesetzt natürlich, dass der Sinn immer noch klar hervorgeht.

Nun aber weiter im Beweis gemäss 6.1.4 Punkt (4) schreiben wir: *Wir suchen ein $L > 0$, so dass*

$$\forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

gilt. Im Rezept steht nun: “um klarer zu sehen, wie L gewählt werden muss gehen Sie mit der Aussage

$$\forall x, y \in (a, b) : |f(x)x - f(y)| < L|x - y|$$

zurück zu Abschnitt 6.1.1. Dabei müssen Sie aber von nun an die Augen offen halten, ob ein solches L gefunden werden kann".

Machen wir also weiter. Mit 6.1.4 Punkt (3) schreiben wir

Seien x, y in (a, b). Wir müssen zeigen, dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

Jetzt sind wir endgültig an einem Punkt angekommen, wo der Denkprozess einsetzen muss und das Rezept nicht mehr weiterhilft (beachten Sie aber auch, dass das Rezept uns schon sehr dabei geholfen hat, das Problem auf den Punkt zu bringen). Was wissen wir über die Differenz $f(x) - f(y)$ die hier abgeschätzt werden muss? Eine Verbindung zur Ableitung f' und damit zur Voraussetzung liefert der Mittelwertsatz. In's Unreine liefert der Mittelwertsatz $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, so dass also $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\ |x - y|$. Die Voraussetzung A bedeutet nun aufgelöst

$$A \quad \Leftrightarrow \quad \exists K \in (0, \infty) : \forall x \in (a, b) : |f'(x)| \leq K$$

so dass $|f'(\xi)|$ durch K abgeschätzt werden kann. Mit $L = K$ hätten wir damit die Bedingung erfüllt und der Beweis wäre beendet. Aber halt! Ist der Mittelwertsatz überhaupt anwendbar? Das muss man sich sorgfältig ansehen. Schreiben wir uns dazu den Mittelwertsatz so auf, dass wir mit der bisher benutzten Notation nicht in Konflikt geraten. Er handelt von Funktionen $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $c < d$ die stetig auf $g : [c, d]$ und differenzierbar auf (c, d) sind und besagt, dass eine Stelle $\theta \in (c, d)$ existiert, so dass

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(\theta)$$

gilt. In unserem Fall sind $x, y \in (a, b)$ zwei Punkte für die uns der Zuwachs $f(x) - f(y)$ interessiert. Wir setzen also $d = \max\{x, y\}$ und $c = \min\{x, y\}$. Dann gilt sicherlich $c \leq d$ aber nicht unbedingt $c < d$, wie im Mittelwertsatz gefordert. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden. Ist $c = d$, so folgt $x = y$... Hätten Sie versucht, dies noch weiter zu begründen? Denken Sie daran, dass nur sorgfältige Begründungen erlaubt sind! Wir *beweisen* die Teilaussage durch Widerspruch. Nehmen wir also an $c = d$ und $x \neq y$. Dann gilt entweder (Axiom) $x < y$ oder $y < x$. Im ersten Fall

$$c = \min\{x, y\} = x < y = \max\{x, y\} = d$$

im Widerspruch zu $c = d$. Im zweiten Fall $y < x$ folgt genauso widersprüchlich $c < d$, so dass $x = y$ gelten muss.

Kommen wir zurück zur Hauptlinie des Beweises, so sehen wir, dass im bisher betrachteten Fall $x = y$ die Bedingung $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

für *jedes* $L \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, da $0 \leq L \cdot 0$ wahr ist. Der Fall $x = y$ liefert also keine Einschränkung an L.

