

# Script Kategorientheorie

Dr. Kerkhoff  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: Maximilian Marx

Sommersemester 2012

# Inhaltsverzeichnis

“Wenn Leute nicht glauben, dass Mathematik einfach ist, dann nur deshalb, weil sie nicht begreifen, wie kompliziert das Leben ist.”

(– John von Neumann)

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>2</b>
2.1	Kategorien . . . . .	2
2.2	Funktoren . . . . .	5
2.3	Natürliche Transformationen . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Erste abstrakte Konzepte</b>	<b>10</b>
3.1	Epis, Monos, Sektionen und Retraktionen . . . . .	10
3.2	Initiale und terminale Objekte . . . . .	13
3.3	Produkte . . . . .	14
3.4	Freie Objekte . . . . .	16
3.5	Äquivalenzen von Kategorien . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Hom-Funktoren und Yoneda</b>	<b>19</b>
4.1	Hom-Funktoren . . . . .	19
4.2	Verallgemeinerte Elemente . . . . .	21
4.3	Das Yoneda-Lemma . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Dualität</b>	<b>28</b>
<b>6</b>	<b>Cartesian Closed Categories</b>	<b>34</b>
6.1	Exponentialobjekte . . . . .	34
6.2	Cartesian Closed Categories (CCC) . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Limites</b>	<b>38</b>
7.1	Equalizer . . . . .	38
7.2	Pullbacks . . . . .	40
7.3	Limites . . . . .	43
7.4	Kolimites . . . . .	47

<b>8 Adjunktionen</b>	<b>48</b>
8.1 Definitionen . . . . .	48
8.2 Adjunktionen und freie Objekte . . . . .	53
8.3 Wann gibt es Adjunktionen? . . . . .	55



# 1 Einleitung

Auf Papier!

## 2 Grundbegriffe

### 2.1 Kategorien

#### 2.1 Definition (Kategorie)

Sei  $\mathcal{C}$  eine Klasse bestehend aus:

- einer Klasse von Objekten  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- einer Klasse  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  für jedes Paar von Objekten  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , genannt die Morphismen von  $\underline{X}$  nach  $\underline{Y}$ ,
- einer partiellen binären Operation  $\circ_{\mathcal{C}} =: \circ$ , genannt Komposition auf der Klassen aller Morphismen, so dass für alle  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  und  $v \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z})$  stets  $v \circ u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Z})$  gilt. Wir schreiben  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ , falls  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$ .

$\mathcal{C}$  ist eine Kategorie, wenn gilt:

1. Für alle  $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{A}, \underline{B} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit  $\underline{X} \neq \underline{A}$  oder  $\underline{Y} \neq \underline{B}$  gilt  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) \cap \mathcal{C}(\underline{A}, \underline{B}) = \emptyset$ ,
2. für jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existiert ein Morphismus  $\text{id}_{\underline{X}} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ , so dass  $\text{id}_{\underline{X}} \circ u = u$  und  $v \circ \text{id}_{\underline{X}} = v$  für alle  $\underline{Y}, \underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit  $u : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ ,  $v : \underline{X} \rightarrow \underline{A}$  gilt, und
3. für alle  $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{A}, \underline{B} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ,  $v : \underline{Y} \rightarrow \underline{A}$ ,  $w : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$  gilt:

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

(das heißt  $\circ$  ist assoziativ). □

#### 2.2 Notation

Statt  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  schreiben wir auch  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  und definieren

$$\text{dom}(u) := \underline{X} \quad (\text{Domain})$$

$$\text{cod}(u) := \underline{Y} \quad (\text{Codomain})$$

Intuition:  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  „geht von  $\underline{X}$  nach  $\underline{Y}$ “. □

#### 2.3 Definition

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt

- klein, wenn  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  und die Klasse aller Morphismen jeweils eine Menge sind, und

Diese Definition ist formal nicht "korrekt": Klassen können nach Definition keine echten Klassen enthalten; sowieso ist nicht klar, auf Grundlage welcher Axiomatisierung hier argumentiert wird

- lokal klein, wenn  $\mathcal{C}(X, Y)$  für alle  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge ist.

Fast alle üblichen Kategorien sind lokal klein.  $\square$

## 2.4 Beispiel

1.  $\text{Set}$ , die Kategorie der Mengen (lokal klein). Objekte: Alle Mengen, Morphismen: Alle Abbildungen, Komposition: Die übliche Hintereinanderausführung von Abbildungen.

2.  $\text{Top}$ , die Kategorie der topologischen Räume.

Eine Topologie auf einer Menge  $X$  ist ein Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$  mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,
- der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus  $\mathcal{T}$  liegt wieder in  $\mathcal{T}$ , und
- die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus  $\mathcal{T}$  liegt wieder in  $\mathcal{T}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen offene Mengen. Ist  $X$  Menge und  $\mathcal{T}$  Topologie auf  $X$ , dann ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

Seien  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  und  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topologische Räume.  $f: (X_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{T}_2)$  heißt stetig genau dann, wenn  $\forall U \in \mathcal{T}_2: f^{-1}[U] \in \mathcal{T}_1$  gilt, also genau dann, wenn jede offene Menge ein offenes Urbild hat.

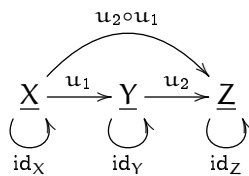
$\text{Top}$  hat alle topologischen Räume als Objekte, alle stetigen Funktionen als Morphismen und die übliche Komposition von Funktionen als Komposition.

3.  $\text{Met}$ , die Kategorie der metrischen Räume. Objekte: Alle metrischen Räume, Morphismen: alle stetigen Funktionen, Komposition: übliche Komposition von Funktionen.

4. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Die Produktkategorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  (klein beziehungsweise lokal klein, wenn  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  klein beziehungsweise lokal klein sind). Objekte:  $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \{(\underline{C}, \underline{D}); \underline{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \underline{D} \in \text{Ob}(\mathcal{D})\}$ , Morphismen:  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}((\underline{C}_1, \underline{D}_1), (\underline{C}_2, \underline{D}_2)) := \{(f, \varphi); f \in \mathcal{C}(\underline{C}_1, \underline{C}_2), \varphi \in \mathcal{D}(\underline{D}_1, \underline{D}_2)\}$ , Komposition:  $(f_1, \varphi_1) \circ (f_2, \varphi_2) := (f_1 \circ_{\mathcal{C}} f_2, \varphi_1 \circ_{\mathcal{D}} \varphi_2)$ .

5.  $\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}$ , die Kategorie einer partiell geordneten Menge  $\langle X, \leq \rangle$  (klein). Objekte: Elemente von  $X$ , ( $\text{Ob}(\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}) := X$ ). Morphismen:  $\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}(x_1, x_2) := \{(x_1, x_2)\} \cap \leq = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} & x_1 \leq x_2, \\ \{\} & \text{sonst} \end{cases}$ . Komposition:  $(x_2, x_3) \circ (x_1, x_2) := (x_1, x_3)$ .

6.  $\text{Ob}(\mathcal{C}) := \{X, Y, Z\}$ . Morphismen:



## 2 Grundbegriffe

Erweitert man die Komposition in natürlicher Weise auf die Identitätsmorphismen, so ist  $\mathcal{C}$  eine (kleine) Kategorie.  $\square$

### 2.5 Bemerkung

Die Objekte einer Kategorie müssen keine Mengen oder mathematische Strukturen sein. Sie können Objekte im abstrakten Sinne sein. Ebenso können Morphismen nichts weiter sein als Pfeile, von denen man nur weiß, wie sie mit anderen Pfeilen via Komposition in Verbindung stehen. Genau davon lebt die Kategorientheorie. Motto: Was zählt, sind die Morphismen!  $\square$

### 2.6 Definition (Isomorphismus)

Sei  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$ .  $u$  heißt Isomorphismus genau dann, wenn

$$\exists v : \underline{Y} \rightarrow \underline{X} : v \circ u = \text{id}_{\underline{X}} \text{ und} \\ u \circ v = \text{id}_{\underline{Y}} \text{ gilt.}$$

Da  $v$ , falls es existiert, eindeutig bestimmt ist (Übung), nennen wir ein solches  $v$  das Inverse von  $u$  und schreiben  $u^{-1}$ .  $\square$

### 2.7 Definition (Unterkategorie)

Eine Kategorie  $\mathcal{D}$  heißt Unterkategorie von  $\mathcal{C}$ , falls

1.  $\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
2.  $\mathcal{D}(\underline{X}, \underline{Y}) \subseteq \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,  
Für jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  ist  $\text{id}_{\underline{X}} \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{X})$  auch die Identität auf  $\underline{X}$  in  $\mathcal{D}$ , und
3. Die Komposition in  $\mathcal{D}$  ist die Einschränkung der Komposition aus  $\mathcal{C}$ .

Gilt sogar  $\mathcal{D}(\underline{X}, \underline{Y}) = \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ , dann nennt man  $\mathcal{D}$  eine volle Unterkategorie von  $\mathcal{C}$ .  $\square$

### 2.8 Beispiel

1. Die Kategorie  $\text{Set}_{\text{fin}}$  aller endlichen Mengen ist eine volle Unterkategorie von  $\text{Set}$ .
2. Ist  $\langle X, \leq \rangle$  ein Unter-Poset von  $\langle Y, \leq \rangle$ , so ist  $\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}$  eine volle Unterkategorie von  $\mathcal{C}_{\langle Y, \leq \rangle}$ .  $\square$

### 2.9 Definition (Skelett)

Ein Skelett von  $\mathcal{C}$  ist eine volle Unterkategorie  $\mathcal{D}$ , so dass

1.  $\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \exists \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \underline{X} \cong \underline{Y}$  (bis auf Isomorphie ist alles drin), und
2.  $\forall \underline{X}_1, \underline{X}_2 \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \underline{X}_1 \cong \underline{X}_2 \iff \underline{X}_1 = \underline{X}_2$  (keine isomorphen Kopien).  $\square$

Damit diese Aussage Inhalt gewinnt ist es nötig zu wissen, in welcher Axiomatisierung der Mengenlehre man hier argumentiert. In ZFC zum Beispiel ist alles eine Menge, und diese Bemerkung leer.



**2.10 Bemerkung**

Mit Auswahlaxiom: Jede Kategorie hat ein Skelett. □

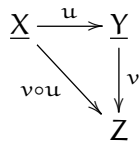
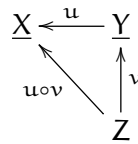
**2.11 Beispiel**

1. Ein Skelett von  $\text{Set}$  ist die Kategorie der Kardinalzahlen.
2. Das Skelett von  $\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}$  ist  $\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}$ . □

**2.12 Definition (Opposite-Kategorie)**

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Die opposite-Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) &:= \text{Ob}(\mathcal{C}), \\ \mathcal{C}^{\text{op}}(\underline{X}, \underline{Y}) &:= \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}), \text{ und,} \\ v \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} u &:= u \circ_{\mathcal{C}} v. \end{aligned}$$

Diagramm in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ Diagramm in  $\mathcal{C}$  □

Frage: Was hat  $\mathcal{C}$  genau mit  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  gemein? Was ist zum Beispiel  $\text{Set}^{\text{op}}$ ? Antwort in Kapitel 5.

**2.2 Funktoren**

Funktoren bringen (verschiedene) Kategorien miteinander in Verbindung. "Category theory is better understood as the theory of functors" (P. Freyd).

**2.13 Definition (Kovarianter Funktor)**

seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein kovarianter Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bildet jedes Objekt  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  auf ein Objekt  $F(\underline{X}) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  und jeden Morphismus  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  auf einen Morphismus  $F(u) \in \mathcal{D}(F(\underline{X}), F(\underline{Y}))$  ab, so dass

1.  $\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : F(\text{id}_{\underline{X}}) = \text{id}_{F(\underline{X})}$ , und
2.  $\forall u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}), v \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z}) : F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$  gilt.

Ein kontravarianter Funktor  $D: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bildet jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  auf ein  $D(\underline{X}) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  und jedes  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  auf ein  $D(u) \in \mathcal{D}(D(\underline{Y}), D(\underline{X}))$  ab, so dass

1.  $\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : D(\text{id}_{\underline{X}}) = \text{id}_{D(\underline{X})}$ , und

## 2 Grundbegriffe

2.  $\forall u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}), v \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z}) : D(v \circ u) = D(u) \circ D(v)$  gilt.

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{X} & \xrightarrow{u} & \underline{Y} & & F(\underline{X}) & \xrightarrow{F(u)} & F(\underline{Y}) & & D(\underline{X}) & \xleftarrow{D(u)} & D(\underline{Y}) & & \square \\
 & \searrow v \circ u & \downarrow v & & & \searrow F(v \circ u) & \downarrow F(v) & & & \searrow D(v \circ u) & \uparrow D(v) & & \\
 & & \underline{Z} & & & & F(\underline{Z}) & & & & D(\underline{Z}) & & 
 \end{array}$$

### 2.14 Bemerkung

Ein kontravarianter Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein kovarianter Funktor von  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  nach  $\mathcal{D}$  (und umgekehrt). □

### 2.15 Beispiel

1. Identitätsfunktork (kovariant):

$$\begin{aligned}
 \text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\
 \underline{X} &\mapsto \underline{X} \\
 u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) &\mapsto u
 \end{aligned}$$

2. Potenzmengenfunktork (kontravariant):

$$\begin{aligned}
 D : \text{Set} &\rightarrow \text{Set} \\
 A &\mapsto \mathfrak{P}(A) \\
 f : A \rightarrow B &\mapsto D(f) : \mathfrak{P}(B) \rightarrow \mathfrak{P}(A) : M \mapsto f^{-1}[M]
 \end{aligned}$$

3. Ein Vergissfunktork (kovariant):

$$\begin{aligned}
 V : \text{Met} &\rightarrow \text{Set} \\
 (X, d_X) &\mapsto X \\
 f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y) &\mapsto V(f) : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x)
 \end{aligned}$$

4. Sei  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  die Produktkategorie von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$ . Dann gibt es Projektionsfunktoren:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C} \\
 (\underline{C}, \underline{D}) &\mapsto \underline{C} \\
 (f, \varphi) &\mapsto f \\
 \pi_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\
 (\underline{C}, \underline{D}) &\mapsto \underline{D} \\
 (f, \varphi) &\mapsto \varphi
 \end{aligned}$$

□

**2.16 Bemerkung**

Aus der Definition eines Funktors folgt direkt, dass das Bild eines Funktors  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Unterkategorie von  $\mathcal{D}$  formt.  $\square$

Funktoren sind Morphismen in der Kategorie aller kleinen Kategorien:

**2.17 Beispiel**

Sei  $\mathcal{Cat}$  die Kategorie bestehend aus allen kleinen Kategorien als Objekten und allen (kovarianten) Funktoren als Morphismen. Sie heißt die Kategorie der (kleinen) Kategorien.  $\square$

**2.18 Definition (Treuer, voller, wesentlich surjektiver Funktor)**

Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein kovarianter Funktor.  $F$  heißt *treu* genau dann, wenn  $F$  für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  die Klasse  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  injektiv auf  $\mathcal{D}(F(\underline{X}), F(\underline{Y}))$  abbildet.

$F$  heißt *voll* genau dann, wenn  $F$  für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  die Klasse  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  surjektiv auf  $\mathcal{D}(F(\underline{X}), F(\underline{Y}))$  abbildet.

$F$  heißt *wesentlich surjektiv* genau dann, wenn es zu jedem Objekt  $\underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  ein Objekt  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit  $F(\underline{X}) \cong \underline{Z}$  gibt.  $\square$

Durch Bemerkung 2.14 sind dadurch die Begriffe voll, treu und wesentlich surjektiv auch für kontravariante Funktoren erklärt.

**2.19 Beispiel**

Von den Funktoren aus Beispiel 2.15 ist

1. der Identitätsfunktor voll, treu und wesentlich surjektiv,
2. der Potenzmengenfunktor ist nicht voll, treu und nicht wesentlich surjektiv,
3. der Vergissfunktor  $V : \mathcal{Met} \rightarrow \mathcal{Set}$  ist nicht voll, aber treu und wesentlich surjektiv, und
4. die Projektionsfunktoren  $\pi_1, \pi_2$  sind voll, (im Allgemeinen nicht) treu, und wesentlich surjektiv.  $\square$

**2.20 Bemerkung**

Ein treuer Funktor  $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$  ermöglicht es einem, sich

- die Objekte von  $\mathcal{C}$  als Mengen (möglicherweise mit zusätzlichen Strukturen darauf),
- die Morphismen als (strukturbewahrende) Funktionen zwischen diesen Mengen, und
- die Komposition als normale Verknüpfung dieser Funktionen vorzustellen.  $\square$

Dies ist die Idee hinter einer konkreten Kategorie:

## 2 Grundbegriffe

### 2.21 Definition (Konkrete Kategorie, konkretisierbare Kategorie)

Eine konkrete Kategorie ist ein Paar  $(\mathcal{C}, V)$ , wobei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $V : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  ein treuer Funktor ist. Gibt es zu einer Kategorie  $\mathcal{C}$  einen treuen Funktor nach  $\text{Set}$ , so heißt  $\mathcal{C}$  konkretisierbar.  $\square$

### 2.22 Beispiel

$\text{Met}$ , zusammen mit dem Vergissfunktor aus Beispiel 2.15, ist eine konkrete Kategorie.  $\square$

### 2.23 Bemerkung

In der Praxis wird der treue Funktor  $V$  oft ignoriert und eine Kategorie dann als konkret bezeichnet, wenn ihre Objekte tatsächlich Mengen (mit zusätzlicher Struktur) und ihre Morphismen (strukturbewahrende) Abbildungen sind. In diesem Sinne ist es gerechtfertigt, zum Beispiel  $\text{Set}$ ,  $\text{Met}$  oder  $\mathcal{T}\text{op}$  als konkret zu bezeichnen.  $\square$

## 2.3 Natürliche Transformationen

Natürliche Transformationen bringen (verschiedene) Funktoren miteinander in Verbindung.

