Technische Universität Dresden

Skript:

Funktionalanalysis I

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Dr. Jürgen Voigt
Wintersemester 2010/11
Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen der Topologie

1

Metrische und topologische Räume

Definition

- Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Halbmetrik :⇔

  (i). $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

  (ii). $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecks-Ungleichung)

  (iii). $\forall x \in X : d(x, x) = 0$

  Gilt ferner

  (iv). $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Trennungseigenschaft)

  so heißt d Metrik. (X, d) heißt metrischer Raum.

- Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum.

  (i). Sei $x \in X$, $A \subseteq X$. A heißt Umgebung von x :⇔ $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Dabei

  $$B(x, \varepsilon) := \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon\}$$
  $$B[x, \varepsilon] := \{y \in X; d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

  (ii). Sei $A \subseteq X$. A offen :⇔ Für alle $x \in A$ ist A Umgebung von x. A abgeschlossen :⇔ $X \backslash A$ offen.

- Sei X eine Menge, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ heißt Topologie auf X :⇔

  (i). $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$:

  $$\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$$

  (ii). $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ endlich:

  $$\bigcap_{U \in \mathcal{F}} U \in \mathcal{T}$$

  Konvention: Für $\mathcal{S} = \emptyset$ sei

  $$\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U := \emptyset \qquad \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U := X$$

  $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man offen. A heißt abgeschlossen :⇔ $X \backslash A$ offen.

- Seien X Menge, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. $\mathcal{T}_1$ ist feiner als $\mathcal{T}_2$ (oder: $\mathcal{T}_2$ gröber als $\mathcal{T}_1$) :⇔ $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$.

  Feinste Topologie: $\mathcal{P}(X)$, gröbste Topologie: $\{\emptyset, X\}$.

- $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$. A heißt Umgebung von x :⇔ $\exists U \in \mathcal{T} : x \in U, U \subseteq A$.

- Das Mengensystem

$$\mathcal{U}_x(\mathcal{T}) := \{A \subseteq X, A \,\text{Umgebung von}\, x\}$$

heißt Umgebungsfilter von x.

1.1 Proposition

Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum. Sei ferner $\mathcal{T}$ das System der offenen Mengen (gemäß Definition in halbmetrischen Räumen). Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

Beweis: Klar bzw. Übung. □

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.

(i). Dann heißt

$$\dot{A} := \operatorname{int}(A) := \bigcup \{U \subseteq X; U \in \mathcal{T}, U \subseteq A\}$$

Inneres (offener Kern) von A. Übung:

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in X; A \,\text{Umgebung von}\, x\}$$

(ii). Die Menge

$$\bar{A} := \operatorname{cl}(A) := \bigcap \{B \subseteq X; B \supseteq A, B \,\text{abgeschlossen}\}$$

heißt Abschluß (abgeschlossene Hülle) von A. Übung:

$$\bar{A} = \{x \in X; \forall U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) : U \cap A \neq \emptyset\}$$

Offenbar ist $\dot{A}$ offen, da es Vereinigung offener Mengen ist.

1.2 Lemma

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:

(i). Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System abgeschlossener Mengen. Dann ist

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A \;\text{ abgeschlossen}$$

(ii). $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein endliches System abgeschlossener Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \;\text{ abgeschlossen}$$

Beweis: Unter Verwendung der de Morgan'schen Regeln:

$$X \backslash \left(\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} X \backslash A \;\text{ offen}$$

$$X \backslash \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} X \backslash A \;\text{ offen}$$

□

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Seien $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X), x \in X$. $\mathcal{U}$ heißt Umgebungsbasis von $x :\Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_x(\mathcal{T}); \forall A \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) \exists U \in \mathcal{U} : U \subseteq A$. Dies ist äquivalent zu:

$$\{A \subseteq X; \exists U \in \mathcal{U} : U \subseteq A\} = \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$$

Beispiel: (X, d) metrischer Raum, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $(0, \infty)$ mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann ist

$$\{B(x, \varepsilon_n); n \in \mathbb{N}\}$$

Umgebungsbasis von x.