Im zweiten Fall $x \neq y$ folgt aber $c < d$ (Beweis? Wie oben!) so dass eine der Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt ist. Setzten wir nun $g = f$ und beachten, dass f differenzierbar auf $[c, d]$ und deshalb insbesondere stetig ist (Satz aus der Vorlesung), so sind *alle* Voraussetzungen nachgeprüft. Wir dürfen somit die Aussage des Satzes verwenden, d.h. es gibt ein $\theta \in (c, d)$ mit

$$|f(d) - f(c)| = |f'(\theta)|\ |d - c|$$

Nach der Voraussetzung gilt nun $|f'(\theta)| \leq K$ so dass

$$|f(d) - f(c)| \leq K|d - c|$$

folgt. Schließlich bleiben zwei Fälle für die Zuordnung von x, y zu c, d. Ist $x < y$ so ist $c = x$ und $d = y$, also

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|.$$

Mit der Eigenschaft des Betrages $|-z| = |z|$ (Satz) folgt wie gefordert

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Im Fall $y < x$ ist $c = y$, $d = x$ und wir erhalten das gleiche Resultat. Insgesamt sehen wir, dass die Wahl $L = K$ die gewünschte Aussage zur Folge hat und damit ist der Beweis beendet. ■

In aufgeräumter Form sieht der Beweis so aus: Das Ziel ist zu zeigen, dass es ein $L > 0$ gibt so dass $\forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt. Seien dazu $x, y \in (a, b)$. Im Fall $x < y$ können wir den Mittelwertsatz anwenden und erhalten ein $\theta \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\theta)(y - x)$$

Da nach Voraussetzung die Ableitung beschränkt ist, existiert ein $K > 0$, so dass $|f'(\omega)| \leq |C$ für alle $\omega \in (a, b)$. Nach Mulitplikation mit -1 und Betrag ziehen folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Im Fall $y < x$ erhalten wir die gleiche Abschätzung mit analogen Argumenten. Im verbleibenden Fall $x = y$ ist die Abschätzung sowieso erfüllt. Wählen wir also $L = K$, so ist der Beweis vollständig. ■

In der Trainingsphase sollten Sie auf jeden Fall alle Beweise erst sehr sorgfältig führen. In der Endversion können Sie Details weglassen (so wie im obigen Beispiel), wenn Sie vorher eine sorgfältige Begründung gegeben haben.

6.3.4. Nachbereitung der Vorlesung. In der Vorlesung werden Beweise üblicherweise knapp präsentiert, so dass einerseits die Beweisidee deutlich wird und andererseits der Zeitaufwand gering bleibt. Mit ein wenig Übung können Sie solche Vorgaben rasch in die oben diskutierte sorgfältige Form bringen. Als Beispiel für so eine Nachbereitung betrachten wir folgendes Beispiel.

Lemma 6.5. *Cauchy Folgen sind beschränkt.*

Beweis: Sei (a_n) Cauchy Folge. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt, falls $n, m \geq N$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + \varepsilon\},$$

denn für $n \geq N$ mit $m = N$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|.$$

■

Diese Beweisskizze beinhaltet alle Ideen, aber schauen wir mal, ob er sorgfältig ist. Zunächst gehen wir zu 6.1.1 und formulieren die Aussage präzise:

$$A: \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist eine Cauchy Folge}$$
$$B: \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist beschränkt}$$

Die Aussage ist dann von der Form $A \Rightarrow B$. Nach Rezept beginnt der Beweis gemäss 6.1.4 Punkt (1) mit *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.* Sie sehen, der zweite Satz, der die Aufgabenstellung noch einmal präzisiert ist im kurzen Beweis unterdrückt worden.

Folgen wir weiter dem Rezept, so ist nun die Aussage B aufzulösen gemäß der Definition der Beschränktheit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist beschränkt} \quad \Rightarrow \quad \exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$$

Die Aufgabe des Beweises ist nach 6.1.4 Punkt (4) also *Wir suchen ein $K > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$ gilt.* Ein Blick auf die Beweisskizze zeigt, wie die Zahl K konstruiert wird. Offensichtlich geht hier die Voraussetzung A ein, die wir zunächst mit 6.1.2 behandeln

$$A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Da die rechte Seite für alle $\varepsilon > 0$ wahr ist, können wir sie insbesondere im Fall $\varepsilon = 1$ erneut hinschreiben. Beachten Sie, dass aus der Äquivalenz nun eine Implikation wird

$$A \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < 1.$$

Weiter sehen Sie im Kurzbeweis, dass $m = N$ gesetzt wird, d.h. wir spezialisieren weiter

$$A \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

Mit der Dreiecksungleichung (Satz) erkennen wir also

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

falls $n \geq N$. Die meisten Folgenglieder sind somit betragsmäßig durch die Zahl $K_1 = |a_N| + 1$ abgeschätzt. Für die endlich vielen übrigen Folgenglieder gilt

$$|a_n| \leq K_2 = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|\}, \qquad n \leq N - 1$$