### 2.24 Definition (Natürliche Transformation)

Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  kovariante Funktoren. Eine natürliche Transformation  $\tau$  von  $F$  nach  $G$ , geschrieben  $\tau : F \rightarrow G$  ist eine Familie von Morphismen  $(\tau_{\underline{X}} : F(\underline{X}) \rightarrow G(\underline{X}))_{\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ , die natürlich in  $\underline{X}$  ist, das heißt für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{X} & & F(\underline{X}) & \xrightarrow{\tau_{\underline{X}}} & G(\underline{X}) \\ \text{u} \downarrow & & F(\text{u}) \downarrow & & \downarrow G(\text{u}) \\ \underline{Y} & & F(\underline{Y}) & \xrightarrow{\tau_{\underline{Y}}} & G(\underline{Y}) \end{array}$$

Wir schreiben  $\text{Nat}(F, G) := \{\tau : F \rightarrow G; \tau \text{ natürliche Transformation}\}$  für die Klasse aller natürlichen Transformationen.  $\square$

“I didn’t invent categories to study functors, I invented them to study natural transformations.” (Saunders Mac Lane).

### 2.25 Definition (Natürlicher Isomorphismus)

Eine natürliche Transformation  $(\tau_{\underline{X}})_{\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  heißt natürlicher Isomorphismus (oder natürliche Äquivalenz), falls  $\tau_{\underline{X}}$  für jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

Damit können wir eine Äquivalenzbeziehung zwischen Funktoren definieren:

### 2.26 Definition (Äquivalenz von Funktoren)

Zwei Funktoren  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißen äquivalent, falls es zwischen ihnen einen natürlichen Isomorphismus  $\tau : F \rightarrow G$  gibt.

## 2.3 Natürliche Transformationen

$$\begin{array}{ccccc} \underline{X} & & F(\underline{X}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_X} \\ \xleftarrow{\tau_X^{-1}} \end{array} & G(\underline{X}) \\ \downarrow u & F(u) \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Y} & & F(\underline{Y}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_Y} \\ \xleftarrow{\tau_Y^{-1}} \end{array} & G(\underline{Y}) \end{array}$$

□

## 3 Erste abstrakte Konzepte

Die Idee der Kategorientheorie ist es, zu beobachten, wie Objekte und Morphismen miteinander agieren (anstatt ihre inneren Eigenschaften zu betrachten). Dieser Blickwinkel führt zu abstrakteren, aber auch allgemeineren und manchmal klareren Beschreibungen.

### 3.1 Epis, Monos, Sektionen und Retraktionen

#### 3.1 Definition

Sei  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  Morphismus (in  $\mathcal{C}$ ).  $u$  heißt

**Monomorphismus (kurz: Mono)** genau dann, wenn

$$\forall g_1, g_2 : \underline{Z} \rightarrow \underline{X} : u \circ g_1 = u \circ g_2 \implies g_1 = g_2 \text{ gilt,}$$

das heißt wenn  $u$  linkskürzbar ist,

**Epi**morphismus (kurz: Epi) genau dann, wenn

$$\forall g_1, g_2 : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z} : g_1 \circ u = g_2 \circ u \implies g_1 = g_2 \text{ gilt,}$$

das heißt wenn  $u$  rechtskürzbar ist. □

#### 3.2 Proposition

In  $\text{Set}$  gilt:

- $u$  ist Mono genau dann, wenn  $u$  injektiv ist,
- $u$  ist Epi genau dann, wenn  $u$  surjektiv ist, und
- $u$  ist Iso genau dann, wenn  $u$  bijektiv ist. □

BEWEIS (PROPOSITION 3.2)

Übung! ■

Achtung: Keine dieser Äquivalenzen gilt in jeder Kategorie (auch nicht in jeder konkreten Kategorie). Das ist auch gut so, denn oft kommt es nicht auf Injektivität oder Surjektivität an, sondern auf Kürzbarkeit.

**3.3 Beispiel**

1. Sei  $\mathcal{Mon}$  die Kategorie der Monoide (mit Monoid-Homomorphismen). Die Inklusionsabbildung

$$\iota : \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \rightarrow \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle : n \mapsto n$$

ist nicht surjektiv, aber

$$\begin{aligned} \forall \underline{M} \in \text{Ob}(\mathcal{Mon}), g_1, g_2 : \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle \rightarrow \underline{M} : \\ g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota \implies g_1|_{\mathbb{N}} = g_2|_{\mathbb{N}} \\ \implies g_1 = g_2, \end{aligned}$$

also ist  $\iota$  Epi.

Auf einem aus monoidaler Sicht entscheidendem Teil von  $\mathbb{Z}$  ist  $\iota$  surjektiv.

2. Seien  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{Top})$  Hausdorff-Räume (das heißt für beliebige Punkte  $p \neq q$  gibt es stets offene Mengen  $U_p, U_q$  mit  $p \in U_p, q \in U_q$  und  $U_p \cap U_q = \emptyset$ ).

Eine stetige Abbildung  $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  ist ein Epi genau dann, wenn  $f[X]$  dicht in  $Y$  liegt, das heißt wenn jede offene, nichtleere Teilmenge von  $Y$  Punkte aus  $f[X]$  enthält.  $\square$

Monos liefern uns die Definition eines Unterobjekts:

**3.4 Definition**

Ein Unterobjekt von  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist ein Mono  $m : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ .

Intuitiv beschreibt  $m$ , wo  $\underline{Y}$  in  $\underline{X}$  zu finden ist.  $\square$

**3.5 Beispiel**

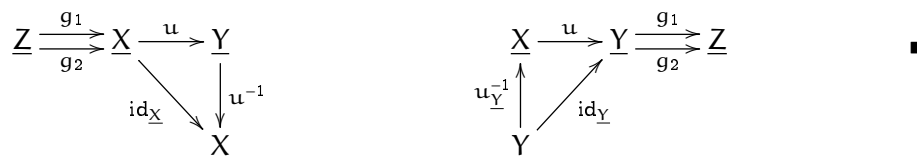
Sei  $\underline{X} \in \text{Ob}(\text{Set})$  und sei  $m : \{1, \dots, k\} \rightarrow \underline{X}$  ein Mono. Dann ist  $m[\{1, \dots, k\}]$  eine  $k$ -elementige Teilmenge von  $\underline{X}$ .  $\square$

**3.6 Proposition**

Ist  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  Iso, so ist  $u$  Mono und Epi.  $\square$

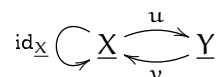
**BEWEIS**

Die folgenden Diagramme kommutieren:



**3.7 Definition (Retrakt)**

Seien  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .  $\underline{X}$  heißt Retrakt von  $\underline{Y}$  genau dann, wenn es  $u : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  und  $v : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  mit  $v \circ u = \text{id}_{\underline{X}}$  gibt:



### 3 Erste abstrakte Konzepte

$u$  heißt Sektion (von  $v$ ) und  $v$  Retraktion (von  $u$ ).

Intuitiv kann  $\underline{Y}$  auf  $\underline{X}$  zusammengeschrumpft werden. □

#### 3.8 Beispiel

In Set ist  $\underline{X}$  Retrakt von  $\underline{Y}$  genau dann, wenn  $|X| \leq |Y|$  ist. □

#### 3.9 Lemma

Sei  $u: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  Sektion von  $v: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  (beziehungsweise  $v$  Retraktion von  $u$ ). Dann ist  $u$  Mono und  $v$  Epi. □

BEWEIS

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{Z} & \xrightarrow{g_1} & \underline{X} & \xrightarrow{u} & \underline{Y} \\
 & \xrightarrow{g_2} & & \searrow \text{id}_{\underline{X}} & \downarrow v \\
 & & & & \underline{X} & \xrightarrow{g'_1} & \underline{Z}' \\
 & & & & & \xrightarrow{g'_2} & 
 \end{array}$$

Wann bewahren Funktoren diese Sorten von Morphismen? ■

#### 3.10 Lemma

Jeder kovariante Funktor bewahrt Isos, Sektionen und Retraktionen. Für einen treuen und vollen Funktor gilt außerdem:

- $u$  ist Iso genau dann, wenn  $F(u)$  Iso ist,
- $u$  ist Sektion genau dann, wenn  $F(u)$  Sektion ist, und
- $u$  ist Retraktion genau dann, wenn  $F(u)$  Retraktion ist.

Ist  $F$  außerdem wesentlich surjektiv, so gilt auch:

- $u$  ist Mono genau dann, wenn  $F(u)$  Mono ist, und
- $u$  ist Epi genau dann, wenn  $F(u)$  Epi ist. □

BEWEIS (LEMMA 3.10)

Sei  $u: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  und  $v: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  ein Linksinverses von  $u$ , das heißt  $v \circ u = \text{id}_{\underline{X}}$ . Also ist

$$F(v) \circ F(u) = F(v \circ u) = F(\text{id}_{\underline{X}}) = \text{id}_{F(\underline{X})},$$

also ist  $F(v)$  Linksinverses von  $F(u)$ . Analog bewahrt  $F$  Rechtsinverse. Damit bewahrt  $F$  auch Isos, Sektionen und Retraktionen. Sei nun  $F$  voll und treu und sei  $\varphi: F(\underline{Y}) \rightarrow F(\underline{X})$  Linksinverses von  $F(u)$ .



Dann gibt es  $v : \underline{Y} \rightarrow \underline{X} : F(v) = \varphi$ , weil  $F$  voll ist. Es gilt

$$F(\text{id}_{\underline{X}}) = \text{id}_{F(\underline{X})} = \varphi \circ F(u) = F(v) \circ F(u) = F(v \circ u), \text{ und}$$

damit  $\text{id}_{\underline{X}} = v \circ u$ , weil  $F$  treu ist. Also ist  $v$  Linksinverses von  $u$ . Analog für Rechtsinverse. Das beweist die ersten drei Äquivalenzen. Rest in Übung 1.2! ■

Mit anderen Worten: Für volle, treue, kovariante Funktoren sind  $u$  und  $F(u)$  stesst von gleicher Art.

### 3.11 Bemerkung

Da in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  alle Morphismen aus  $\mathcal{C}$  umgedreht sind, gilt:

- $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  Mono genau dann, wenn  $u \in \mathcal{C}^{\text{op}}(\underline{Y}, \underline{X})$  Epi ist,
- $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  Sektion genau dann, wenn  $u \in \mathcal{C}^{\text{op}}(\underline{Y}, \underline{X})$  Retraktion ist, und
- $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  Iso genau dann, wenn  $u \in \mathcal{C}^{\text{op}}(\underline{Y}, \underline{X})$  Iso ist. □

Erinnerung: Jeder kontravariante Funktor  $D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein kovarianter Funktor von  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ . Also folgt aus Lemma 3.10:

### 3.12 Lemma

*Jeder kontravariante Funktor bewahrt Isos, bildet Sektionen auf Retraktionen und Retraktionen auf Sektionen ab. Für einen vollen, treuen, kontravarianten Funktor  $D$  gilt außerdem:*

- $u$  ist Iso genau dann, wenn  $D(u)$  Iso ist,
- $u$  ist Sektion genau dann, wenn  $D(u)$  Retraktion ist, und
- $u$  ist Retraktion genau dann, wenn  $D(u)$  Sektion ist,

*Ist  $F$  außerdem wesentlich surjektiv, so gilt auch:*

- $u$  ist Mono genau dann, wenn  $D(u)$  Epi ist, und
- $u$  ist Epi genau dann, wenn  $D(u)$  Mono ist. □

In 5 werden wir das hinter diesem Lemma stehende Prinzip besser kennenlernen.

## 3.2 Initiale und terminale Objekte

### 3.13 Definition (Terminales Objekt, initiales Objekt)

$\underline{I} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist terminales Objekt genau dann, wenn

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \exists ! v : \underline{X} \rightarrow \underline{I} \text{ gilt.}$$

### 3 Erste abstrakte Konzepte

$\underline{I} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist initiales Objekt genau dann, wenn

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \exists ! v : \underline{I} \rightarrow \underline{X} \text{ gilt.} \quad \square$$

#### 3.14 Beispiel

1. In  $\text{Set}$  sind alle ein-elementigen Mengen terminal und die leere Menge initial, und
2. in  $\mathcal{C}_{(\mathcal{X}, \leq)}$  ist das größte Element terminal und das kleinste Element initial.  $\square$

#### 3.15 Lemma

*Terminale und initiale Objekte sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*  $\square$

BEWEIS (LEMMA 3.15)

Seien  $\underline{I}_1, \underline{I}_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  terminal. Dann gibt es genau ein  $u : \underline{I}_1 \rightarrow \underline{I}_2$  und genau ein  $v : \underline{I}_2 \rightarrow \underline{I}_1$ . Weil  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$  terminal sind, muss also

$$\begin{aligned} \text{id}_{\underline{I}_1} &= v \circ u, \\ \text{id}_{\underline{I}_2} &= u \circ v, \text{ also} \\ v &= u^{-1} \text{ Iso.} \end{aligned}$$

Also ist  $\underline{I}_1 \cong \underline{I}_2$ .

$$\text{id}_{\underline{I}_1} \curvearrowright \underline{I}_1 \begin{matrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{matrix} \underline{I}_2 \curvearrowleft \text{id}_{\underline{I}_2}$$

Analog beweist man die behauptung für initiale Objekte.  $\blacksquare$

#### 3.16 Bemerkung

Ganz typisch für Kategorientheorie ist, dass in der Definition von Objekten die Existenz eines eindeutig bestimmten Morphismus mit gewissen Eigenschaften gefordert wird. Daraus ergibt sich, dass das definierte Objekt bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.  $\square$

#### 3.17 Bemerkung

$\underline{X}$  ist initial in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn  $\underline{X}$  terminal in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist.  $\square$

## 3.3 Produkte

Wir kennen (möglicherweise):

- Produkte von Mengen,
- Produkte von topologischen Räumen,
- Produkte von Algebren,

unvoll  
kein  
(mehr);  
Produkte  
gen

- Produkte von Körpern, und
- Produkte von Vektorräumen.

Was haben diese Konzepte im Kern gemeinsam? Der Begriff des (allgemeinen) Produkts wurde 1950 von Saunders Mac Lane definiert.

“Mac Lane’s definition was revolutionary” (P. Freyd)

Der Produktbegriff ist ein erstes Beispiel dafür, dass die Kategorientheorie benutzt wurde, um ein fundamentales mathematisches Konzept zu beschreiben.

**3.18 Definition**

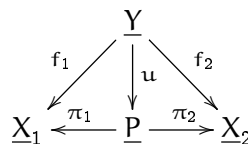
Sei  $I$  Indexmenge und  $(X_i)_{i \in I}$  Familie von Objekten in  $\mathcal{C}$ .  $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist ein Produkt von  $(X_i)_{i \in I}$ , wenn es eine Familie von sogenannten Projektionsmorphismen

$$(\pi_i : P \rightarrow X_i)_{i \in I}$$

gibt, so dass

$$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), (f_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I} : \exists! u : Y \rightarrow P : \pi_i \circ u = f_i \text{ für alle } i \in I \text{ gilt.}$$

Der Morphismus  $u$  heißt Tupling von  $(f_i)_{i \in I}$ .



□

**3.19 Notation**

Wir schreiben  $\prod_{i \in I} X_i$  für das Produkt von  $(X_i)_{i \in I}$  und  $X_1 \times \dots \times X_n$  für das Produkt von  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . In diesem Fall schreiben wir auch  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  für das Tupling von  $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ .

□

**3.20 Bemerkung**

Alle Produkte einer Familie  $(X_i)_{i \in I}$  sind, sofern existierend, zueinander isomorph (vergleiche Assignment 1). In der Praxis betrachtet man meistens ein bestimmtes Objekt als das Produkt von  $(X_i)_{i \in I}$ . In *Set* wird beispielsweise das Kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ (a(i))_{i \in I}; a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i, \forall i \in I : a(i) \in X_i \right\}$$

mit den Projektionsmorphismen

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j : (a(i))_{i \in I} \mapsto a(j)$$

als das Produkt bezeichnet (obwohl zum Beispiel auch  $\{1, 2, 3, 4\}$  ein Produkt von  $\{a, b\}$  und  $\{\alpha, \beta\}$  ist).