- $\mathcal{T}$ (oder X) heißt separiert (oder Hausdorffsch) $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ $\exists U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}), V \in \mathcal{U}_y(\mathcal{T}) : U \cap V = \emptyset$.

1.3 Proposition

Sei (X, d) halbmetrischer Raum. Dann:

$$X \,\text{separiert} \Leftrightarrow d \,\text{ist Metrik}$$

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann existieren $U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}), V \in \mathcal{U}_y(\mathcal{T})$ mit $U \cap V = \emptyset$. Somit $y \notin U$. Es gibt $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq U$. Also $d(x, y) \geq \delta$.
- „$\Leftarrow$“: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann

$$0 < d(x, y) =: \delta$$

Die Kugeln $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ und $B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)$ erfüllen die Eigenschaften der Definition der Separiertheit:

$$\underbrace{B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)}_{\in \mathcal{U}_x} \cap \underbrace{B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)}_{\in \mathcal{U}_y} = \emptyset$$

□

Definition Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \to Y$, $x \in X$. f ist stetig in x

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S}) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S}) \exists U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) : f(U) \subseteq V \end{aligned}$$

Offenbar genügt es statt $\mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S})$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$ zu betrachten. f heißt stetig $:\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in X$ stetig.

1.4 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum, $(Y, \mathcal{S})$ topologischer Raum, $f : X \to Y$, $x \in X$. Dann äquivalent:

(i). f stetig in x

(ii). f folgenstetig in x, d.h. für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$. Hierbei:

$$y_n \to y \,\text{in}\, Y :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_y(\mathcal{S}) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : y_n \in U$$

Beweis: Übung □

Bemerkung Ohne die Voraussetzung, dass (X, d) metrischer Raum ist, ist Satz 1.4 falsch. Hierfür führt man sogenannte Netze ein (siehe unten).

1.5 Satz

Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

(i). f ist stetig

(ii). V offene Menge in $Y \Rightarrow f^{-1}(V)$ offen in X

(iii). B abgeschlossene Menge in $Y \Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X

(iv). $\forall A \subseteq X : f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(v). $\forall B \subseteq Y : \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $V \in \mathcal{S}$, $x \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(x) \in V$ und daher $V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S})$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. Damit $f^{-1}(V) = \mathrm{int}(f^{-1}(V))$ offen.

- $(ii) \Rightarrow (i)$

  Sei $x \in X$, $V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V offen. Damit ist $f^{-1}(V)$ offen und wegen $x \in f^{-1}(V)$ folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$.

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

  Für alle $V \subseteq Y$ gilt:
$$f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$$
□

Bemerkung Sei (X, d) halbmetrischer Raum, $x_0 \in X$. Dann ist die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, x_0)$ stetig, denn
$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$$
Damit folgt für $r > 0$:
$$B(x_0, r) := f^{-1}((-r, r)) \text{ offen}$$
$$B[x_0, r] := f^{-1}([-r, r]) \text{ abgeschlossen}$$

Definition (i). Eine Menge I heißt gerichtet, falls $(I, \leq)$ prägeordnet ist (quasi-geordnet) ist, d.h.

$$\forall \iota \in I : \iota \leq \iota \qquad \text{reflexiv}$$
$$\forall \iota, \kappa, \lambda \in I : \{\iota \leq \kappa, \kappa \leq \lambda \Rightarrow \iota \leq \lambda\} \qquad \text{transitiv}$$

und für alle $\iota_1, \iota_2 \in I$ existiert $\iota \in I : \iota_1 \leq \iota, \iota_2 \leq \iota$.

(ii). Ein Netz $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in einer Menge X ist eine Familie, wobei I gerichtet ist und $x_\iota \in X$ $(\iota \in I)$.

Definition Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz, $x_0 \in X$.

(i). $(x_\iota)_{\iota \in I}$ konvergiert gegen $x_0 :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}(\mathcal{T}) \exists \iota_0 \in I \forall \iota \geq \iota_0 : x_\iota \in U$

(ii). x_0 Häufungswert des Netzes $(x_\iota)_{\iota \in I} :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}(\mathcal{T}) \forall \iota_0 \in I \exists \iota \geq \iota_0 : x_\iota \in U$

Bemerkung Ist $(I, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$, dann heißen Netze mit Indexmenge $\mathbb{N}$ Folgen.