Alle Folgenglieder sind also durch $K = \max\{K_1, K_2\}$ dominiert. Damit haben wir ein geeignetes K gefunden und der Beweis ist beendet. ■

Wenn Sie ganz penibel sind (das wäre toll) so würden Sie sich jetzt beschweren, dass die obige Begründung nicht sorgfältig ist, da in der Aussagenkette

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

nicht alle Schritte sorgfältig begründet, d.h. auf Satz, Axiom, oder Definition zurückgeführt wurden. Das stimmt. Es fehlen die Verweise auf Axiome (um $a_n = a_n - a_N + a_N$ zu begründen) und im Schritt $|a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ erneut der Verweis auf ein Axiom und die Aussage $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$. Sie sehen, sorgfältig sein ist sehr mühsam aber sehr lehrreich. Das Wichtige dabei ist, dass Sie ein scharfes Auge für fehlende Sorgfalt entwickeln und gleichzeitig Erfahrung und Wissen sammeln um unproblematische Sorglosigkeit (schnell behebbar) von problematischer Sorglosigkeit (komplizierte Argumentation fehlt) zu unterscheiden.

Jetzt sind aber endgültig Sie aber an der Reihe, die Beweise der Vorlesung durchzuackern und sorgfältig zu machen! Nur eigene Beschäftigung mit der Materie führt zum Lernerfolg. Und wenn Sie Ihre "Muskeln" mit vorgedachten Beweisen gestärkt haben, sind Sie in der Lage, selbst Aussagen zu formulieren und deren Wahrheit sorgfältig nachzuweisen …dann *machen Sie Mathematik.*

6.4. Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Bringen Sie (sich) in Form

Ein wichtiger Bestandteil der Mathematik ist es, wiederholt auftretende Muster und Konzepte als solche zu erkennen und, nach einem Abstraktionsprozess, ihre Essenz knapp und präzise zu beschreiben. Dies geschieht mit Symbolen in Definitionen (Beispiel: das Summensymbol). Umgekehrt ist die Anwendung von allgemeinen Ergebnissen (Sätzen) in konkreten Situationen nur dann möglich, wenn eine *Übersetzung* in geeignete abstrakte Konzepte möglich ist (Beispiel: die geometrische Summenformel). Bei diesen Übersetzungen ist es hilfreich, Namen zu vergeben, die den Zusammenhang zwischen konkreter Variante und abstrakter Form herstellen. Ist also das allgemeine Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

und kommt in einer konkreten Situation der Ausdruck $\sum_{m=n}^{k}(1-\frac{q}{x})^m$ vor, so stellt man den Zusammenhang durch geeignete Abkürzungen her. Die Summationsvariable ersetzt man z.B. durch $i = m-n$, so dass die untere Summationsgrenze wie gewünscht 0 und die obere $N = k-n$ ist. Weiter definiert man $a = 1 - q/x$ und erhält

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1-\frac{q}{x}\right)^m = \sum_{i=0}^{N} a^{i+n} = a^n \sum_{i=0}^{N} a^i$$

Nun ist die geometrische Summenformel verwendbar, falls $a \neq 1$ also $q/x \neq 0$

$$a^n \sum_{i=0}^{N} a^i = a^n \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

Am Ende vernichtet man die eingeführten Namen wieder, indem man rücksubstituiert

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1-\frac{q}{x}\right)^m = \frac{x}{q}\left(\left(1-\frac{q}{x}\right)^n - \left(1-\frac{q}{x}\right)^{k+1}\right).$$