□

### 3 Erste abstrakte Konzepte

#### 3.21 Beispiel

1. Alles, was irgendwo im Studium als Produkt von mathematischen Strukturen auftaucht, ist (fast immer) ein Produkt in diesem Sinne.
2. Besonders interessant ist das Produkt in  $\mathcal{Top}$ : was ist  $\prod_{i \in I} X_i$  für eine Familie  $(X_i = (X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$  von topologischen Räumen? Trägermenge ist das kartesische Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$ , aber wie muss die Topologie gewählt werden? Topologen erkannten: Man muss die Topologie  $\mathcal{T}$  als kleinste Topologie wählen, so dass

$$\forall j \in I, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_j : \prod_{i \in I} Y_i \in \mathcal{T} \text{ mit } Y_i = \begin{cases} X_i, & i \neq j \\ \mathcal{U} & i = j \end{cases} \text{ gilt.}$$

Kategorientheorie liefert eine weitere Begründung, warum dies das richtige Produkt ist (vergleiche Übung 1.3).

3. In  $C_{(X, \leq)}$  ist das Produkt einer Familie  $(x_i)_{i \in I}$  das Infimum.
4. In  $\mathcal{Cat}$  ist das Produkt zweier (kleiner) Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  die Produktkategorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  (vergleiche Beispiel 2.4). Die beiden Projektionen sind die Projektionsfunktoren aus Beispiel 2.15.  $\square$

#### 3.22 Proposition

Terminale Objekte sind gerade die Produkte über leere Indexmengen.  $\square$

BEWEIS (PROPOSITION 3.22)

$\underline{P} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist Produkt von  $(X_i)_{i \in \emptyset}$  genau dann, wenn für alle  $\underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein eindeutig bestimmter Morphismus  $u : \underline{Y} \rightarrow \underline{P}$  existiert, also genau dann, wenn  $\underline{P}$  terminal ist.  $\blacksquare$

Genauer kann man sogar zeigen:

#### 3.23 Proposition

$\mathcal{C}$  hat endliche Produkte genau dann, wenn  $\mathcal{C}$  binäre Produkte und ein terminales Objekt hat.  $\square$

### 3.4 Freie Objekte

Sei  $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor.

#### 3.24 Definition (Freies Objekt)

Sei  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\underline{B} \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ ,  $\iota \in \mathcal{B}(\underline{B}, V(\underline{X}))$ .  $\underline{X}$  heißt frei über der Basis  $\underline{B}$  bezüglich  $\iota$  genau dann, wenn

$$\forall \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), u : \mathcal{B}(\underline{B}, V(\underline{Y})) \exists ! \tilde{u} \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) : u = V(\tilde{u}) \circ \iota \text{ gilt:}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{B} & \xrightarrow{\iota} & V(\underline{X}) & & \underline{X} \\
 & \searrow u & \downarrow V(\tilde{u}) & & \downarrow \tilde{u} \\
 & & V(\underline{Y}) & & \underline{Y}
 \end{array}$$

Intuitiv ist  $v(\underline{X})$  das „nächstgrößte“ Objekt von  $\underline{B}$  aus, dass Bild eines Objekts aus  $\underline{C}$  unter  $V$  ist. □

**3.25 Bemerkung**

In den meisten Fällen ist der Funktor  $V$  treu,  $\underline{B} = \text{Set}$  und  $\iota$  eine Einbettung. □

**3.26 Beispiel**

$\underline{B} = \text{Set}$ ,  $\underline{C} = \text{Group}$  (Kategorie der Gruppen),  $B \in \text{Ob}(\underline{B})$ ,  $B \subseteq X$ ,  $V : \underline{C} \rightarrow \text{Set}$  Vergiss-funktor,  $\iota : B \rightarrow V(X)$  Einbettung.  $\underline{X}$  ist frei über  $B$  bezüglich  $\iota$  genau dann, wenn  $\underline{X}$  die freie Gruppe über  $B$  ist. □

### 3.5 Äquivalenzen von Kategorien

Wann sind zwei Kategorien im Wesentlichen identisch?

**3.27 Definition (Äquivalenz)**

Seien  $\underline{C}, \underline{D}$  Kategorien und

- $F : \underline{C} \rightarrow \underline{D}, G : \underline{D} \rightarrow \underline{C}$  kovariante Funktoren, und
- $\epsilon : \text{id}_{\underline{C}} \rightarrow GF, \eta : \text{id}_{\underline{D}} \rightarrow FG$  natürliche Isomorphismen.

Dann heißt  $\langle F, G, \epsilon, \eta \rangle$  Äquivalenz zwischen  $\underline{C}, \underline{D}$ . Existiert eine Äquivalenz zwischen zwei Kategorien, so heißen die Kategorien äquivalent. □

Warum verdient diese Konstruktion den Namen „Äquivalenz“?

**3.28 Lemma**

Zwei Kategorien  $\underline{C}, \underline{D}$  sind genau dann äquivalent, wenn ein voller, treuer und wesentlich surjektiver, kovarianter Funktor  $F : \underline{C} \rightarrow \underline{D}$  existiert. □

BEWEIS (LEMMA 3.28)

Assignment 1. ■

**3.29 Bemerkung**

Ein voller, treuer und wesentlich surjektiver Funktor bewahrt alle Konzepte, die nicht zwischen isomorphen Objekten unterscheiden. □

**3.30 Definition (Evil)**

Eine Eigenschaft oder ein Konzept heißt evil, wenn sie nicht invariant unter Äquivalenz ist. □

### 3 Erste abstrakte Konzepte

#### 3.31 Bemerkung

Alle in diesem Kapitel eingeführten Konzepte sind kosher, das heißt nicht-evil.  $\square$

Äquivalente Kategorien sind bis auf Benennung und Anzahl isomorpher Kopien identisch.

#### 3.32 Definition (Kategorienisomorphie)

Zwei Kategorien heißen isomorph, falls es einen vollen, treuen und auf der Klasse der Objekte bijektiven Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  gibt.  $\square$

#### 3.33 Beispiel

1. Jede Kategorie ist äquivalent zu ihrem Skelett,
2.  $\mathcal{Met}$  ist äquivalent zu einer vollen Unterkategorie von  $\mathcal{Top}$ , und
3. die Kategorie aller Halbgruppen  $\langle H, + \rangle$  mit neutralem Element ist isomorph zur Kategorie aller Monoide  $\langle G, +, 0 \rangle$ .  $\square$

# 4 Hom-Funktoren und Yoneda

In diesem Kapitel sei  $\mathcal{C}$  stets eine lokal-kleine Kategorie.

## 4.1 Hom-Funktoren

### 4.1 Definition

Für  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  nennt man die Morphismenmenge  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  ein Hom-Set.

Für einen Morphismus  $\varphi \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z})$  definieren wir die Funktionen:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\underline{X}, \varphi) : \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) &\rightarrow \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Z}) \\ u &\mapsto \varphi \circ u, \text{ und} \\ \mathcal{C}(\varphi, \underline{X}) : \mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X}) &\rightarrow \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}) \\ u &\mapsto u \circ \varphi.\end{aligned}$$

□

### 4.2 Proposition

Für alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\underline{X}, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ \underline{Y} &\mapsto \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ \varphi \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z}) &\mapsto \mathcal{C}(\underline{X}, \varphi) \in \text{Set}(\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}), \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Z}))\end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor und

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(-, \underline{X}) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ \underline{Y} &\mapsto \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}) \\ \varphi \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z}) &\mapsto \mathcal{C}(\varphi, \underline{X}) \in \text{Set}(\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X}), \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}))\end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor.

□

BEWEIS (PROPOSITION 4.2)

Offenbar ist  $\mathcal{C}(\underline{X}, -)$  eine wohldefinierte Abbildung auf Objekten und Morphismen.

#### 4 Hom-Funktoren und Yoneda

Für  $\underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\underline{X}, \text{id}_{\underline{Y}}) : \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) &\rightarrow \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ u &\mapsto \underbrace{\text{id}_{\underline{Y}} \circ u}_{=u} \\ &= \text{id}_{\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})} \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\underline{X}, \varphi_2 \circ \varphi_1)(u) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ u \\ &= \varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ u) \\ &= \mathcal{C}(\underline{X}, \varphi_2)(\mathcal{C}(\underline{X}_1, \varphi_1)(u)) \\ &= (\mathcal{C}(\underline{X}, \varphi_2) \circ \mathcal{C}(\underline{X}, \varphi_1))(u). \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{C}(\underline{X}, -)$  ein Funktor. Analog zeigt man, dass auch  $\mathcal{C}(-, \underline{X})$  ein Funktor ist. ■

#### 4.3 Definition (Hom-Funktor, Punktfunktor)

Die Funktoren  $\mathcal{C}(\underline{X}, -)$  und  $\mathcal{C}(-, \underline{X})$  heißen Hom-Funktoren. Der kontravariante Hom-Funktor heißt auch Punktfunktor. □

#### 4.4 Definition (Darstellbarer Funktor)

Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  heißt darstellbar, wenn er äquivalent zu einem Hom-Funktor ist. □

Man kann die beiden Funktoren zusammen auch als sogenannten Bifunktor beschreiben:

#### 4.5 Definition

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt Bifunktor genau dann, wenn  $\mathcal{C}$  eine Produktkategorie (vergleiche Beispiel 2.15) ist. □

Intuitiv sind Bifunktoren Funktoren mit zwei Argumenten.

#### 4.6 Beispiel

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-_1, -_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ (\underline{X}, \underline{Y}) &\mapsto \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ \left( \underbrace{f}_{\in \mathcal{C}^{\text{op}}(\underline{Y}_1, \underline{Z}_1)}, \underbrace{\varphi}_{\in \mathcal{C}(\underline{Y}_2, \underline{Z}_2)} \right) &\mapsto \mathcal{C}(f, \varphi) : \mathcal{C}(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2) \\ u &\mapsto \varphi \circ u \circ f \end{aligned} \quad \square$$

#### 4.7 Bemerkung

Wählt man das erste beziehungsweise zweite Argument eines Bifunktors  $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$  fest, so ergibt sich ein Funktor  $F_1 : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$  beziehungsweise  $F_2 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}$ . □



## 4.2 Verallgemeinerte Elemente

Der Punktfunktor ermöglicht es uns, von Elementen eines Objekts zu sprechen:

### 4.8 Definition (Verallgemeinerte Elemente)

Die Elemente der Menge  $\mathcal{C}(\underline{I}, \underline{X})$  heißen  $\underline{I}$ -wertige Punkte von  $\underline{X}$ . Die Klasse

$$\text{El}(\underline{X}) := \bigcup_{\underline{I} \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{C}(\underline{I}, \underline{X})$$

heißt Klasse der (verallgemeinerten) Elemente von  $\underline{X}$ . □

### 4.9 Beispiel

In  $\text{Set}$  ist die Menge der  $\{1, \dots, n\}$ -wertigen Punkte von  $\underline{X} \in \text{Ob}(\text{Set})$  isomorph zu  $X^n$ . □

### 4.10 Bemerkung (Slice-Kategorie)

Die Elemente von  $\text{El}(\underline{X})$  formen die sogenannte Slice-Kategorie  $\mathcal{C}/\underline{X}$  (vergleiche Übung 2.2). □

### 4.11 Bemerkung

Der Begriff der verallgemeinerten Elemente erlaubt eine mengentheoretische Betrachtung von kategorientheoretischen Konzepten. Zum Beispiel:

1. Erinnerung:  $\varphi \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  ist Mono genau dann, wenn für alle  $\underline{I} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\underline{I}, \underline{X})$  aus  $\varphi \circ g_1 = \varphi \circ g_2$  stets  $g_1 = g_2$  folgt. Also:  $\varphi$  ist Mono genau dann, wenn  $\varphi$  auf jeder  $\underline{I}$ -wertigen Punktmenge injektiv agiert. Mit anderen Worten: ein Mono ist eine injektive Abbildung von  $\text{El}(\underline{X})$  nach  $\text{El}(\underline{Y})$ .
2. Auf ähnliche Weise kann der Begriff des Produkts auf die gewöhnliche mengentheoretische Definition zurückgeführt werden (vergleiche Übung 2.3). □

Ist  $\mathcal{C}$  eine kleine Kategorie, so ist die Klasse der (verallgemeinerten) Elemente von jedem  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge. Das erlaubt uns die folgende Konstruktion:

### 4.12 Theorem

*Sei  $\mathcal{C}$  eine kleine Kategorie. Dann ist der Funktor*

$$\begin{aligned} V : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ \underline{X} &\mapsto \text{El}(\underline{X}) \\ u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) &\mapsto V(u) : \text{El}(\underline{X}) \rightarrow \text{El}(\underline{Y}) : \varphi \mapsto u \circ \varphi \end{aligned}$$

*injektiv auf den Objekten und treu.* □

#### BEWEIS (THEOREM 4.12)

$V$  ist ein wohldefinierter Funktor. Offensichtlich ist  $V$  auf den Objekten und den Morphismen eine wohldefinierte Abbildung. Ebenfalls klar ist  $V(\text{id}_{\underline{X}}) = \text{id}_{V(\underline{X})}$ . Seien  $u \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$

#### 4 Hom-Funktoren und Yoneda

und  $v \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z})$ . Dann gilt für  $\varphi \in \text{El}(\underline{X})$ :

$$\begin{aligned} V(v \circ u)(\varphi) &= v \circ u \circ \varphi \\ &= v \circ (u \circ \varphi) \\ &= v \circ V(u)(\varphi) \\ &= V(v)(V(u)(\varphi)) \\ &= (V(v) \circ V(u))(\varphi). \end{aligned}$$

Also ist  $V$  ein Funktor.  $V$  ist injektiv auf den Objekten, denn:

$$\begin{aligned} \text{El}(\underline{X}) = \text{El}(\underline{Y}) &\implies \text{id}_{\underline{X}} \in \text{El}(\underline{X}) = \text{El}(\underline{Y}) \\ &\implies \underline{X} = \underline{Y}. \end{aligned}$$

$V$  ist treu: Seien  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} V(u_1) = V(u_2) &\implies V(u_1)(\text{id}_{\underline{X}}) = V(u_2)(\text{id}_{\underline{X}}) \\ &\implies u_1 \circ \text{id}_{\underline{X}} = u_2 \circ \text{id}_{\underline{X}} \\ &\implies u_1 = u_2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

#### 4.13 Bemerkung

Das Theorem verwendet die gleiche Idee wie der Satz von Cayley aus der Gruppentheorie. □

Es gilt insbesondere:

#### 4.14 Korollar

*Jede kleine Kategorie ist konkretisierbar.* □

Ist  $\mathcal{C}$  nicht klein, so funktioniert diese Konstruktion offenbar nicht. Allerdings gibt es immer noch eine (im Prinzip sogar analoge) Möglichkeit, eine enge Verbindung mit  $\text{Set}$  herzustellen.

### 4.3 Das Yoneda-Lemma

Das Yoneda-Lemma ist das meistbenutzte Ergebnis der Kategorientheorie. Die Idee ist, statt ganz  $\mathcal{C}$  (immer noch lokal-klein) zu betrachten, konzentrieren wir uns lieber auf einen bestimmten Teil der Kategorie aller kontravarianten Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\text{Set}$ . Der Vorteil dabei ist, dass  $\text{Set}$  gut bekannt ist und wir uns den Funktor von  $\mathcal{C}$  nach  $\text{Set}$  als Repräsentation von  $\mathcal{C}$  in  $\text{Set}$  vorstellen können.