1.6 Satz

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$. Dann äquivalent:

(i). $x \in \bar{A}$

(ii). Es existiert ein Netz $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A mit $x_\iota \to x$.

Ist X halbmetrisch, so ist ferner äquivalent:

(iii). Es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $x_n \to x$.

Beweis: Übung 2 □

1.7 Satz

Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \to Y, x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i). f stetig in x

(ii). Für jedes Netz $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in X mit $x_\iota \to x$ gilt: $f(x_\iota) \to f(x)$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

  Sei $(x_\iota)_{\iota\in I}$ ein Netz in X mit $x_\iota \to x$. Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S})$. Dann ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ und daher existiert $\iota_0 \in I$, sodass $x_\iota \in f^{-1}(V)$ für alle $\iota \geq \iota_0$, d.h. $f(x_\iota) \in V$ $(\iota \geq \iota_0)$. Damit $f(x_\iota) \to f(x)$.

- $(ii) \Rightarrow (i)$

  Annahme: f ist nicht stetig in x. Also existiert $V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S})$ mit $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von x. Auf $\mathcal{U}$ definieren wir eine Ordnung $\leq$ durch:

  $$U \leq V :\Leftrightarrow U \supseteq V$$

  ($\leq$ ist gerichtet, denn $U, V \in \mathcal{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U} : W \subseteq U \cap V$)

  Für alle $U \in \mathcal{U}$ existiert $x_U \in U \backslash f^{-1}(V)$. Dann gilt $x_U \to x$: Für $A \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq A$, damit für alle $V \in \mathcal{U}$ mit $U \leq V$ ist $x_V \in V \subseteq U \subseteq A$. Andererseits $f(x_U) \notin V$ für $U \in \mathcal{U}$, also konvergiert $(f(x_U))_{U\in\mathcal{U}}$ nicht gegen $f(x)$. Widerspruch!

$\square$

2 Kompakte Mengen

Definition • Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. X heißt kompakt, wenn zu jeder Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. zu jedem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$$

existiert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ endlich mit

$$\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = X$$

2.1 Satz

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X ist kompakt

(ii). Für jedes System $\mathcal{R}$ abgeschlossener Mengen in X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, d.h.

$$\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{R} \text{ endlich} : \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$$

gilt:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A \neq \emptyset$$

(iii). Jedes Netz in X besitzt einen Häufungswert.

Beweis: • (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$$\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A = \emptyset \Leftrightarrow X = X \setminus \left(\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} X \setminus A$$

- (ii) $\Rightarrow$ (iii)

  Sei $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in X. Für $\iota \in I$ sei

$$A_\iota := \overline{\{x_\kappa ; \kappa \geq \iota\}}$$

  Offenbar A_ι abgeschlossen. $(A_\iota)_{\iota \in I}$ erfüllt die endliche Durchschnittseigenschaft:

  Sei $\mathcal{F} \subseteq I$ endlich. Dann existiert $\iota_0 \in I$ mit $i \leq \iota_0$ für alle $\iota \in F$. Daher:

$$\forall \iota \in F : \{x_\kappa ; \kappa \geq \iota_0\} \subseteq \{x_\kappa ; \kappa \geq \iota\}$$
$$\Rightarrow \emptyset \neq A_{\iota_0} \subseteq \bigcap_{\iota \in F} A_\iota$$

  Nach Voraussetzung gilt daher:

$$\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$$

Sei $x \in \bigcap_{\iota \in I} A_\iota$. Wir zeigen: x ist Häufungswert von $(x_\iota)_{\iota \in I}$. Sei $U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}), \iota_0 \in I$. Wegen $x \in A_{\iota_0} = \overline{\{x_\kappa; \kappa \geq \iota_0\}}$ folgt (mit Aufgabe 5, Übung 1)

$$U \cap \{x_\kappa; \kappa \geq \iota_0\} \neq \emptyset$$

Also existiert $\iota \geq \iota_0$ mit $x_\iota \in U$.