Den Übersetzungsprozess *müssen* Sie beherrschen. Beachten Sie, dass die Erzeugung der gleichen *Form* nicht bedeutet, dass die Variablen identisch sein müssen, d.h. statt q kann a, b etc. stehen und statt k und n können i und N auftreten usw. Wichtig ist nur, dass die Struktur die gleiche ist. Hier ist die Übung dazu (die Aufgaben können Sie sich auch selbst basteln!) (1) Bringen Sie die Ausdrücke durch geeignete Abkürzungen auf Standardform $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) $\sum_{k=4}^{\infty} k a_k x^{k-1}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

c) $\sum_{x=1}^{\infty} x^n a^x$

(2) Nach dem Aussonderungsprinzip können Teilmengen einer Menge M gebildet werden, die aus allen Elementen $x \in M$ bestehen, für die eine bestimmte Aussage $A(x)$ wahr ist. Die Schreibweise für diese Menge ist $\{x \in M | A(x)\}$. Geben Sie in den folgenden Fällen eine ordentliche Version indem Sie jeweils M und A sinnvoll spezifizieren.

a) $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
b) $\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$

(3) Aussagen mit Quantoren haben die Standardform $\exists x \in M : A(x)$ bzw. $\forall x \in M : A(x)$, wobei M eine Menge und A eine Aussageform ist. Schreiben Sie folgende Aussagen um, so dass *alle* beteiligten Quantorenausdrücke in dieser Standardform auftreten.

a) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x > y$
b) $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

(4) Bei der Überprüfung von Stetigkeit oder Differenzierbarkeit können die Sätze über Vielfache, Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen angewendet werden, wenn die konkrete Funktion als Mischung aus Vielfachen, Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen geschrieben werden kann. Dazu muss man die Verknüpfungsstruktur genau erkennen und das macht man wieder durch das Einführen neuer Funktionsnamen. So ist etwa $f(x) = 4\sin(x - \cos(x))$ von der Form $f = \lambda F$ mit $F = \sin \circ g$, $g = h + k$ und $h(x) = x$, $k = (-1)\cos$. Zerlegen Sie folgende Ausdrücke in elementare Verknüpfungen.

a) $(5\exp(x) + x^2)/(\exp(3x) + x^4)$
b) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(3x + \exp(y))$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(5) Um Definitionen anwenden zu können, muss ein konkreter Ausdruck normalerweise durch Umbenennung in die passende Form gebracht werden. So kann z.B. das Label *konvergent* nur dann vergeben werden, wenn die Situation durch Einführung sinnvoller Namen mit der Form der Definition

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

zur Deckung gebracht werden kann. Statt ϵ, N, n, a_n, a können natürlich andere Buchstaben benutzt werden. Wichtig ist nur, dass die Form exakt gleich ist.

a) Bei gegebenem $\epsilon > 0$ gelte $|a_n + 1/n - a + 4| < 5\epsilon$ falls $n > 2/\epsilon$. Konvergiert hier was? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein, um die Definition anwenden zu können.

(6) Auch beim Anwenden von Sätzen muss erst durch Einführung von geeigneten Abkürzungen die spezielle Form in die allgemeine des Satzes überführt werden. Übrigens: je mehr Erfahrung Sie haben, desto schneller sehen Sie diese Übersetzung und schließlich geht das automatisch. Nur wenn es sehr verwirrend wird, muss man durch gute Abkürzungen wieder Klarheit schaffen. Als Beispiel wenden Sie bitte den Mittelwertsatz: *Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ so dass $(f(b) - f(a)/(b - a) = f'(\xi)$.* in der folgenden Situation an.

a) Sei $f : (a, b) \to (0, \infty)$ differenzierbar und seien $x, y \in (a, b)$. Was können Sie zum Ausdruck $1/f(x) - 1/f(y)$ sagen? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein (was entspricht a, b im Mittelwertsatz, was entspricht f im Mittelwertsatz etc.).

Aufgabe 6.2. Beweistraining - das Warum-Spiel

Einen **sorgfältigen** Beweis erkennen Sie daran, dass **jede** noch so unscheinbaren Teilaussage durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet ist. Dabei beinhaltet die Rückführung natürlich die Überprüfung aller Vorraussetzungen in den Sätzen und Definitionen.