#### 4.15 Definition (Einbettung)

Eine Einbettung ist ein voller und treuer Funktor, der injektiv auf den Objekten ist. □

**4.16 Definition (Funkorkategorie)**

Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{C}$  Kategorien. Die Funkorkategorie  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}$  ist wie folgt definiert:

**Objekte**  $\text{Ob}(\mathcal{V}^{\mathcal{C}}) := \{F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}; F \text{ kovarianter Funktor}\},$

**Morphismen**  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}(F, G) := \text{Nat}(F, G) := \{\tau : F \rightarrow G; \tau \text{ nat\u00fcrliche Transformation}\},$  und

**Komposition**  $\tau \circ \eta := (\tau_{\underline{X}} \circ \eta_{\underline{X}})_{\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, \quad H(\underline{X}) \xrightarrow{\eta_{\underline{X}}} F(\underline{X}) \xrightarrow{\tau_{\underline{X}}} G(\underline{X}).$  □

**4.17 Bemerkung**

Die Objekte von  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}$  sind alle kovarianten Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{V}$ . Die Kategorie aller kontravarianten Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{V}$  ist dann gerade die Funkorkategorie  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}^{op}}$ . □

**4.18 Definition (Presheaf)**

Die Elemente von  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}^{op}}$  hei\u00dfen  $\mathcal{V}$ -wertige Presheaves (Pr\u00e4-Garben) von  $\mathcal{C}$ . □

Jetzt betrachten wir *Set*-wertige Presheaves:

**4.19 Definition**

Der folgende Funktor  $y$  hei\u00dft Yoneda-Einbettung:

$$y : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

$$\underline{X} \mapsto \mathcal{C}(-, \underline{X})$$

$$\varphi : \underline{X} \rightarrow \underline{Y} \mapsto \left( \underbrace{\mathcal{C}(\underline{Z}, \varphi)}_{= \mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{Y}) : u \mapsto \varphi \circ u} \right)_{\underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

The diagram shows a triangle with vertices  $\underline{X}$ ,  $\underline{Y}$ , and  $\underline{Z}$ . A solid arrow  $\varphi$  points from  $\underline{X}$  to  $\underline{Y}$ . A solid arrow  $u$  points from  $\underline{X}$  to  $\underline{Z}$ . A dashed arrow  $\varphi \circ u$  points from  $\underline{Z}$  to  $\underline{Y}$ . A small arrow  $\mapsto$  points from the  $\varphi \circ u$  label to the  $\varphi$  label.

das hei\u00dft die Yoneda-Einbettung ist ein kovarianter Funktor, der jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  auf den Punktfunktor von  $\underline{X}$  (vergleiche Proposition 4.2) abbildet und jeden Morphismus  $\varphi : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  auf die nat\u00fcrliche Transformation  $(\mathcal{C}(\underline{Z}, \varphi))_{\underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ , die in  $\text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$  ein Morphismus vom Punktfunktor von  $\underline{X}$  zum Punktfunktor von  $\underline{Y}$  ist. □

Achtung: Noch ist nicht klar, ob  $y$  wirklich eine Einbettung ist (in Theorem 4.23 wird dieser Begriff gerechtfertigt).

Zun\u00e4chst zeigen wir die Injektivit\u00e4t:

**4.20 Proposition**

$$y(\underline{X}) = y(\underline{Y}) \iff \underline{X} = \underline{Y}$$
□

#### 4 Hom-Funktoren und Yoneda

BEWEIS (PROPOSITION 4.20)

$$\begin{aligned}
 \text{id}_{\underline{X}} \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{X}) &= (\mathbf{y}(\underline{X}))(\underline{X}) \\
 &= (\mathbf{y}(\underline{Y}))(\underline{X}) \\
 &= \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y}) \\
 &\implies \underline{Y} = \underline{X}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Der Rest ist schwieriger! Der Weg führt über das Yoneda-Lemma. Wir zeigen die Bijektivität durch die Existenz der Umkehrabbildung, die in diesem Lemma definiert wird.

#### 4.21 Lemma (Yoneda-Lemma)

Für jedes  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und jedes  $F \in \text{Ob}(\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}})$  existiert ein Isomorphismus

$$\psi_{\underline{X}, F} : \underbrace{\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{X}), F)}_{=\text{Nat}(\mathbf{y}(\underline{X}), F)} \rightarrow F(\underline{X}),$$

der wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
 (\tau : \mathbf{y}(\underline{X}) \rightarrow F) &\mapsto \tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}}) \in F(\underline{X}), \text{ also} \\
 \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{X}) = \mathbf{y}(\underline{X})(\underline{X}) &\xrightarrow{\tau_{\underline{X}}} F(\underline{X}).
 \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus  $\psi_{\underline{X}, F}$  ist sogar natürlich in  $\underline{X}$  und  $F$ , das heißt die folgenden Diagramme kommutieren für alle  $\varphi : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  beziehungsweise alle  $\eta : F \rightarrow G$  (mit  $F, G \in \text{Ob}(\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}})$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{X}), F) & \xrightarrow{\psi_{\underline{X}, F}} & F(\underline{X}) \\
 \uparrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\varphi), F) & & \uparrow F(\varphi) \\
 \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{Y}), F) & \xrightarrow{\psi_{\underline{Y}, F}} & F(\underline{Y})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{X}), F) & \xrightarrow{\psi_{\underline{X}, F}} & F(\underline{X}) \\
 \downarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{X}), \eta) & & \downarrow \eta_{\underline{X}} \\
 \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{y}(\underline{X}), G) & \xrightarrow{\psi_{\underline{X}, G}} & G(\underline{X})
 \end{array}
 \quad \square$$

BEWEIS (LEMMA 4.21)

Wir zeigen zunächst, dass  $\psi_{\underline{X}, F}$  ein Isomorphismus ist. Dazu suchen wir das Inverse von  $\psi_{\underline{X}, F}$  und definieren zunächst für  $a \in F(\underline{X}) \in \text{Ob}(\text{Set})$  die folgende natürliche Transformation:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_a : \mathbf{y}(\underline{X}) &\rightarrow F \\
 (\epsilon_a)_{\underline{Y}} : \underbrace{\mathbf{y}(\underline{X})(\underline{Y})}_{=\mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X})} &\rightarrow F(\underline{Y}) : u \mapsto (F(u))(a),
 \end{aligned}$$

$(\underline{Y} \xrightarrow{u} \underline{X}, F(\underline{X}) \xrightarrow{F(u)} F(\underline{Y}))$ , da  $F$  kontravariant ist).

Wir müssen zeigen, dass  $\epsilon_a$  wirklich eine natürliche Transformation ist, das heißt wir müssen die Kommutativität des folgenden Diagramms für alle  $\varphi : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}$  nachweisen.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X}) & \xrightarrow{(\epsilon_a)_{\underline{Z}}} & F(\underline{Z}) \\ \uparrow \mathcal{C}(\varphi, \underline{X}) & & \uparrow F(\varphi) \\ \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}) & \xrightarrow{(\epsilon_a)_{\underline{Y}}} & F(\underline{Y}) \end{array}$$

Beweis durch elementweises Nachrechnen:

$$\begin{array}{ccc} u \circ \varphi \dashv & \xrightarrow{\hspace{10em}} & (F(u \circ \varphi))(a) \\ \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X}) \xrightarrow{(\epsilon_a)_{\underline{Z}}} & F(\underline{Z}) & (F(\varphi) \circ F(u))(a) \\ \uparrow \mathcal{C}(\varphi, \underline{X}) & \uparrow F(\varphi) & \parallel \\ \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}) \xrightarrow{(\epsilon_a)_{\underline{Y}}} & F(\underline{Y}) & F(\varphi)(F(u)(a)) \\ \uparrow \epsilon & & \uparrow \\ u \dashv & \xrightarrow{\hspace{10em}} & (F(u))(a) \end{array}$$

Also ist jedes  $(\epsilon_a)$  eine natürliche Transformation und somit ist

$$\begin{aligned} \omega_{\underline{X}, F} : F(\underline{X}) &\rightarrow \text{Nat}(y(\underline{X}), F) = \text{Set}^{C^{op}}(y(\underline{X}), F) \\ a &\mapsto \epsilon_a \end{aligned}$$

eine Abbildung (also ein Morphismus in  $\text{Set}$ ). Wir zeigen, dass  $\omega_{\underline{X}, F}$  eine Umkehrabbildung zu  $\psi_{\underline{X}, F}$  ist.

Für  $a \in F(\underline{X})$  folgt

$$\begin{aligned} (\psi_{\underline{X}, F} \circ \omega_{\underline{X}, F})(a) &= \psi_{\underline{X}, F}(\epsilon_a) \\ &= (\epsilon_a)_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}}) \\ &= F(\text{id}_{\underline{X}})(a) \\ &= \text{id}_{F(\underline{X})}(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

#### 4 Hom-Funktoren und Yoneda

Für eine natürliche Transformation  $(\tau : y(\underline{X}) \rightarrow F) \in \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\underline{y}(\underline{X}), F)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} (\omega_{\underline{X}, F} \circ \psi_{\underline{X}, F})(\tau) &= \omega_{\underline{X}, F}(\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})) \\ &= \epsilon_{\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})} \\ &= ((\epsilon_{\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})})_{\underline{Y}})_{\underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= (\mathbf{u} \mapsto F(\mathbf{u})(\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})))_{\underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

Da  $\tau$  natürliche Transformation ist, kommutiert für jedes  $\mathbf{u} \in y(\underline{X})(\underline{Y}) = \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X})$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{X}) & \xrightarrow{\tau_{\underline{X}}} & F(\underline{X}) \\ \downarrow \mathcal{C}(\mathbf{u}, \underline{X}) & & \downarrow F(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{X}) & \xrightarrow{\tau_{\underline{Y}}} & F(\underline{Y}) \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \mapsto F(\mathbf{u})(\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})) &= (F(\mathbf{u}) \circ \tau_{\underline{X}})(\text{id}_{\underline{X}}) \\ &= (\tau_{\underline{Y}} \circ \mathcal{C}(\mathbf{u}, \underline{X}))(\text{id}_{\underline{X}}) \\ &= \tau_{\underline{Y}}(\text{id}_{\underline{X}} \circ \mathbf{u}) \\ &= \tau_{\underline{Y}}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Das heißt

$$(\epsilon_{\tau_{\underline{X}}(\text{id}_{\underline{X}})})_{\underline{Y}} = \tau_{\underline{Y}}, \text{ also } (\omega_{\underline{X}, F} \circ \psi_{\underline{X}, F})(\tau) = \tau.$$

Also ist  $\psi_{\underline{X}, F}^{-1} = \omega_{\underline{X}, F}$ . Die Natürlichkeit wird in Assignment 2 gezeigt. ■

#### 4.22 Bemerkung

Lemma 4.21 mit anderen Worten formuliert: Es existiert ein natürlicher Isomorphismus zwischen dem Bifunktor

$$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\underline{y}(-_1), (-_2)) : \mathcal{C} \times \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$$

und dem Bifunktor

$$\begin{aligned} (-_2)(-_1) : \mathcal{C} \times \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} &\rightarrow \text{Set} \\ (\underline{X}, F) &\mapsto F(\underline{X}). \end{aligned}$$

Die beiden Bifunktoren sind also äquivalent. □

#### 4.23 Theorem

Die Yoneda-Einbettung  $y : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$  ist voll und treu. □

BEWEIS (THEOREM 4.23)

Nach dem Beweis von Lemma 4.21 ist die Abbildung  $\omega_{\underline{X}, \underline{y}(\underline{Y})} : \underline{y}(\underline{Y})(\underline{X}) \rightarrow \text{Set}^{\text{cop}}(\underline{y}(\underline{X}), \underline{y}(\underline{Y}))$  für alle  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Isomorphismus. Für jedes  $\varphi \in \mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  und  $\underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  gelten per Definition:

$$\begin{aligned} (\omega_{\underline{X}, \underline{y}(\underline{Y})}(\varphi))_{\underline{Z}} &: \underbrace{\underline{y}(\underline{X})(\underline{Z})}_{=\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X})} \rightarrow \underbrace{\underline{y}(\underline{Y})(\underline{Z})}_{=\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{Y})} \\ &\quad \text{u} \mapsto \underline{y}(\underline{Y})(\text{u})(\varphi) \\ (\underline{y}(\varphi))_{\underline{Z}} &: \underbrace{\underline{y}(\underline{X})(\underline{Z})}_{=\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{X})} \rightarrow \underbrace{\underline{y}(\underline{Y})(\underline{Z})}_{=\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{Y})} \\ &\quad \text{u} \mapsto \varphi \circ \text{u} = \mathcal{C}(\underline{Z}, \varphi)(\text{u}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber auch

$$\begin{aligned} \underline{y}(\underline{Y})(\text{u})(\varphi) &= \mathcal{C}(\text{u}, \underline{Y})(\varphi) \\ &= \varphi \circ \text{u} \\ &= \mathcal{C}(\underline{Z}, \varphi)(\text{u}). \end{aligned}$$

Also bildet  $\underline{y}$  die Morphismenmenge  $\mathcal{C}(\underline{X}, \underline{Y})$  genau wie  $\omega_{\underline{X}, \underline{y}(\underline{Y})}$  ab, das heißt bijektiv auf die Morphismenmenge  $\text{Set}^{\text{cop}}(\underline{y}(\underline{X}), \underline{y}(\underline{Y}))$ . ■

#### 4.24 Korollar (Yoneda-Prinzip)

$$\underline{y}(\underline{X}) \cong \underline{y}(\underline{Y}) \iff \underline{X} \cong \underline{Y} \quad \square$$

BEWEIS (KOROLLAR 4.24)

Nach Theorem 4.23 ist  $\underline{y} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\text{cop}}$  voll und treu. Also folgt die Behauptung aus Lemma 3.10. ■

Das Yoneda-Prinzip wird sehr häufig angewendet, um zu zeigen, dass zwei Objekte isomorph sind (oft ist nämlich  $\underline{y}(\underline{X}) \cong \underline{y}(\underline{Y})$  einfacher zu zeigen also  $\underline{X} \cong \underline{Y}$ ). Im Laufe der Vorlesung werden wir noch einige Anwendungen sehen.

## 5 Dualität

“An important general theme that has manifestations in almost every area of mathematics” (Princeton Companion to Mathematics).

Zur Erinnerung:

- $\mathcal{C}^{\text{op}}$  entsteht aus  $\mathcal{C}$  durch Umdrehen der Pfeile. Betrachtet man eine kategorientheoretische Aussage  $\mathcal{A}$  (Definition, Satz, ...) in der Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  und interpretiert sie als Aussage in  $\mathcal{C}$ , so ist dies die zu  $\mathcal{A}$  duale (“opposite”) Aussage  $\mathcal{A}^{\text{op}}$ . Es gilt

$$\mathcal{A}^{\text{op}} \text{ in } \mathcal{C} : \iff \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{C}^{\text{op}}, \text{ speziell: } \mathcal{C} \models \mathcal{A}^{\text{op}} \iff \mathcal{C}^{\text{op}} \models \mathcal{A}$$

- Von einigen der kennengelernten Konzepte wissen wir bereits, dass sie ein entsprechendes Gegenstück in der opposite-Kategorie haben (vergleiche Bemerkung 3.11).

$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}^{\text{op}}$
Mono	Epi
Epi	Mono
Sektion	Retraktion
Terminales Objekt	Initiales Objekt
Iso	Iso

Insbesondere hat jede kategorientheoretische Konstruktion ein duales Gegenstück.

Beispiel: Was ist das Duale eines Produkts (Definition 3.18) und eines freien Objekts (Definition 3.24)?

### 5.1 Definition (Koprodukt)

$\underline{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist ein Koprodukt von  $(\underline{X}_i)_{i \in I}$ , wenn es eine Familie von sogenannten Injektionsmorphisamen

$$(\iota_i : \underline{X}_i \rightarrow \underline{C})_{i \in I}$$

gibt, so dass

$$\forall \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \forall (g_i : \underline{X}_i \rightarrow \underline{Y})_{i \in I} \quad \exists! u : \underline{C} \rightarrow \underline{Y} : u \circ \iota_i = g_i \text{ für alle } i \in I \text{ gilt.}$$

Der Morphismus  $u$  heißt Kotupling von  $(g_i)_{i \in I}$ .





### 5.2 Notation

Wir schreiben  $X_1 * \dots * X_n$  für das Koprodukt von  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  und  $[g_1, \dots, g_n]$  für das Kotupling von  $(g_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . □

### 5.3 Beispiel

Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen in  $\text{Set}$ . Die disjunkte Vereinigung

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \{(i, x); x \in X_i, i \in I\}$$

ist ein Koprodukt von  $(X_i)_{i \in I}$  mit Injektionsmorphismaen  $X_i \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i : x \mapsto (i, x)$  und Kotupling  $[g_1, \dots, g_n](i, x) = g_i(x)$ . □

Das kofreie Objekt wird in Übung 3.1 definiert.

Also:

$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}^{\text{op}}$
Koprodukt	Produkt
Produkt	Koprodukt
Freies Objekt	Kofreies Objekt

### Prinzip (Dualitätsprinzip)

Da sich jede kategorientheoretische Aussage dualisieren lässt (und weil die Axiome für eine Kategorie selbstdual sind, das heißt  $\mathcal{C}$  ist Kategorie genau dann, wenn  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  Kategorie ist), gilt das Dualitätsprinzip:

Eine kategorientheoretische Aussage gilt in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn ihre dualisierte Aussage in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  gilt:

$$\mathcal{C} \models \mathcal{A} \iff \mathcal{C}^{\text{op}} \models \mathcal{A}^{\text{op}}.$$

Inbesondere gelten auch  $\mathcal{C} \models \mathcal{A}^{\text{op}} \iff \mathcal{C}^{\text{op}} \models \mathcal{A}$  und  $(\mathcal{A}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{A}$ . □

Dieses Prinzip liefert uns immer zwei Ergebnisse zum Preis von einem. Zum Beispiel folgt sofort:

### 5.4 Proposition

Koprodukte sind, wenn sie existieren, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. □

## 5 Dualität

BEWEIS (PROPOSITION 5.4)

Jedes Produkt ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dual ist dann jedes Koproduct (als Duales zum Produkt) bis auf Isomorphie (als duales zu Isomorphie) eindeutig bestimmt. Genauer: In jeder Kategorie sind Produkte bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vergleiche Bemerkung 3.20). Also sind insbesondere auch in jeder opposite-Kategorie Produkte eindeutig bestimmt, damit sind in jeder Kategorie Koproducte eindeutig bestimmt. ■

Es besteht die Hoffnung, dass ein Problem aus  $\mathcal{C}$  vielleicht nach der Dualisierung in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  einfacher zu lösen ist. Allerdings ist  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  nur eine abstrakte Umkehrung von  $\mathcal{C}$  und daher nur schwer zu verstehen. Folglich kann man nicht erwarten, dass Probleme aus  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  einfacher werden.