- $(iii) \Rightarrow (ii)$

  Sei $\mathcal{R}$ ein System abgeschlossener Mengen in X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Sei

$$I := \{\mathcal{F} \subset \mathcal{R}; \mathcal{F} \text{ endlich}\}$$
$$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}' :\Leftrightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \qquad (\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in I)$$

  Offenbar ist $(I, \leq)$ gerichtet. Für $\mathcal{F} \in I$ sei

$$x_\mathcal{F} \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$$

  Nach Voraussetzung besitzt das Netz $(x_\mathcal{F})_{\mathcal{F} \in I}$ einen Häufungswert $x \in X$. Behauptung: $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{R}} A$. Sei $A \in \mathcal{R}$, $U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$, $\iota_0 := \{A\}$. Also existiert $\mathcal{F} \in I$ mit $\{A\} \subseteq \mathcal{F}$ und $x_\mathcal{F} \in U$. Wegen

$$x_\mathcal{F} \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \subseteq A$$

  ist $U \cap A \neq \emptyset$. Demnach gilt $x \in \bar{A} = A$. Also $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{R}} A$.

□

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(i). Für $M \subseteq X$ sei

$$M \cap \mathcal{T} := \{U \cap M; U \in \mathcal{T}\}$$

die sogenannte Spurtopologie. (Dann ist $(M, M \cap \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.)

(ii). $M \subseteq X$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ $(M, \mathcal{T} \cap M)$ kompakt. $M \subseteq X$ heißt relativ kompakt $:\Leftrightarrow$ M besitzt kompakte Obermenge.

(iii). X heißt lokalkompakt $:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt von X besitzt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.

2.2 Proposition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$.

(i). Ist X kompakt, M abgeschlossen, dann auch M kompakt.

(ii). Ist X separiert, M kompakt, dann M abgeschlossen.

Beweis: (i). Übung

(ii). Sei $y \in X \backslash M$. Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U_x \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T}), V_x \in \mathcal{U}_y(\mathcal{T})$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Es gilt

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} U_x$$

Da M kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Sei

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \in \mathcal{U}_y(\mathcal{T})$$

Dann gilt $V \cap M = \emptyset$. Somit ist $X \backslash M$ offen, also M abgeschlossen.

$\square$

Bemerkung Ist X separiert, so ist X lokalkompakt genau dann, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweis: *Seien $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. Dann existiert $K \subseteq X$ kompakt, $K \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. O.B.d.A. $U \subseteq K$ (sonst betrachte $U \cap K \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$). K ist abgeschlossen (2.2(ii)), daher $K \backslash U$ abgeschlossen und somit kompakt (2.2(i)). Für $y \in K \backslash U$ existieren $U_y \in \mathcal{U}_y(\mathcal{T})$, $V_y \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ offen mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Es existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{y_j}; j = 1, \ldots, n\}$ von $K \backslash U$. Setze*

$$W := \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j} \supseteq K \backslash U \qquad\qquad V := K \cap \bigcap_{j=1}^{n} V_{y_j}$$

Dann gilt $V \subseteq X \backslash W$ und somit $\bar{V} \subseteq \overline{X \backslash W} = X \backslash W$, da W offen. Es folgt $\bar{V} \subseteq U$ wegen $\bar{V} \subseteq K$. $\bar{V}$ ist also kompakt (2.2(i)), $\bar{V} \subseteq U$ und $\bar{V} \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$. $\square$

2.3 Satz

Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, X kompakt. Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann:

(i). $f(X)$ kompakt

(ii). Ist Y separiert, f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus, d.h. f und f^{-1} sind stetig.

Beweis: (i). Sei $\mathcal{R}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $\{f^{-1}(V); V \in \mathcal{R}\}$ eine offene Überdeckung von X. Daher existiert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ endlich, sodass $\{f^{-1}(V); V \in \mathcal{F}\}$ eine Überdeckung von X ist:

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{F}} f^{-1}(V)$$

Deshalb:

$$f(X) = f\left(\bigcup_{V \in \mathcal{F}} f^{-1}(V)\right) \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$$

(ii). Zu zeigen: $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow f(U)$ offen.

Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist $X \backslash U$ abgeschlossen und daher kompakt (2.2(i)). Daher $f(X \backslash U)$ kompakt nach (i), also insbesondere abgeschlossen (2.2(ii)), da Y separiert ist. Wegen $Y \backslash f(U) = f(X \backslash U)$ (f bijektiv) ist $f(U)$ offen.

$\square$

Bemerkung Satz 2.3 ist wichtig, insbesondere in folgender Form: Seien $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ Topologien auf X, $(X, \mathcal{T})$ kompakt, $(X, \mathcal{S})$ separiert, $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$. Dann $\mathcal{T} = \mathcal{S}$. ($\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ ist stetig, damit klar nach (ii)).

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(i). X heißt abzählbar kompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in X hat einen Häufungswert. ($\Leftrightarrow$ Jede abzählbare offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung; Übung).

(ii). X folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.4 Proposition

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann:

(i). X kompakt $\Rightarrow X$ abzählbar kompakt

(ii). X folgenkompakt $\Rightarrow X$ abzählbar kompakt

Beweis: (i). Klar mit Satz 2.1.

(ii). Klar.

□

Definition Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt X präkompakt (historisch: totalbeschränkt) $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F \subset X$ endlich:

$$X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$

2.5 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X ist kompakt.

(ii). X ist abzählbar kompakt.

(iii). X ist folgenkompakt.

(iv). X ist präkompakt und vollständig.

Beweis: (Teil 1)

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Proposition 2.4
- (ii) $\Rightarrow$ (iii):

  Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, x ein Häufungswert. Sei $n_0 := 0$. Für $j \in \mathbb{N}$ seien $n_0, \ldots, n_{j-1}$ mit $x_{n_k} \in B\left(x, \frac{1}{k}\right)$ und $n_{k-1} < n_k$ für $k = 1, \ldots, j-1$ schon bestimmt. Es gibt $n_j > n_{j-1}$: $x_{n_j} \in B\left(x, \frac{1}{j}\right)$. Dann $x_{n_j} \to x \ (j \to \infty)$.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv):

  Annahme: X nicht präkompakt. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit

  $$x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, \varepsilon)$$

  Dann ist $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ für $m, n \in \mathbb{N}, n \neq m$. Daher besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Teilfolge. Widerspruch!

  Vollständig: Jede Cauchy-Folge besitzt einen Häufungswert, also konvergent.

□

2.6 Proposition (Schachtelsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, $B_n \neq \emptyset$, $\operatorname{diam} B_n \to 0 \ (n \to \infty)$. Dann gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$$

Genauer:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x\}$$

Dabei ist der Durchmesser $\operatorname{diam} B_n$ definiert durch

$$\operatorname{diam} B_n := \sup\{d(x, y); x, y \in B_n\}$$

Beweis: Sei $x_n \in B_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn für $n \leq j \leq k$:

$$x_j, x_k \in B_n \Rightarrow d(x_j, x_k) \leq \operatorname{diam} B_n \to 0 \, (n \to \infty)$$

Also existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$. Für $j \geq n$ gilt: $x_j \in B_n$ abgeschlossen, also $x \in B_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Seien $x, x' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Dann $d(x, x') \leq \operatorname{diam} B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, damit $d(x, x') = 0$ □

Beweis: (Teil 2 von 2.5)

- $(iv) \Rightarrow (i)$:
  Sei $\mathcal{S}$ eine offene Überdeckung von X. Zu Zeigen: $\exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ endlich mit

  $$X = \bigcup_{U\in\mathcal{F}} U$$

  Angenommen nicht. Dann existieren abgeschlossene Mengen $B_0 \supset B_1 \supset \ldots$, $\operatorname{diam} B_n \leq \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ und zu B_n gibt es keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{S}$:

  Sei $B_0 := X$. Seien $B_0, \ldots, B_n$ schon gewählt. B_n lässt sich darstellen als Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen vom Durchmesser $\leq \frac{1}{n+1}$, da X präkompakt. Zu einer von diesen Mengen gibt es keine endliche Teilüberdeckung, wähle diese als B_{n+1}.