Kontrollieren Sie Ihre eigenen Beweise auf Sorgfältigkeit, indem Sie **jeden** Teilschritt, **jede** Gleichung, **jede** Inklusion, usw. mit

Warum?

hinterfragen (in der Gruppe können Sie einen notorischen Warum-Frager auswählen). Wird nicht auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition oder eine Annahme verwiesen, hat Ihr Beweis eine Lücke, die gestopft werden muss.

Im Folgenden seien die Mengen D, E stets nicht leer und $f : D \to E$ sei eine Abbildung.

Definition 6.6. *Die Menge der Bilder zu $A \subset D$ ist definiert als $f(A) = \{y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$.*

- Verstanden? Überlegen Sie sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie die Mengen $f(\{1, 2, 3\})$, $f([0, 1])$ und $f((-2, \infty))$ an.

Definition 6.7. *Die Menge der Urbilder zu* $B \subset E$ *ist definiert als* $f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$.

- Verstanden? Geben Sie für die Funktion $x \mapsto \cos(2\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}((0,2))$ an.

Zum Umgang mit Mengen sei nochmal an folgende Definitionen erinnert (damit sie sorgfältig jeden Schritt in den folgenden Beweisen begründen können).

Definition 6.8. *Sei* M *eine Menge und für jedes* $x \in M$ *sei* $U(x)$ *eine Aussage. Dann gilt*

$$y \in \{x \in M \mid U(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad y \in M \text{ und } U(y) \text{ ist wahr.}$$

Definition 6.9. *Seien* A, B *zwei Mengen. Dann gilt*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \qquad A = B \Leftrightarrow A \subset B \ \wedge \ B \subset A$$
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \qquad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$$

- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $A \subset D$ gilt $A \subset f^{-1}(f(A))$. Gilt sogar die Gleichheit?
- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $B \subset E$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Gilt sogar die Gleichheit?
- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ und $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cup V) \subset f(U) \cup f(V)$ und $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Aufgabe 6.3. Maximum an Sorgfalt

Die hier betrachteten Aussagen sollen als weiteres Beispiel für *sorgfältiges* Beweisen dienen. Letztlich können und sollten Sie *alle* mathematischen Aussagen so bearbeiten, dass *jede* noch so unscheinbaren Teilaussage durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet wird (der Hinweis „Ist doch klar!“ ist *nicht* zulässig).

Definition 6.10. *Sei* $A \subset \mathbb{R}$ *eine endliche Teilmenge. Die Zahl* $M \in A$ *für die* $a \leq M$ *für alle* $a \in A$ *gilt, wird* $\max A$ *genannt. Die Zahl* $m \in A$ *für die* $m \leq a$ *für alle* $a \in A$ *gilt, wird* $\min A$ *genannt.*

Definition 6.11. *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Dann ist* $|a| = a$ *im Fall* $a \geq 0$ *und* $|a| = -a$ *im Fall* $a < 0$.

Beweisen Sie nun mit maximaler Sorgfalt folgende Aussagen für die Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(1) Ist $a \leq c$ und $b \leq d$, so ist $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}$.
(2) $\max\{a, b\} = a$ falls $a \geq b$ und $\max\{a, b\} = b$ falls $a < b$.
(3) $\max\{a, b\} = a + \max\{b - a, 0\}$.
(4) $\max\{c, 0\} = (c + |c|)/2$.
(5) $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$.
(6) $\max\{a + c, b + d\} \leq \max\{a, b\} + \max\{c, d\}$.

Literaturverzeichnis

[1] A. Beutelspacher, Lineare Algebra, Vieweg 2003.
[2] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Vieweg 2003.
[3] K. Jänich, Mathematik, Springer 2005.
[4] K. Jänich, Lineare Algebra, Springer 2004.
[5] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, Mathematisch denken, Oldenbourg 2006.
[6] D. Solow, How to read and do proofs, Wiley, 1990.
[7] D. J. Velleman, How to prove it - a structured approach, Cambridge Univ. Press 1994.
[8] E. Zeidler (Hrsg.), Teubner - Taschenbuch der Mathematik, Teubner 2003.