Besser ist es, Probleme aus  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie zu übertragen, die äquivalent zu  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist. Dies ist die Idee hinter dualen Äquivalenzen:

### 5.5 Definition (Duale Äquivalenz)

Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{X}$  zwei Kategorien,

- $D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  und  $E : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$  zwei kontravariante Funktoren, und
- $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow ED$  und  $\eta : \text{id}_{\mathcal{X}} \rightarrow DE$  natürliche Isomorphismen.

Dann heißt das Quadrupel  $(D, E, \epsilon, \eta)$  duale Äquivalenz zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{X}$ .

Gibt es zwischen zwei Kategorien eine duale Äquivalenz, so heißen diese beiden Kategorien dual äquivalent. □

### 5.6 Bemerkung

$\mathcal{C}$  und  $\mathcal{X}$  sind dual äquivalent genau dann, wenn  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  und  $\mathcal{X}$  äquivalent sind. □

Mit dem Dualitätsprinzip erhalten wir aus Lemma 3.28 direkt:

### 5.7 Lemma

Zwei Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{X}$  sind genau dann dual äquivalent, wenn es einen treuen, vollen und wesentlich surjektiven kontravarianten Funktor  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  existiert. □

Da alle koscheren Eigenschaften von einer Äquivalenz bewahrt werden, gilt also: Eine Aussage (nicht evil) gilt in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn die dualisierte Aussage in  $\mathcal{X}$  gilt.

Man kann also  $\mathcal{X}$  betrachten, um Informationen über  $\mathcal{C}$  zu finden. Dieses Prinzip macht duale Äquivalenzen zu einem sehr mächtigen Werkzeug für die gesamte Mathematik! Ein Beispiel findet sich in Übung 3.2.

### 5.8 Beispiel (Ordnungstheorie)

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{X}, \leq)} \xleftrightarrow{\text{dual äquivalent}} \mathcal{C}_{\mathcal{X}, \geq},$$

klar, denn  $\mathcal{C}_{(\mathcal{X}, \leq)}^{\text{op}} = \mathcal{C}_{(\mathcal{X}, \geq)}$ . □

### 5.9 Beispiel (Stone-Dualität)

Boolesche Algebren mit Homomorphismen sind dual äquivalent zu Stone-Räumen mit stetigen Abbildungen.

Dabei ist  $(X, \mathcal{T})$  ein Stone-Raum genau dann, wenn  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter und total unzusammenhängender (das heißt jede offene Menge  $U \subseteq X$  mit  $|U| \geq 2$  kann in zwei offene Mengen zerlegt werden) Hausdorffraum ist.

Hintergründe zur Stone-Dualität gibt es auf der Webseite.

Es folgt:

- Die Kategorie der endlichen Booleschen Algebren ist dual äquivalent zu  $\text{Stone}_{\text{fin}} \cong \text{Set}_{\text{fin}}$  (durch Einschränkung auf den endlichen Teil). Hier kann als duale Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 D : \text{BoolAlg}_{\text{fin}} &\rightarrow \text{Set}_{\text{fin}} \\
 \underline{A} &\mapsto \mathfrak{At}(\underline{A}) \\
 f : \underline{A} \rightarrow \underline{B} &\mapsto D(f) : \mathfrak{At}(\underline{B}) \rightarrow \mathfrak{At}(\underline{A}) : x \mapsto \bigwedge f^{-1}[\uparrow x] \\
 E : \text{Set}_{\text{fin}} &\rightarrow \text{BoolAlg}_{\text{fin}} \\
 X &\mapsto \underline{\mathcal{P}ot}(X) := \langle \mathcal{P}ot(X), \emptyset, X, X \setminus (-), \cup, \cap \rangle \\
 f : X \rightarrow Y &\mapsto \underline{\mathcal{P}ot}(Y) \rightarrow \underline{\mathcal{P}ot}(X) : x \mapsto f^{-1}[x] \\
 \epsilon : \text{id}_{\text{BoolAlg}_{\text{fin}}} &\rightarrow ED \\
 \epsilon_{\underline{A}} : \underline{A} &\rightarrow ED(\underline{A}) \\
 a &\mapsto \{b \in \mathfrak{At}(\underline{A}); a \geq b\} \\
 \eta : \text{id}_{\text{Set}_{\text{fin}}} &\rightarrow DE = \text{id}_{\text{Set}_{\text{fin}}} \\
 \eta_X &:= \text{id}_X
 \end{aligned}$$

gewählt werden. Dabei ist  $\mathfrak{At}(\underline{A})$  die Menge der Atome von  $\underline{A}$  und  $\uparrow x := \{b \in B; b \geq x\}$ .

- Aus der Dualität folgt auch der bekannte Satz, dass jede Boolesche Algebra isomorph zu einer Unter algebra einer Potenzmengen algebra ist.  $\square$

### 5.10 Beispiel (Priestley-Dualität)

Distributive Verbände mit Homomorphismen sind dual äquivalent zu beschränkten Priestley-Räumen mit stetigen Homomorphismen.

Dabei ist  $\langle X, 0, 1, \leq, \mathcal{T} \rangle$  ein beschränkter Priestley-Raum genau dann, wenn

- $(X, \mathcal{T})$  ein Stone-Raum und
- $\langle X, 0, 1, \leq \rangle$  ein beschränktes Poset ist, und
- es für alle  $x, y \in X$  mit  $x \not\leq y$  ein  $U \subseteq X$  gibt, das offen, abgeschlossen ("clopen") und aufsteigend (das heißt für  $x \in U$  und  $z \geq x$  folgt stets  $z \in U$ ) mit  $x \in U, y \notin U$  ist.

## 5 Dualität

Daraus folgt: Die Kategorie der endlichen distributiven Verbände ist dual äquivalent zur Kategorie endlicher, beschränkter Posets.  $\square$

### 5.11 Beispiel

Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Die Kategorie der endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorräume mit linearen Abbildungen ist dual äquivalent zu sich selbst.  $\square$

### 5.12 Beispiel (Gelfand-Dualität)

Kompakte (beziehungsweise lokalkompakte) Hausdorffräume mit stetigen Abbildungen sind dual äquivalent zu Kommutativen  $C^*$ -Algebren mit 1 (beziehungsweise ohne 1) mit Homomorphismen.

Details finden sich auf der Webseite.  $\square$

### 5.13 Beispiel (Pontrjagin-Dualität)

Kompakte, hausdorffsche topologische Gruppen mit stetigen Homomorphismen sind dual äquivalent zu abelschen Gruppen mit Homomorphismen.

Offenbar kann man leicht daraus folgern, dass lokalkompakte, abelsche topologische Gruppen mit stetigen Homomorphismen dual äquivalent zu sich selbst sind.

Details finden sich auf der Webseite.  $\square$

Alle diese Dualitäten (außer das triviale Beispiel Beispiel 5.8) entstehen nach dem gleichen Prinzip, dem „Prinzip der schizophrenen Objekte“:

1. Objekt finden, das in „kompatibler Weise“ (was das genau bedeutet, hängt von der jeweiligen Situation ab) in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{X}$  (oder einer Oberkategorie von ihnen) auftaucht und beide Male die gleiche Trägermenge hat. Dieses Paar von Objekten  $(\underline{M}, \overset{M}{\sim})$  heißt Paar von schizophrenen Objekten. Intuitiv ist dies ein Objekt mit zwei Gestalten.
2. Definiere  $D := \mathcal{C}(-, \underline{M})_{\mathcal{X}}$  und  $E := \mathcal{X}(-, \overset{M}{\sim})_{\mathcal{C}}$  ( $\mathcal{C}, \mathcal{X}$  lokal klein), wobei der Index jeweils bedeutet, dass auf den Homsets eine Struktur definiert werden muss, die es zu einem Objekt in  $\mathcal{X}$  beziehungsweise  $\mathcal{C}$  werden lassen (ergibt sich oft natürlich).
3. Definiere

$$\begin{aligned} \epsilon_{\underline{X}} : \underline{X} &\rightarrow ED(\underline{X}) \\ \underline{X} &\mapsto \epsilon_{\underline{X}} : D(\underline{X}) \rightarrow \overset{M}{\sim} : \alpha \mapsto \alpha(x) \\ \eta_{\underline{X}} : \underline{X} &\rightarrow DE(\underline{X}) \\ \underline{X} &\mapsto \eta_{\underline{X}} : E(\underline{X}) \rightarrow \underline{M} : \alpha \mapsto \alpha(x). \end{aligned}$$

Für unsere Beispiele bieten sich die folgenden schizophrenen Objekte an:

**Stone-Dualität**  $\underline{M} = \langle \{0, 1\}, 0, 1, \neg, \vee, \wedge \rangle$ ,  $\overset{M}{\sim} = \langle \{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}} \rangle$

**Priestley-Dualität**  $\underline{M} = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge \rangle$ ,  $\overset{M}{\sim} = \langle \{0, 1\}, \leq, \mathcal{T}_{\text{dis}} \rangle$

**Vektorraum-Dualität**  $\underline{M} = K$ ,  $\overset{M}{\sim} = K$

**Gelfand-Dualität**  $\underline{M} = \langle \underline{\mathbb{C}}, \mathcal{T}_d \rangle$ ,  $\overset{M}{\sim} = \langle \underline{\mathbb{C}}, +, \|\cdot\|, \cdot, (-)^* \rangle$

**Pontrjagin-Dualität**  $\underline{M} = \langle S^1, 1, \cdot, \mathcal{T}_d \rangle$ ,  $\overset{M}{\sim} = \langle S^1, 1, \cdot \rangle$  oder  $\overset{M}{\sim} = \langle S^1, 1, \cdot, \mathcal{T}_d \rangle$

Dabei ist  $\mathcal{T}_{\text{dis}}$  die diskrete Topologie, das heißt  $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathfrak{P}(\{0, 1\})$ ,  $(-)^* : \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}} : (x + iy)^* := x - iy$ ,  $S^1 := \{z \in \underline{\mathbb{C}}; |z| = 1\}$  (Einheitskreis), und  $\mathcal{T}_d$  die von der Betragsmetrik  $d(x, y) := |x - y|$  erzeugte Topologie.

#### 5.14 Bemerkung

Dualitäten zwischen zwei konkreten Kategorien  $(\mathcal{C}, \mathcal{U})$  und  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  müssen sogar nach diesem Prinzip konstruierbar sein, sofern sie existieren und  $\mathcal{U}$  sowie  $\mathcal{V}$  darstellbar sind. Dies trifft auf alle obigen Beispiele zu. □

# 6 Cartesian Closed Categories

## 6.1 Exponentialobjekte

Zwei Mengen  $X, Y$  formen den Funktionenraum  $Y^X := \{f; f : X \rightarrow Y\}$ , und es existiert die Auswertung

$$\begin{aligned} \text{ev} : Y^X \times X &\rightarrow Y \\ (f, x) &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

die ein Morphismus in  $\text{Set}$  ist.

Frage: Wie sieht diese Konstruktion kategoriell formuliert aus?  $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$  sorgt dafür, dass

$$|\text{Set}(Z \times X, Y)| = |\text{Set}(Z, Y^X)|$$

für alle  $Z \in \text{Ob}(\text{Set})$  gilt, denn für alle  $u : Z \times X \rightarrow Y$  gibt es ein eindeutiges  $\tilde{u} : Z \rightarrow Y^X$  mit  $u(z, x) \approx \text{ev}(\tilde{u}(z), x) = \tilde{u}(z)(x)$ , wobei  $\tilde{u}(z) : X \rightarrow Y : x \mapsto u(z, x)$  ist. Anders bedeutet dies  $\tilde{u}(z) = u(z, -)$ .

Kategoriell formuliert ergibt sich

$$\forall u : \underline{Z} \times \underline{X} \rightarrow \underline{Y} \exists! \tilde{u} : \underline{Z} \rightarrow Y^X : u = \text{ev} \circ \langle \tilde{u} \circ \pi_1, \text{id}_{\underline{X}} \circ \pi_2 \rangle, \text{ das heißt}$$

das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \underline{Y}^{\underline{X}} & & \underline{Y}^{\underline{X}} \times \underline{X} \xrightarrow{\text{ev}} \underline{Y} \\ \tilde{u} \uparrow & \langle \tilde{u}, \text{id}_{\underline{X}} \rangle \uparrow & \nearrow u \\ \underline{Z} & \underline{Z} \times \underline{X} & \end{array}$$

Also ist die kategorielle Verallgemeinerung des Funktionenraums:

### 6.1 Definition (Exponentialobjekt)

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit binären Produkten und  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Ein Exponentialobjekt ist ein Objekt  $\underline{Y}^{\underline{X}}$  zusammen mit einem Auswertungsmorphismus  $\text{ev} : \underline{Y}^{\underline{X}} \times \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ , so dass

$$\forall \underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), u : \underline{Z} \times \underline{X} \rightarrow \underline{Y} \exists! \tilde{u} : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}^{\underline{X}} : u = \text{ev} \circ \langle \tilde{u} \circ \pi_1, \text{id}_{\underline{X}} \circ \pi_2 \rangle.$$

Man sagt, dass  $\tilde{u}$  aus  $u$  durch Currying entsteht. □

**6.2 Bemerkung**

Existiert für  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  das Exponentialobjekt  $\underline{Y}^{\underline{X}}$ , so folgt also direkt

$$|\mathcal{C}(\underline{Z} \times \underline{X}, \underline{Y})| = |\mathcal{C}(\underline{Z}, \underline{Y}^{\underline{X}})|.$$

Wir werden später sehen, das sich diese Aussage noch verschärfen lässt.  $\square$

**6.3 Beispiel**

1.  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\text{Set})$ : Siehe oben.
2.  $\underline{X}, \underline{Y} \in \text{Ob}(\text{Top})$ : Man wählt

$$\underline{Y}^{\underline{X}} = (\text{Top}(\underline{X}, \underline{Y}), \mathcal{T}_{\underline{Y}^{\underline{X}}})$$

$$\text{ev} : (u, x) \mapsto u(x),$$

wobei  $\mathcal{T}_{\underline{Y}^{\underline{X}}}$  die sogenannte kompakt-offen-Topologie ist, das heißt die kleinste Topologie, die alle Mengen der Form  $V(K, U) := \{f \in \text{Top}(\underline{X}, \underline{Y}); f[K] \subseteq U\}$  mit  $K \subseteq X$  kompakt und  $U \in \mathcal{T}_{\underline{Y}}$  enthält.

Problem:  $\text{ev}$  ist nicht unbedingt stetig. Die Konstruktion klappt aber, wenn  $\underline{X}$  lokalkompakt und hausdorffsch ist.

3.  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\text{Cat})$ :  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  ist die Funktorenkategorie mit  $\text{ev} : (F, \underline{X}) \mapsto F(\underline{X})$ .  $\square$

Ein besonders wichtiges Beispiel:

**6.4 Beispiel**

Sei  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle})$ , wobei  $\langle X, \leq \rangle$  eine verbandsgeordnete Menge ist. Wir erinnern uns, dass  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{\langle X, \leq \rangle}(x_1, x_2)$  genau dann gilt, wenn  $x_1 \leq x_2$  ist. Damit kommutiert jedes Diagramm sowieso. Für  $y^x$  muss also nur gelten:

$$y^x \times x = y^x \wedge x \leq y, \text{ denn damit existiert dann ev.}$$

Wir benötigen weiterhin  $z \leq y^x$ , falls  $z \times x = z \wedge x \leq y$  ist (damit  $\tilde{u} : z \rightarrow y^x$  für alle  $u : z \times x \rightarrow y$  existiert).

Nun gilt aber:

$$(y^x \wedge x \leq y \ \& \ (\forall z \in X : z \wedge x \leq y \implies z \leq y^x)) \iff (\forall z \in X : z \wedge x \leq y \iff z \leq y^x).$$

Denn  $z \leq y^x$  impliziert  $z \wedge x \leq y^x \wedge x \leq y$ , und  $y^x \wedge x \leq y$  folgt unmittelbar aus  $y^x \leq y^x$  und der rechten Seite mit  $z := y^x$ .