  Sei $x \in \bigcap B_n$ gemäß 2.6. Es existiert $U \in \mathcal{S}$, $\varepsilon > 0$:

  $$x \in B[x, \varepsilon] \subseteq U$$

  Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, also

  $$B_n \subseteq B\left[x, \frac{1}{n}\right] \subseteq B[x, \varepsilon] \subseteq U$$

  Widerspruch!

□

2.7 Folgerung

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $M \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i). M ist relativ kompakt.

(ii). Jede Folge in M besitzt eine in X konvergente Teilfolge.

(iii). M ist präkompakt.

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Satz 2.5 für $\bar{M}$
- (ii) $\Rightarrow$ (iii): wie in Beweis von Satz 2.5, (iii) $\Rightarrow$ (iv)
- $(iii) \Rightarrow (i)$: M präkompakt $\Rightarrow$ $\bar{M}$ präkompakt (!), $\bar{M}$ vollständig, also kompakt.

□

Teil II

Normierte Räume und lineare Operatoren

3

Normierte Räume und Banachräume

Immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Definition (i). Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Halbnorm p auf X ist eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ mit

(1) absolut homogen: $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x)$
(2) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in X : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Gilt zusätzlich

(3) $\forall x \in X : p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

so heißt p eine Norm auf X. (X, p) heißt (halb-)normierter Raum. Meist $\|x\| := p(x)$.

Ist (X, p) ein (halb-)normierter Raum, so wird durch

$$d(x, y) := p(x - y)$$

eine (Halb-)Metrik definiert. Damit ist X ein (halb-)metrischer Raum.

(ii). Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.

Bemerkung (i). Ist X ein Banachraum, $L \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist auch L ein Banachraum.

(ii). Ist X normierter Raum, $L \subseteq X$ vollständiger Teilraum, dann ist L ein Banachraum und L ist abgeschlossen.

3.1 Proposition

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X ist ein Banachraum.

(ii). Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

so existiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$$

d.h. die Reihe $\sum_n x_n$ ist konvergent.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

Für $m \geq n \geq N$ folgt:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

d.h. $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_n$ ist eine Cauchy-Folge, damit konvergent.

- $(ii) \Rightarrow (i)$:
  Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n \geq n_0$:

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon_1$$

Es gibt $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, sodass für $m, n \geq n_1$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon_2$$

Seien $n_0 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$ gewählt. Es gibt $n_k > n_{k-1}$, sodass für $m, n \geq n_k$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon_{k+1}$$

Damit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ definiert. Dann gilt:

$$x_{n_k} = x_{n_0} + \sum_{j=0}^{k-1} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{j+1} < \infty$$

Also ist $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent nach Voraussetzung.

□

Beispiel ($C_b(S)$) Sei S ein topologischer Raum,

$$X := C_b(S) := \{f : S \to \mathbb{K}; f \text{ stetig und beschränkt}\}$$
$$\|f\| := \|f\|_{\sup} := \sup\{|f(s)|; s \in S\}$$

Dann ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Beweis: (i). $f, g : S \to \mathbb{K}$ stetig $\Rightarrow f + g$ stetig.

Beweis: Sei $s_0 \in S$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_{s_0}(\mathcal{T})$ mit

$$s \in U_1 \Rightarrow |f(s) - f(s_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$s \in U_2 \Rightarrow |g(s) - g(s_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $s \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{s_0}(\mathcal{T})$ folgt:

$$|(f+g)(s) - (f+g)(s_0)| \leq |f(s) - f(s_0)| + |g(s) - g(s_0)| < \varepsilon$$ □

(ii). Vollständigkeit: Übungsblatt 3

□

Falls $(S, \mathcal{T})$ kompakt ist, dann

$$C_b(S) = C(S) := \{f : S \to \mathbb{K}; f \text{ stetig}\}$$

Beispiel (ℓ_p) Für $1 \le p < \infty$ sei

$$\ell_p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$
$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Auch

$$\ell_\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}; (x_n) \text{ beschränkt}\}$$
$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$$

Definiere Addition und Skalarmultiplikation durch

$$(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$
$$\alpha \cdot (x_n)_n = (\alpha \cdot x_n)_n$$

Dann $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ Banachräume für $1 \le p \le \infty$.