Also ist  $y^x$  ein Exponentialobjekt genau dann, wenn  $\forall z \in X : z \wedge x \leq y \iff z \leq y^x$ . Erzwingt man diese Bedingung für alle  $x, y, z \in X$ , so erhält man den Begriff der Heyting-Algebra.  $\square$

## 6 Cartesian Closed Categories

### 6.5 Definition

Eine Heyting-Algebra  $\langle X, 0, 1, \vee, \wedge, \rightarrow \rangle$  ist ein beschränkter Verband  $\langle X, 0, 1, \vee, \wedge \rangle$  zusammen mit einer binären Operation  $\rightarrow$ , für die

$$\forall z \wedge x \leq y \iff z \leq (x \rightarrow y) \text{ gilt.} \quad \square$$

### 6.6 Bemerkung

Heyting-Algebren bilden die Grundlage für intuitionistische Logik.

Jede Boolesche Algebra induziert eine Heyting-Algebra durch  $(x \rightarrow y) := \neg x \vee y$ .  $\square$

## 6.2 Cartesian Closed Categories (CCC)

### 6.7 Definition (Cartesian Closed Category)

Eine kartesische abgeschlossene Kategorie (CCC) ist eine Kategorie, in der alle endlichen Produkte und alle Exponentialobjekte existieren.  $\square$

### 6.8 Beispiel

1. Set und Cat sind kartesisch abgeschlossen.
2. Top ist nicht kartesisch abgeschlossen, aber die Unterkategorie der lokalkompakten Hausdorffräume ist kartesisch abgeschlossen.
3. Für jedes zu einer Heyting-Algebra gehörende Poset  $\langle X, \leq \rangle$  ist  $C_{\langle X, \leq \rangle}$  kartesisch abgeschlossen.  $\square$

### 6.9 Proposition

Sei  $\mathcal{C}$  kartesisch abgeschlossen,  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (-)^{\underline{X}} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ \underline{Y} &\mapsto \underline{Y}^{\underline{X}} \\ \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{Y}, \underline{Z}) &\mapsto \underline{u}^{\underline{X}} := (\widetilde{\underline{u} \circ \text{ev}}) \end{aligned}$$

ein Funktor.  $\square$

BEWEIS (PROPOSITION 6.9)

Übung 4.1.  $\blacksquare$

Nun zur angekündigten Verschärfung von Bemerkung 6.2.

### 6.10 Proposition

Sei  $\mathcal{C}$  kartesisch abgeschlossen,  $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Dann gilt

$$(\underline{X}^{\underline{Y}})^{\underline{Z}} \cong \underline{X}^{(\underline{Y} \times \underline{Z})}. \quad \square$$



## 6.2 Cartesian Closed Categories (CCC)

BEWEIS (PROPOSITION 6.10)

Einfach durch Anwendung des Yoneda-Prinzips (Übung 4.2). ■

Wie schon das Beispiel der Heyting-Algebren vermuten lässt, sind kartesisch abgeschlossene Kategorien in der Logik besonders von Interesse.

# 7 Limite

Limite sind noch allgemeiner als die Konzepte in Kapitel 3. Um ihr Vorkommen richtig zu verstehen, betrachten wir zunächst Equalizer und Pullbacks.

## 7.1 Equalizer

### 7.1 Definition (Equalizer)

Seien  $f, g$  parallele Morphismen, das heißt  $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$  und  $\text{cod}(f) = \text{cod}(g)$ :

$$\underline{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \underline{Y}.$$

Ein Equalizer von  $(f, g)$  ist ein Objekt  $\underline{E}$  und ein Morphismus  $e : \underline{E} \rightarrow \underline{X}$ , so dass

$$f \circ e = g \circ e \text{ gilt}$$

und  $e$  bezüglich dieser Eigenschaft universell ist, das heißt für alle  $d : \underline{D} \rightarrow \underline{X}$  mit  $f \circ d = g \circ d$  gibt es einen eindeutigen Morphismus  $u : \underline{D} \rightarrow \underline{E}$  mit  $e \circ u = d$ :

$$\begin{array}{ccc} \underline{D} & \xrightarrow{e} & \underline{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \underline{Y} \\ \uparrow & \nearrow d & \\ \exists! u \downarrow & & \\ \underline{D} & & \end{array}$$

„Wie immer“ ist durch die Universalität von  $e$  das Objekt  $\underline{E}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. □

### 7.2 Beispiel

Sei  $\mathcal{C} = \text{Set}$  und  $f, g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ . Ein Equalizer von  $(f, g)$  ist die Menge  $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$  mit der Einbettung  $e : \{x \in X; f(x) = g(x)\} \hookrightarrow X : x \mapsto x$  (vergleiche Übung 5.1). □

Das Beispiel zeigt, dass Equalizer eine Verallgemeinerung von gleichungsdefinierten Mengen darstellen.

### 7.3 Proposition

Ist  $(\underline{E}, e)$  ein Equalizer von  $f, g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ , so ist  $e : \underline{E} \rightarrow \underline{X}$  ein Unterobjekt von  $\underline{X}$  (das heißt  $e$  ist ein Mono, vergleiche Definition 3.4). □

BEWEIS (PROPOSITION 7.3)

Seien  $\underline{D} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\varphi_1, \varphi_2 : \underline{D} \rightarrow \underline{E}$ , so dass  $e \circ \varphi_1 = e \circ \varphi_2$ . Wir zeigen jetzt  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{E} & \xrightarrow{e} & \underline{X} & \xrightarrow[f]{g} & \underline{Y} \\ \varphi_1 \uparrow & & \nearrow \varphi_2 & & \\ \underline{D} & & & & \end{array} \quad e \circ \varphi_1 = e \circ \varphi_2$$

Es gilt  $f \circ e \circ \varphi_1 = g \circ e \circ \varphi_2 = g \circ e \circ \varphi_1$ , also existiert ein eindeutig bestimmtes  $u : \underline{D} \rightarrow \underline{E}$ , so dass  $e \circ u = e \circ \varphi_1 = e \circ \varphi_2$ . Also ist  $u = \varphi_2 = \varphi_1$ . ■

Es gibt natürlich auch Koequalizer.

#### 7.4 Definition (Koequalizer)

Seien  $f, g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ . Ein Koequalizer von  $(f, g)$  ist ein Objekt  $\underline{Q}$  und ein Morphismus  $q : \underline{Y} \rightarrow \underline{Q}$ , so dass  $q \circ f = q \circ g$  und

$$\forall d : \underline{Y} \rightarrow \underline{D} : d \circ f = d \circ g \exists! u : \underline{Q} \rightarrow \underline{D} : u \circ q = d \text{ gilt.}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow[f]{g} & \underline{Y} & \xrightarrow{q} & \underline{Q} & \square \\ & & \searrow d & & \downarrow \exists! u \\ & & & & \underline{D} \end{array}$$

Mit dem Dualitätsprinzip folgt sofort:

#### 7.5 Proposition

Ist  $(\underline{Q}, q)$  ein Koequalizer, so ist  $q$  ein Epi. □

#### 7.6 Beispiel

Sei  $\mathcal{C} = \text{Set}$  und  $f, g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ . Sei  $\sigma$  die kleinste Äquivalenzrelation auf  $Y$ , so dass  $(f(x), g(x)) \in \sigma$  für alle  $x \in X$  gilt. Die Menge von Äquivalenzklassen

$$Y/\sigma := \{[y]_\sigma; y \in Y\}$$

ist zusammen mit dem natürlichen Homomorphismus

$$q : Y \rightarrow Y/\sigma : y \mapsto [y]_\sigma$$

ein Koequalizer (vergleiche Übung 5.1).

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass Koequalizer die Faktorisierung durch Äquivalenzrelationen verallgemeinern. □

## 7.2 Pullbacks

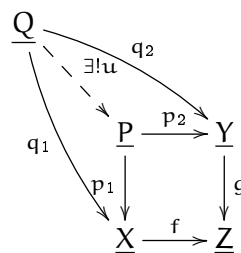
### 7.7 Definition (Span, Kospan)

Ein Span ist ein Paar von Morphismen  $f, g$  mit  $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ . Entsprechend ist ein Kospan ein Paar von Morphismen  $f, g$  mit  $\text{cod}(f) = \text{cod}(g)$ .  $\square$

### 7.8 Definition (Pullback)

Ein Pullback eines Kospanns  $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Z}, g : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$  ist ein Objekt  $\underline{P}$  mit einem Paar von Morphismen  $p_1 : \underline{P} \rightarrow \underline{X}, p_2 : \underline{P} \rightarrow \underline{Y}$ , so dass  $f \circ p_1 = g \circ p_2$  gilt und  $p_1, p_2$  diesbezüglich universell sind, das heißt

$$\forall q_1 : \underline{Q} \rightarrow \underline{X}, q_2 : \underline{Q} \rightarrow \underline{Y} : f \circ q_1 = g \circ q_2 \quad \exists! u : \underline{Q} \rightarrow \underline{P} : q_1 = u \circ p_1, q_2 = u \circ p_2 \text{ gilt.}$$



Natürlich ist  $\underline{Q}$  wieder bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.  $\square$

### 7.9 Beispiel

In  $\text{Set}$  ist das Pullback von zwei Morphismen  $\underline{X} \xrightarrow{f} \underline{Z} \xleftarrow{g} \underline{Y}$  durch die Menge

$$\{(x, y) \in X \times Y; f(x) = g(y)\}$$

und die Projektionsmorphismen  $p_1 : (x, y) \mapsto x, p_2 : (x, y) \mapsto y$  gegeben.  $\square$

Man kann bereits vermuten, dass es einen Zusammenhang zwischen Produkten, Equalizern und Pullbacks gibt.

### 7.10 Proposition

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  hat endliche Produkte und Equalizer genau dann, wenn  $\mathcal{C}$  Pullbacks und ein terminales Objekt hat.  $\square$

#### BEWEIS (PROPOSITION 7.10)

Hat  $\mathcal{C}$  endliche Produkte und Equalizer, dann hat  $\mathcal{C}$  auch ein terminales Objekt (als Produkt einer leeren Familie). Für Pullbacks betrachten wir einen Kospan  $\underline{X} \xrightarrow{f} \underline{Z} \xleftarrow{g} \underline{Y}$ . Da  $\mathcal{C}$  endliche (und insbesondere binäre) Produkte hat, gibt es ein  $\underline{X} \times \underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Also

erhalten wir das folgende (nicht unbedingt kommutative) Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} \times \underline{Y} & \xrightarrow{\pi_2} & \underline{Y} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ \underline{X} & \xrightarrow{f} & \underline{Z} \end{array}$$

Es gibt nun einen Equalizer von  $f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 : \underline{X} \times \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ . Sei  $(\underline{E}, e)$  dieser Equalizer. Wir setzen nun  $p_1 := \pi_1 \circ e, p_2 := \pi_2 \circ e$  und zeigen, dass  $(\underline{E}, p_1, p_2)$  ein Pullback ist.

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & & \\ \text{---} p_2 & \searrow e & \\ & \underline{X} \times \underline{Y} & \xrightarrow{\pi_2} \underline{Y} \\ \text{---} p_1 & \downarrow \pi_1 & \downarrow g \\ & \underline{X} & \xrightarrow{f} \underline{Z} \end{array}$$

Es gilt

$$f \circ p_1 = f \circ \pi_1 \circ e = g \circ \pi_2 \circ e = g \circ p_2.$$

Für die Universalitätseigenschaft sei  $\underline{D} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $q_1 : \underline{D} \rightarrow \underline{X}, q_2 : \underline{D} \rightarrow \underline{Y}$  mit  $f \circ q_1 = g \circ q_2$ . Aus

$$f \circ \pi_1 \circ \langle q_1, q_2 \rangle = g \circ \pi_2 \circ \langle q_1, q_2 \rangle$$

folgt mit der Universalitätseigenschaft des Equalizers  $e$  von  $(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$ :

$$\exists! u : \underline{D} \rightarrow \underline{E} : e \circ u = \langle q_1, q_2 \rangle.$$

Damit ist

$$p_1 \circ u = \pi_1 \circ e \circ u = \pi_1 \circ \langle q_1, q_2 \rangle = q_1$$

$$p_2 \circ u = \pi_2 \circ e \circ u = \pi_2 \circ \langle q_1, q_2 \rangle = q_2.$$

Zur Eindeutigkeit von  $u$  nehmen wir an, dass es ein  $u' : \underline{D} \rightarrow \underline{E}$  mit  $p_1 \circ u' = q_1$  und  $p_2 \circ u' = q_2$  gibt. Dann folgt  $\pi_1 \circ e \circ u' = q_1$  und  $\pi_2 \circ e \circ u' = q_2$  und wegen der Eindeutigkeit des Tuplings  $\langle q_1, q_2 \rangle$  folgt dann  $e \circ u' = \langle q_1, q_2 \rangle = e \circ u$ . Weil  $e$  Mono ist, folgt damit  $u = u'$ .

Für den restlichen Beweis siehe Assignment 3. ■

Wir veranschaulichen den ersten Teil des Beweises durch Rückblick auf Pullbacks in  $\text{Set}$ . Der Pullback

$$(\{(x, y) \in X \times Y; f(x) = g(y)\}, p_1 : (x, y) \mapsto x, p_2 : (x, y) \mapsto y)$$

## 7 Limites

des Kosplans  $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$  entstand aus dem Equalizer

$$(\{x, y\} \in X \times Y; f \circ \pi_1(x, y) = g \circ \pi_2(x, y)\}, e)$$

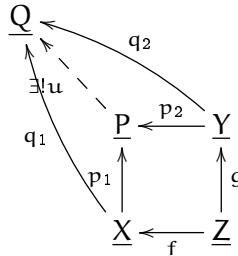
von  $(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$  durch Setzen von  $p_i := \pi_i \circ e$ .

Dualisierte Pullbacks heißen Pushouts.

### 7.11 Definition (Pushout)

Der Pushout eines Spans  $f : \underline{Z} \rightarrow \underline{X}$ ,  $g : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}$  ist ein Objekt  $\underline{P}$  mit einem Paar von Morphismen  $p_1 : \underline{X} \rightarrow \underline{P}$ ,  $p_2 : \underline{Y} \rightarrow \underline{P}$ , so dass  $p_1 \circ f = p_2 \circ g$  und  $p_1, p_2$  diesbezüglich universell sind.

$$\forall q_1 : \underline{X} \rightarrow \underline{Q}, q_2 : \underline{Y} \rightarrow \underline{Q} : q_1 \circ f = q_2 \circ g : \exists ! u : \underline{P} \rightarrow \underline{Q} : q_1 = u \circ p_1, q_2 = u \circ p_2$$



### 7.12 Beispiel

Sei  $\mathcal{C} = \text{Set}$ . Der Pushout eines Spans  $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  entsteht analog zu Beispiel 7.9 durch den Koequalizer  $(Q, q)$  von

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_1 \circ f} \\ \xrightarrow{\iota_2 \circ g} \end{array} X * Y$$

durch Setzen von  $p_i := q \circ \iota_i$ . Gemäß Beispiel 7.6 ist  $Q$  die Menge der Äquivalenzklassen  $(X * Y) / \sigma$  der von

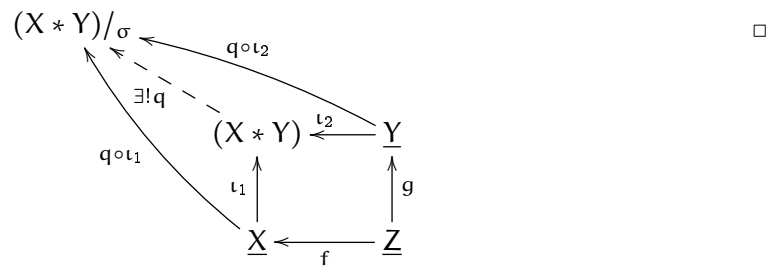
$$\{(\iota_1 \circ f(z), \iota_2 \circ g(z)); z \in Z\}$$

erzeugten Äquivalenzrelation  $\sigma$  und  $q$  der natürliche Homomorphismus

$$X * Y \rightarrow (X * Y) / \sigma, a \mapsto [a]_\sigma.$$

Also ist der Pushout von  $f, g$ :

$$((X * Y) / \sigma, p_1 : x \mapsto [1, x]_\sigma, p_2 : y \mapsto [2, y]_\sigma).$$



**7.13 Bemerkung**

Nach dem Dualitätsprinzip folgt aus Proposition 7.10, dass eine Kategorie genau dann Pushouts und ein initiales Objekt hat, wenn sie endliche Koprodukte und Koequalizer hat.

□

**7.3 Limites**

**7.14 Definition (Diagramm)**

Seien  $\mathcal{J}, \mathcal{C}$  Kategorien. Ein Diagramm vom Typ  $\mathcal{J}$  in  $\mathcal{C}$  ist ein kovarianter Funktor von  $\mathcal{J}$  nach  $\mathcal{C}$ . Die Kategorie  $\mathcal{J}$  wird dann Indexkategorie genannt.

□

**7.15 Bemerkung**

Formal ist jeder Funktor ein Diagramm. Die Bezeichnung wird aber nur dann benutzt, wenn es um das Bild des Funktors geht. Man beschreibt ein solches Diagramm meist, indem man dieses Bild (häufig ohne Berücksichtigung der Identitätsmorphisemen) beschreibt. Man sagt zum Beispiel „das Diagramm besteht aus zwei parallelen Morphismen“ oder nennt einen Span ein Diagramm. Dies rechtfertigt die bisherige Verwendung des Wortes Diagramm.

□

**7.16 Definition (Kleines Diagramm, endliches Diagramm)**

Ein Diagramm  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  heißt klein, falls  $\mathcal{J}$  klein ist und endlich, falls in  $\mathcal{J}$  nur endlich viele Morphismen existieren.

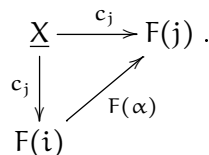
□

**7.17 Definition (Kegel)**

Sei  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Diagramm. Ein Kegel (Cone) von  $F$  besteht aus einem Objekt  $\underline{X}$  und einer Familie von Morphismen

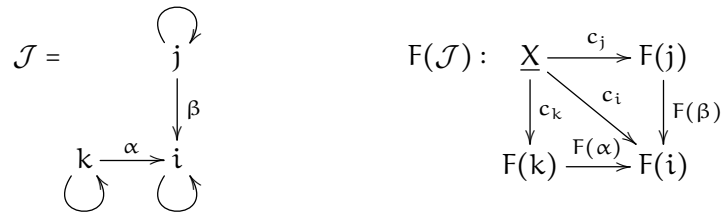
$$(c_j : \underline{X} \rightarrow F(j))_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})},$$

so dass für alle  $\alpha \in \mathcal{J}(i, j)$  das folgende Diagramm kommutiert:



## 7 Limites

Beispiel:



$$\begin{aligned} F(\alpha) \circ c_k &= c_i \\ F(\beta) \circ c_j &= c_i \\ \implies F(\alpha) \circ c_k &= F(\beta) \circ c_j. \end{aligned} \quad \square$$

### 7.18 Bemerkung

Alle Kegel formen zusammen mit sogenannten Kegelmorphismen eine Kategorie (vergleiche Übung 5.2). □

Ein Limes eines Diagramms  $F$  ist der Kegel, der so nah an dem Diagramm liegt, dass jeder andere Kegel durch ihn faktorisiert.

### 7.19 Definition (Limes)

Ein Limes eines Diagramms  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ , geschrieben  $\lim F$ , ist ein Kegel  $(\underline{X}, (c_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})})$  von  $F$ , so dass für alle Kegel  $(\underline{Y}, (d_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})})$  von  $F$  gilt:

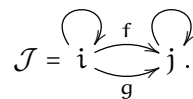
$$\exists! u : \underline{Y} \rightarrow \underline{X} : c_j \circ u = d_j \text{ für alle } j \in \text{Ob}(\mathcal{J}).$$

Limites verallgemeinern sehr viele Konzepte. □

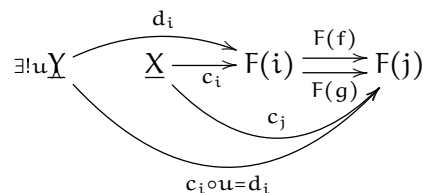
### 7.20 Beispiel

1. Sei  $\mathcal{J}$  die leere Kategorie,  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  der leere Funktor. Dann ist  $\underline{X} = \lim F$  genau dann, wenn  $\underline{X}$  terminal ist.

2. Sei



Dann ist



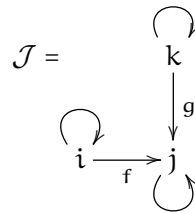


mit

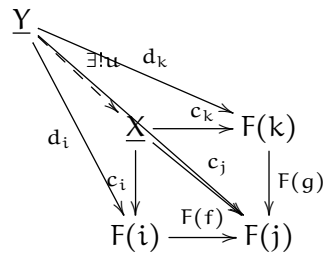
$$\begin{aligned} c_j &= F(f) \circ c_i \\ c_j &= F(g) \circ c_i \\ \implies F(f) \circ c_i &= F(g) \circ c_i. \end{aligned}$$

Dann ist  $(\underline{X}, c) = \lim F$  genau dann, wenn  $(\underline{X}, c_i)$  Equalizer von  $F(f)$  und  $F(g)$  ist.

3. Sei



Dann ist

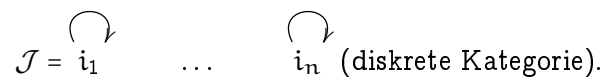


mit

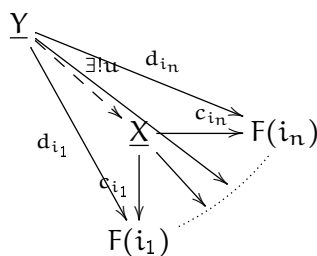
$$\begin{aligned} F(f) \circ c_i &= c_j \\ &= F(g) \circ c_k \\ c_k \circ u &= d_k \\ c_i \circ u &= d_i. \end{aligned}$$

Also ist  $(\underline{X}, c) = \lim F$  genau dann, wenn  $(\underline{X}, c_k)$  ein Pullback ist.

4. Sei



Dann ist



## 7 Limes

$$\forall l \in \{1, \dots, n\} : c_{i_n} \circ u = d_{i_n}$$

Dabei ist  $u$  das Tupling von  $(d_{i_l})_{l \in \{1, \dots, n\}}$ . Also ist  $(X, c) = \lim F$  genau dann, wenn  $X$  zusammen mit der Familie  $(c_{i_l})_{l \in \{1, \dots, n\}}$  das Produkt von  $(F(i_l))_{l \in \{1, \dots, n\}}$  ist.  $\square$

### 7.21 Bemerkung

Ein Limes ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel (vgl. Notation 5.2)  $\square$

In der Praxis interessiert man sich oft nur für sogenannte „kleine Limes“.

### 7.22 Definition (kleiner Limes)

Ein Limes von einem kleinen bzw. endlichen Diagramm heißt **klein** bzw. **endlich**.  $\square$

Insbesondere ist es interessant Kategorien zu betrachten, in denen alle kleinen Limes existieren.

### 7.23 Definition (vollständig)

(i)  $\mathcal{C}$  ist **vollständig**:  $\Leftrightarrow \lim F$  existiert für jedes kleine Diagramm  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ .

(ii)  $\mathcal{C}$  ist **endlich vollständig**:  $\Leftrightarrow \lim F$  existiert für jedes endliche Diagramm  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ .

In diesen Fällen sagt man auch  $\mathcal{C}$  hat **kleine/endliche Limes**.  $\square$

*Frage:* Wann ist eine Kategorie vollständig bzw. endlich vollständig?

### 7.24 Theorem

•  $\mathcal{C}$  ist vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{C}$  hat Equalizer und Produkte.

•  $\mathcal{C}$  ist endlich vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{C}$  hat Equalizer und endliche Produkte.  $\square$

#### BEWEIS

„ $\Rightarrow$ “: folgt in beiden Fällen aus den Beispielen unter Beispiel 7.20.

„ $\Leftarrow$ “:  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  kleines (bzw. endliches) Diagramm. Setze  $\mathcal{J}_0 = \text{Ob}(\mathcal{J})$  und bezeichne mit  $\mathcal{J}_1$  die (endliche) Menge (!) aller Morphismen aus  $\mathcal{J}$ . Sei nun

$$\prod_{j \in \mathcal{J}_0} F(j)$$

Produkt von  $(F(j))_{j \in \mathcal{J}_0}$  und

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{J}_1} \text{cod}(F(\alpha))$$

Produkt von  $(\text{cod}(F(\alpha)))_{\alpha \in \mathcal{J}_1}$ .

Sei  $\varphi$  das Tupling von  $(\pi_{\text{cod}(\alpha)})_{\alpha \in \mathcal{J}_1}$  und  $\psi$  Tupling von  $(F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom}(\alpha)})_{\alpha \in \mathcal{J}_1}$  wobei  $\pi_j$  den zum Index  $j$  gehörenden Projektionsmorphismus von  $\prod_{j \in \mathcal{J}_0} F(j)$  bezeichne.

$$\prod_{j \in \mathcal{J}_0} F(j) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \prod_{\alpha \in \mathcal{J}_1} \text{cod}(F(\alpha))$$

Nach Vor. gibt es einen Equalizer von  $(\varphi, \psi)$ :

$$\underline{E} \xrightarrow{e} \prod_{j \in \mathcal{J}_0} F(j) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \prod \text{cod}(F(\alpha))$$

Definiere:  $e_j := \pi_j \circ e$  für  $j \in \mathcal{J}_0$ . Man kann nun nachrechnen, dass  $\underline{E}$  mit  $(e_j)_{j \in \mathcal{J}_0}$  ein Limes von  $F$  ist. ■

### 7.25 Beispiel

$\text{Set}$  und  $\mathcal{T}_{\text{op}}$  sind vollständig  $\mathcal{C}_{(\underline{X}, \leq)}$  ist nicht unbedingt vollständig. □

### 7.26 Definition (bewahrt / stetig)

Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  kovarianter Funktor.  $F$  bewahrt Limes von  $\mathcal{J}$

$$:\Leftrightarrow \forall J: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C} : F(\lim J) \text{ ist Limes von } F \circ J: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$$

$F$  ist stetig

$$:\Leftrightarrow F \text{ bewahrt alle kleinen Limes}$$

□

### 7.27 Proposition

Jeder darstellbare kovariante Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  ist stetig □

BEWEIS

$F$  darstellbar  $\Rightarrow \exists \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : F \simeq C(\underline{X}, -)$  Es reicht zu zeigen  $C(\underline{X}, -)$  stetig. Nach Theorem 7.24 reicht es aus, zu zeigen dass  $C(\underline{X}, -)$  Equalizer und Produkte bewahrt. Das ist (relativ) leicht, denn Produkte und Equalizer in  $\text{Set}$  kennt man gut und man weiss wie  $C(\underline{X}, -)$  abbildet. ■

## 7.4 Kolimites

Natürlich gibt es auch Kokegel, Kolimites und kovollständige Kategorien. Für diese gelten alle Ergebnisse in dualisierter Form (ebenso wichtig).

# 8 Adjunktionen

... oder der Höhepunkt unserer Vorlesung.

“Adjointns are everywhere!” (S. Mac Lane)

“Adjointness is a concept of [...] mathematical importance that is not captured elsewhere in mathematic.” (S. Awodey)

## 8.1 Definitionen

In der Literatur findet man meistens eine von 2 Definitionen.

### 8.1 Definition (Hom-Set Def.)

Eine **Adjunktion**  $(F, V, \varphi)$  besteht aus 2 kovarianten Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  und einer Familie von Isomorphismen  $(\varphi_{\underline{A}, \underline{X}} : \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})))_{\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$  die natürlich in  $\underline{A}$  und  $\underline{X}$  ist, d.h. für  $v : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ ,  $g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})) \\ \mathcal{D}(F(v), \underline{X}), F(\underline{A} \rightarrow F(\underline{B})) \uparrow & & \uparrow \mathcal{C}(v, V\underline{X}) \\ \mathcal{D}(F(\underline{B}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{B}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{B}, V(\underline{X})) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})) & \square \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), g) \downarrow & & \mathcal{C}(\underline{A}, V(g)) \downarrow & \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{Y}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{Y}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{Y})) \end{array}$$

### 8.2 Bemerkung

Sind  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  lokal klein, so bedeutet diese Definition nicht anderes als Äquivalenz der Bifunktoren

$$\underbrace{\mathcal{D}(F(-), -)}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}} \simeq \underbrace{\mathcal{C}(-, V(-))}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}}$$

via des natürlichen Isomorphismus  $\varphi$ . □

### 8.3 Definition (Einheit-Koeinheit)

Eine **Adjunktion**  $(F, V, \epsilon, \eta)$  besteht aus 2 Funktoren

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad V : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$$

und 2 natürliche Transformationen

$$\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow VF \quad \text{Einheit}$$

$$\eta : FV \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}} \quad \text{Koeinheit}$$

so dass

$$\forall u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists! g : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} : u = V(g) \circ \epsilon_{\underline{A}}$$

die sogenannte Einheitseigenschaft. Analog gilt

$$\forall g : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} \exists! u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) : g = \eta_{\underline{X}} \circ F(u)$$

die sogenannte Koeinheitseigenschaft.

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{\epsilon_{\underline{A}}} & VF(\underline{A}) & & F(\underline{A}) \\ & \searrow u & \downarrow V(g) & & \downarrow \exists! g \\ & & V(\underline{X}) & & \underline{X} \end{array}$$

$$\underline{A} \xrightarrow{\exists! u} V(\underline{X}) \quad \square$$

$$\begin{array}{ccc} F(\underline{A}) & \xrightarrow{\quad} & FV(\underline{X}) \\ & \searrow g & \downarrow \eta_{\underline{X}} \\ & & \underline{X} \end{array}$$

Beide Definitionen vermitteln einen anderen Blick auf Adjunktionen. Sie sind jedoch gleichwertig.

### 8.4 Proposition

Seien

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{V} \end{array} \mathcal{D}$$

Funktoren. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Familie von Isos  $(\varphi_{\underline{A}, \underline{X}} : \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})))_{\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$
- (ii) Es existiert eine Einheit  $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow VF$
- (iii) Es existiert eine Koeinheit  $\eta : FV \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  □

## 8 Adjunktionen

BEWEIS (PROPOSITION 8.4)

Wir definieren die Familie  $(\epsilon_{\underline{A}} : \text{id}_{\mathcal{C}}(\underline{A}) \rightarrow \text{VF}(\underline{A}))_{\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{D} \\ V : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C} \\ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}} : \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) &\rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})) \\ \epsilon_{\underline{A}} &:= \varphi_{\underline{A}, F(\underline{A})}(\text{id}_{F(\underline{A})}). \end{aligned}$$

Wegen der Natürlichkeit von  $\varphi$  ist  $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{VF}$  natürliche Transformation. Um zu zeigen, dass  $\epsilon$  die Einheitseigenschaft erfüllt, betrachten wir zunächst für  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  das folgende (kommutierende) Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F(\underline{A}) & \xrightarrow{f} & \underline{X}_1 \\ & \searrow^{g \circ f} & \downarrow g \\ & & \underline{X}_2 \end{array}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, einen Morphismus der Form  $\underline{A} \rightarrow V(\underline{X}_2)$  zu konstruieren:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}_1}(f)} & V(\underline{X}_1) \\ & \searrow^{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}_2}(g \circ f)} & \downarrow V(g) \\ & & V(\underline{X}_2) \end{array} \quad (8.1)$$

Wir wollen zeigen, dass dieses Diagramm auch kommutiert. Da  $\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}$  natürlich in  $\underline{X}$  ist, kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}_1) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}_1}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X}_1)) \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(g)) \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}_2) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}_2}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X}_2)) \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\underline{A}, \underline{X}_2}(g \circ f) &= (\varphi_{\underline{A}, \underline{X}_2} \circ \mathcal{D}(F(\underline{A}), g))(f) \\ &= (\mathcal{C}(\underline{A}, V(g)) \circ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}_1})(f) \\ &= V(g) \circ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}_1}(f), \text{ wie gewünscht.} \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Einheitseigenschaft zeigen:

$$\forall \underline{u} : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! g : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} : \underline{u} = V(g) \circ \epsilon_{\underline{A}}.$$

Da  $\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}$  Iso ist, gilt also auch

$$\forall u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! g : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} : u = \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(g).$$

Mit  $\underline{X}_1 := F(\underline{A})$ ,  $\underline{X}_2 := \underline{X}$ ,  $f := \text{id}_{F(\underline{A})}$  kommutiert Beweis 8.1, und es gilt also:

$$\begin{array}{ccc} F(\underline{A}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, F(\underline{A})}(\text{id})} & F(\underline{A}) \\ & \searrow \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(g \circ \text{id}) & \downarrow V(g) \\ & & V(\underline{X}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} V(g) \circ \epsilon_{\underline{A}} &= V(g) \circ \varphi_{\underline{A}, F(\underline{A})}(\text{id}_{F(\underline{A})}) \\ &= \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(g \circ \text{id}_{F(\underline{A})}) \\ &= \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(g) \\ &= u. \end{aligned}$$

Also ist  $\epsilon$  Einheit.