Beweis: (i). Erinnerung an Minkowski-Ungleichung: Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

(siehe Maßtheorie §12 oder Analysis 2). Seien $1 \le p < \infty$, $x, y \in \ell_p$. Dann:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \|x\|_p + \|y\|_p$$
$$\Rightarrow \|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

also $(x + y) \in \ell_p$ und Dreiecksungleichung erfüllt. Skalarmultiplikation klar.

(ii). Vollständigkeit für $1 \le p < \infty$:
Sei $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ℓ_p. Dann ist $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, denn

$$|x_j^n - x_j^m| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^n - x^m\|_p$$

damit $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei

$$x_j := \lim_{n\to\infty} x_j^n \qquad\qquad x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \ge N$:

$$\|x^n - x^m\|_p \le \varepsilon$$

Insbesondere für $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon$$
$$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon$$
$$\overset{k\to\infty}{\Rightarrow} \|x^n - x\|_p \le \varepsilon$$

also $x^n - x \in \ell_p$, somit $x \in \ell^p$. Außerdem $x^n \to x$ $(n \to \infty)$

Für $p = \infty$: $\ell_\infty = C_b(\mathbb{N})$

$\square$

Bemerkung Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt: $\ell_p \subseteq \ell_q$, stetig eingebettet (Übung).

Beispiel (c, c_0)

$$
\begin{aligned}
c &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; (x_n) \text{ konvergent}\} \\
c_0 &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \lim x_n = 0\}
\end{aligned}
$$

mit Supremumnorm. Dabei $c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty$, jeweils abgeschlossene Teilmengen, daher selbst auch Banachräume.

(i). Abgeschlossenheit (c in ℓ_∞): Sei $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$,

$$
f((x_n)) := \lim_{n\to\infty} \sup\{|x_j - x_k|; j, k \geq n\}
$$

Dann f stetig:

$$
|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot \|x - y\|_\infty
$$

Nämlich: für $j, k \geq n$:

$$
\begin{aligned}
|x_j - x_k| &\leq |x_j - y_j - (x_k - y_k)| + |y_j - y_k| \\
&\leq 2\|x - y\|_\infty + |y_j - y_k| \\
\overset{\text{sup,lim}}{\Rightarrow} f(x) &\leq 2 \cdot \|x - y\|_\infty + f(y)
\end{aligned}
$$

Damit $c = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen.

(ii). Abgeschlossenheit (c_0 in c): Sei $g : c \to \mathbb{R}, g(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann g stetig:

$$
|g(x) - g(y)| \leq \|x - y\|_\infty
$$

und $c_0 = g^{-1}(0)$ abgeschlossen.

Beispiel ($C_b^n(I)$) Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$.

$$
\begin{aligned}
C_b^n(I) &:= \{f : I \to \mathbb{K}; \text{f n-mal stetig differenzierbar, Ableitungen} \\
&\qquad \text{bis zur Ordnung n beschränkt}\} \\
\|f\|_{n,\infty} &:= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot \|f^{(j)}\|_\infty
\end{aligned}
$$

Dann $(C_b^n(I), \|\cdot\|_{n,\infty})$ ein Banachraum (Übung?). Verallgemeinerung: Sobolev-Räume.

Beispiel (Produkt normierter Räume) Seien X, Y normierte Räume. Dann wird auf $X \times Y$ (lineare Struktur) durch

$$
\|(x, y)\| := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}
$$

eine Norm definiert. $X \times \{0\} \cong X$, $\{0\} \times Y \cong Y$ sind abgeschlossene Teilräume von $X \times Y$. Es gilt: X, Y vollständig $\Leftrightarrow$ $X \times Y$ vollständig. Äquivalente Normen:

$$
\|(x, y)\|_p := (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)
$$

4 Stetige und kompakte Operatoren

Generell: X, Y, Z normierte Räume in §4.

Definition $A \subseteq X$ beschränkt $:\Leftrightarrow \exists r > 0 : A \subseteq B(0, r)$.

Bemerkung (i). $A \subseteq X$ relativ kompakt $\Rightarrow A$ beschränkt.