Wir definieren die Familie  $(\varphi_{\underline{A}, \underline{X}} : \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})))_{\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \forall u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! g : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} : \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(g) = u \\ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}} : g \mapsto V(g) \rightarrow \epsilon_{\underline{A}}. \end{aligned}$$

Wegen der Einheitseigenschaft von  $\epsilon$  sind alle  $\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}$  Isos. Nun zur Natürlichkeit in  $\underline{X}$ : Für  $v : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})) , \text{ denn} \\ \uparrow \mathcal{D}(F(v), \underline{X}) & & \uparrow \mathcal{C}(v, V(\underline{X})) \\ \mathcal{D}(F(\underline{B}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{B}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{B}, V(\underline{X})) \end{array}$$

für alle  $f : F(\underline{B}) \rightarrow \underline{X}$  gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_{\underline{A}, \underline{X}} \circ \mathcal{D}(F(v), \underline{X}))(f) &= \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(f \circ F(v)) \\ &= V(f \circ F(v)) \circ \epsilon_{\underline{A}} \\ &= V(f) \circ VF(v) \circ \epsilon_{\underline{A}} \\ &= V(f) \circ \epsilon_{\underline{B}} \circ v \\ &= \mathcal{C}(v, V(\underline{X}))(V(f) \circ \epsilon_{\underline{B}}) \\ &= (\mathcal{C}(v, V(\underline{X})) \circ \varphi_{\underline{B}, \underline{X}})(f), \text{ weil} \end{aligned}$$

$\epsilon$  natürliche Transformation ist.

## 8 Adjunktionen

Für  $g : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{X}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{X})) \quad , \text{ denn} \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(\underline{A}, V(g)) \\ \mathcal{D}(F(\underline{A}), \underline{Y}) & \xrightarrow{\varphi_{\underline{A}, \underline{Y}}} & \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{Y})) \end{array}$$

für alle  $f : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X}$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}(\underline{A}, V(g)) \circ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}})(f) &= V(g) \circ \varphi_{\underline{A}, \underline{X}}(f) \\ &= V(g) \circ V(f) \circ \epsilon_{\underline{A}} \\ &= V(g \circ f) \circ \epsilon_{\underline{A}} \\ &= \varphi_{\underline{A}, \underline{Y}}(g \circ f) \\ &= (\varphi_{\underline{A}, \underline{Y}} \circ \mathcal{D}(F(\underline{A}), g))(f). \end{aligned}$$

Der Rest ergibt sich dual. ■

### 8.5 Definition (Adjungierte Funktoren)

Ist eine Bedingung aus der letzten Proposition erfüllt, so heißen  $F, V$  adjungierte Funktoren, geschrieben  $F \vdash V$ . Wir sagen, dass dann  $F$  linksadjungiert zu  $V$  und  $V$  rechtsadjungiert zu  $F$  ist. □

Auch hier gilt die Eindeutigkeit wieder nur bis auf Isomorphie.

### 8.6 Proposition

Adjungierte sind bis auf Isomorphie eindeutig. Genauer:

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \\ V &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \\ U &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \\ &F \vdash V, \text{ und} \\ &F \vdash U \end{aligned}$$

$$\implies U \cong V \text{ (analog andersrum)}. \quad \square$$

BEWEIS (PROPOSITION 8.6)

Hier nur für lokal kleine Kategorien (gilt auch sonst), damit das Yoneda-Prinzip wieder elegant zum Einsatz kommt. Wegen  $F \vdash V, F \vdash U$  gilt für alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ :

$$y(V(\underline{X})) = \mathcal{C}(-, V(\underline{X})) \cong \mathcal{D}(F(-), \underline{X}) \cong \mathcal{C}(-, U(\underline{X})) = y(U(\underline{X})).$$

Mit dem Yoneda-Prinzip gilt dann

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \exists \varphi_{\underline{X}} : V(\underline{X}) \rightarrow U(\underline{X}) \text{ Iso.}$$



Dieser Iso ist wegen Adjungiertheit natürlich in  $\underline{X}$ . Also  $U \cong V$ . ■

## 8.2 Adjunktionen und freie Objekte

Wir erinnern uns: Für  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\underline{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  und  $\iota \in \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{Y}))$  ist  $\underline{Y}$  frei über der Basis  $\underline{A}$  bezüglich  $\iota$  genau dann, wenn

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D}), u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! \tilde{u} : \underline{Y} \rightarrow \underline{X} : u = V(\tilde{u}) \circ \iota \text{ gilt.}$$

Gibt es zu jedem  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein  $\underline{Y}_{\underline{A}} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  und ein  $\iota_{\underline{A}} \in \mathcal{C}(\underline{A}, V(\underline{Y}_{\underline{A}}))$ , so dass  $\underline{Y}_{\underline{A}}$  frei über  $\underline{A}$  bezüglich  $\iota_{\underline{A}}$  ist, so gilt

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D}), u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! \tilde{u} : \underline{Y}_{\underline{A}} \rightarrow \underline{X} : u = V(\tilde{u}) \circ \iota_{\underline{A}}$$

für alle  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Mit dem Funktor

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{D} \\ \underline{A} &\mapsto \underline{Y}_{\underline{A}} \\ u : \underline{A} \rightarrow \underline{B} &\mapsto \overline{\iota_{\underline{B}} \circ u} \end{aligned}$$

und der natürlichen Transformation  $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow VF$ ,  $\epsilon_{\underline{A}} := \iota_{\underline{A}}$  ergibt sich also

$$\forall \underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D}), u : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X}) \exists ! \tilde{u} : F(\underline{A}) \rightarrow \underline{X} : u = V(\tilde{u}) \circ \epsilon_{\underline{A}}.$$

Also erfüllt  $\epsilon$  die Einheitseigenschaft, das heißt  $F \vdash V$ .

Umgekehrt erhalten wir für  $F \vdash V$  mit Einheit  $\epsilon$  zu jedem  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein freies Objekt  $F(\underline{A})$  über  $\underline{A}$  bezüglich  $\epsilon_{\underline{A}}$ . Dies motiviert die folgende Definition:

### 8.7 Definition (Freier Funktor)

Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt frei, falls ein zu  $F$  rechtsadjungierter Funktor existiert. □

### 8.8 Beispiel (Freie Gruppen)

Eine Gruppe  $\underline{G} = \langle G, + \rangle$  heißt frei bezüglich einer Menge  $M$ , geschrieben  $\underline{G} = F(M)$ , falls jedes  $g \in G$  sich in genau einer Weise als Summe von endlich vielen Elementen aus  $M \cup M^{-1}$  schreiben lässt (ohne triviale Variationen wie  $a + a^{-1} + a$  statt  $a$ ). Für zwei Mengen  $M, M'$  existiert genau ein Gruppenhomomorphismus  $F(u) : F(M) \rightarrow F(M')$  mit  $F(u)(m) = u(m)$  (für  $m \in M$ ) für jedes  $u : M \rightarrow M'$ .

## 8 Adjunktionen

Sei nun

$$\begin{aligned} F &: \text{Set} \rightarrow \text{Group} \\ M &\mapsto F(M) \\ u &\mapsto F(u) \\ V &: \text{Group} \rightarrow \text{Set} \text{ Vergissfunktorktor} \end{aligned}$$

Dann ist  $F \vdash V$ . □

Das gibt uns folgende Intuition: Ist  $F \vdash V$ , so ist  $F$  die effizienteste Lösung zum von  $V$  gestellten Problem, und  $V$  ist das schwierigste Problem, das sich noch durch  $F$  lösen lässt.

Hier finden wir auch die Symmetrie einer Adjunktion wieder.

### 8.9 Beispiel

Bei der obigen Adjunktion  $\text{Set} \xrightleftharpoons[V]{F} \text{Group}$  ist  $V$  das Problem „Wie kann man eine Gruppe aus einer Menge konstruieren?“, und  $F$  ist die universelle Lösung. □

Manche Autoren fordern zwischen Einheit und Koeinheit einen stärkeren Zusammenhang. Das ist mit unserer Definition von adjungierten Funktoren verträglich:

### 8.10 Lemma

Seien  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \vdash \mathcal{D} \xrightarrow{V} \mathcal{C}$ . Dann können Einheit  $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow VF$  und Koeinheit  $\eta : FV \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  so gewählt werden, so dass für alle  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{id}_{F(\underline{A})} &= \eta_{F(\underline{A})} \circ F(\epsilon_{\underline{A}}) \\ \text{id}_{V(\underline{X})} &= V(\eta_{\underline{X}}) \circ \epsilon_{V(\underline{X})}. \end{aligned} \quad \square$$

BEWEIS (LEMMA 8.10)

Übung 6.1. ■

Erste Beispiele für Adjunktionen:

### 8.11 Beispiel

Sei  $(F, G, \epsilon, \eta)$  Äquivalenz. Dann ist  $F \vdash G$  (Beweis und mehr zum Zusammenhang zwischen Adjunktionen und Äquivalenzen in Übung 6.2). □

### 8.12 Beispiel

sind  $\mathcal{C}_{(X, \leq)}$  und  $\mathcal{D}_{(Y, \leq)}$  Kategorien zu partiell geordneten Mengen, so ist ein Paar von adjungierten Funktoren eine Galois-Verbindung. □

## 8.13 Beispiel

$$\begin{aligned}
 (-) \times X &\vdash (-)^{\underline{X}} \\
 \underline{Y} &\mapsto \underline{Y} \times \underline{X} \\
 f : \underline{Y}_1 \rightarrow \underline{Y}_2 &\mapsto \langle f \circ \pi_1, \text{id}_{\underline{X}} \circ \pi_2 \rangle
 \end{aligned}$$

Vergleiche Lösung zu Übung 4.2. □

## 8.14 Beispiel

Formalisiert man Logik kategoriell (nach Lawvere), so sind viele der logischen Gesetze nichts weiter als Folgerungen von Adjunktionen. □

## 8.3 Wann gibt es Adjunktionen?

Zunächst eine notwendige Bedingung:

## 8.15 Proposition

Existiert für  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  ein linksadjungierter Funktor, so bewahrt  $V$  alle Limites. □

BEWEIS (PROPOSITION 8.15)

Hier nur für lokal-kleine Kategorien (gilt auch sonst), damit das Yoneda-Prinzip greift: Sei  $F \vdash V$  und  $J : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Diagramm, so dass  $\lim J \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  ist. Dann gilt für alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(\underline{X}, V(\lim J)) &\cong \mathcal{D}(F(\underline{X}), \lim J) && \text{(wegen } F \vdash V) \\
 &\cong \lim \mathcal{D}(F(\underline{X}), J) && \text{(weil Hom-Funktoren stetig sind)} \\
 &\cong \lim \mathcal{C}(\underline{X}, VJ) \\
 &\cong \mathcal{C}(\underline{X}, \lim VJ) \\
 \implies V(\lim J) &\cong \lim VJ. && \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 8.16 Theorem (Adjoint Functor Theorem)

Sei  $\mathcal{D}$  lokal klein und vollständig. Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  und jeden Funktor  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sind äquivalent:

1.  $V$  hat einen linksadjungierten Funktor, und
2.  $V$  ist stetig und für jedes  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  gilt die sogenannte Lösungsmengenbedingung ("solution set problem"): Es existiert eine Indexmenge  $I$  und eine Familie  $(\underline{S}_i)_{i \in I}$  in  $\text{Ob}(\mathcal{D})$ , so dass für alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  und alle  $f : \underline{A} \rightarrow V(\underline{X})$  ein  $\bar{f} : \underline{S}_i \rightarrow \underline{X}$

## 8 Adjunktionen

mit  $f = V(\bar{f}) \circ \varphi$  und ein  $\varphi \underline{A} \rightarrow V(\underline{S}_i)$  existiert.

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{A} & \xrightarrow{\varphi} & V(\underline{S}_i) & & \underline{S}_i & \square \\
 & \searrow f & \downarrow V(f) & & \downarrow \bar{f} & \\
 & & V(\underline{X}) & & \underline{X} & 
 \end{array}$$

BEWEIS (THEOREM 8.16)

1. Sei  $F \vdash V$ .  $F$  bewahrt alle Limites (Proposition 8.15) und die ein-elementige Familie  $(F(\underline{A}))$  erfüllt die Lösungsmengenbedingung.
2. Für  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  betrachten wir die sogenannte Komma-Kategorie  $\underline{A}/V$  mit

$$\begin{aligned}
 \text{Ob}(\underline{A}/V) &:= \{(\underline{X}, f); f: \underline{A} \rightarrow V(\underline{X})\} \\
 \underline{A}/V((\underline{X}_1, f_1), (\underline{X}_2, f_2)) &:= \{g \in \mathcal{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2); f_2 = V(g) \circ f_1\} \\
 \mathcal{O}_{\underline{A}/V} &:= \mathcal{O}_{\mathcal{D}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{A} & \xrightarrow{f_1} & V(\underline{X}_1) & & \underline{X}_1 \\
 & \searrow f_2 & \downarrow V(g) & & \downarrow g \\
 & & V(\underline{X}_2) & & \underline{X}_2
 \end{array}$$

Mit Hilfe des Lemmas aus Übung 6.3 kann man beweisen, dass  $\underline{A}/V$  für jedes  $\underline{A} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein initiales Objekt  $F(\underline{A}) := (\underline{X}_{\underline{A}}, \epsilon_{\underline{A}})$  hat. Nun hat  $\epsilon: (\epsilon_{\underline{A}} := \underbrace{V(\underline{X}_{\underline{A}})}_{=VF(\underline{A})})$

die Einheitseigenschaft. ■

### 8.17 Bemerkung

Wegen Proposition 8.15 kann man in Theorem 8.16 auch „stetig“ durch „bewahrt alle Limites“ ersetzen. Man kann zeigen, dass die etwas umständliche Lösungsmengenbedingung von  $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  durch die folgenden zwei einfacheren Bedingungen impliziert wird:

- $\mathcal{D}$  ist well-powered, das heißt für alle  $\underline{X} \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  existiert bis auf Isomorphie nur eine Menge (keine echte Klasse) von Objekten  $\underline{S}$ , für die ein Mono von  $\underline{S}$  nach  $\underline{X}$  existiert, und
- $\mathcal{D}$  hat eine koerzeugende Menge, das heißt es gibt eine Indexmenge  $I$  und Familie  $(\underline{X}_i)_{i \in I}$ , so dass für alle  $f, g: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$  mit  $f \neq g$  stets ein  $i \in I$  und ein  $s: \underline{Z} \rightarrow \underline{X}_i$  mit  $s \circ f \neq s \circ g$  existiert. □

Inbesondere gilt also:

**8.18 Theorem (Special Adjoint Functor Theorem)**

Sei  $\mathcal{D}$  lokal-klein, vollständig, well-powered und besitze eine koerzeugende Menge.

Dann sind für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  und jeden Funktor  $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  äquivalent:

1.  $V$  hat einen linksadjungierten Funktor, und
2.  $V$  ist stetig. □

Eine starke Konsequenz ist: Wann immer  $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  die Bedingungen aus Theorem 8.16 erfüllt, gibt es eine universelle Methode, das von  $V$  gestellte Problem zu lösen.

**8.19 Beispiel**

Sei  $V: \text{AbGroup} \rightarrow \text{Group}$  der Inklusionsfunctor.  $V$  ist stetig,  $\text{AbGroup}$  ist lokal-klein, vollständig, well-powered und hat eine koerzeugende Menge.

Es muss also nach Theorem 8.16 eine universelle Konstruktionsmethode geben, um aus Gruppen abelsche Gruppen zu machen (in der Tat vermöge  $G \mapsto G/[G, G]$ ). □

**8.20 Beispiel**

Sei  $V: \text{CHaus} \rightarrow \text{Top}$  der Inklusionsfunctor.

Dann gibt es nach Theorem 8.16 eine universelle Methode, um aus topologischen Räumen kompakte Hausdorffräume zu machen (entspricht der Stone-Čech-Kompaktifizierung). □

**8.21 Beispiel**

Sei  $V: \text{Ring} \rightarrow \text{Mon}$  der Funktor, der jeden Ring  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  auf das Monoid  $(R, \cdot, 1)$  abbildet. Dann gibt es nach Theorem 8.16 eine universelle Methode, um aus Monoiden Ringe zu machen (entspricht der Konstruktion von Monoidringen). □

Aus Theorem 8.16 können wir noch direkt zwei Korollare ableiten.

**8.22 Korollar**

Sei  $\mathcal{C}$  eine kleine (dann ist die Lösungsmengenbedingung automatisch erfüllt) und vollständige Kategorie. Dann hat jeder stetige Funktor einen linksadjungierten Funktor. □

**8.23 Korollar**

Sei  $\mathcal{C}$  klein und vollständig. Für jeden Funktor  $V: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  sind äquivalent:

1.  $V$  ist stetig,
2.  $V$  hat einen linksadjungierten Funktor, und
3.  $V$  ist darstellbar. □

**BEWEIS (KOROLLAR 8.23)**

1. Sei  $V$  stetig. Dann hat  $V$  einen linksadjungierten Funktor.

## 8 Adjunktionen

2.  $V$  habe einen linksadjungierten Funktor. Sei  $T$  eine ein-elementige Menge (terminal in  $\mathcal{S}et$ ). Dann ist

$$V(-) \cong \mathcal{S}et(T, V(-)) \cong \mathcal{C}(F(T), -)$$

3. Sei  $V$  darstellbar. Dann ist  $V$  wegen Proposition 7.27 stetig. ■

... nicht vergessen: Alles geht auch in der dualisierten Version!