(ii). $A \subseteq X$ präkompakt $\Rightarrow A$ beschränkt. Folgt aus

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, 1) \subseteq B\left(0, \max_{j=1,\dots,n} \|x_j\| + 1\right)$$

Definition (i). Ein Operator (linearer Operator) von X nach Y ist eine lineare Abbildung $T : D(T) \to Y$, wobei $D(T)$ ein linearer Teilraum ist (Definitionsbereich von T).

(ii). Ist $D(T) = X$, $Y = \mathbb{K}$, so heißt T ein (lineares) Funktional.

4.1 Satz

Sei $T : X \to Y$ linear. Äquivalent:

(i). T stetig in 0

(ii). T lipschitz-stetig (insbesondere gleichmäßig stetig)

(iii). T beschränkt, d.h. $T(B(0,1))$ beschränkt

(iv). $\exists M \geq 0 : \forall x \in X : \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$

(v). $\|T\| := \sup\{\|T(x)\|; x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty$

Ist (i) erfüllt, so gilt

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

Beweis:

- *(i) $\Rightarrow$ (iii)*

  Es existiert $\delta > 0$: $T(B(0,\delta)) \subseteq B(0,1)$. Dann

$$T(B(0,1)) \subseteq B\left(0, \frac{1}{\delta}\right)$$

- (iii) $\Rightarrow$ (iv):

  Es existiert $r > 0$ mit $T(B(0,1)) \subseteq B(0,r)$, d.h.

$$\|x\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < r$$

  Für $x \in X, x \neq 0, \alpha > 1$ ist $\left\|\frac{x}{\alpha \cdot \|x\|}\right\| < 1$ und somit

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|T(x)\| &= \alpha \cdot \|x\| \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\alpha \cdot \|x\|}\right)\right\| \\ &\leq \alpha \cdot \|x\| \cdot r \end{aligned}$$

  Somit $\|T(x)\| \leq r \cdot \|x\|$.

- (iv) ⇒ (v): $\|T\| \leq M$
- $(v) \Rightarrow (ii)$:

  Für $x \in X$ gilt $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$: Klar für $x = 0$, sonst

  $$\|T(x)\| = \|x\| \cdot \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

  Für $x, y \in X$:

  $$\|T(x) - T(y)\| = \|T \cdot (x - y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|$$

- $(ii) \Rightarrow (i)$: Klar.

□

4.2 Folgerung

Sei $X_0 \subseteq X$ linearer Unterraum, X_0 dicht in X, Y vollständig. Sei $T_0 : X_0 \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $T : X \to Y$ mit $T|_{X_0} = T_0$. T ist linear, $\|T\| = \|T_0\|$.

4.3 Lemma

Seien $(X, d), (Y, e)$ metrische Räume, $X_0 \subseteq X$ dicht in X, Y vollständig, $f_0 : X_0 \to Y$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung $f : X \to Y$ von f_0. f ist gleichmäßig stetig.

Beweis: (i). Vorbemerkung: $A \subseteq X \times Y$ ist der Graph einer gleichmäßig stetigen (nicht notwendig auf ganz X definierten) Abbildung $\overset{*}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (x_1, y_1), (x_0, y_0) \in A$ mit $d(x_1, x_0) < \delta \Rightarrow e(y_1, y_0) \leq \varepsilon$. Dann f_A zu A gehörende Abbildung $f_A : D(f_A) \to Y$ mit

$$D(f_A) := \{x \in X; \exists y \in Y : (x, y) \in A\}$$

(ii). Existenz: $\overline{\mathrm{gr}(f_0)} =: A$ hat $(*)$: Zu $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ wie in $(*)$ für $\mathrm{gr}(f_0)$. Seien $(x_1, y_1), (x_0, y_0) \in A$ mit $d(x_1, x_0) < \delta$. Es gibt Folgen $((x_1^n, y_1^n))_{n\in\mathbb{N}}$, $((x_0^n, y_0^n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{gr}(f_0)$ mit $(x_1^n, y_1^n) \to (x_1, y_1)$, $(x_0^n, y_0^n) \to (x_0, y_0)$. Für große n:

$$\begin{aligned} & d(x_1^n, x_0^n) < \delta \\ \Rightarrow \; & e(y_1^n, y_0^n) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Es gilt $D(f_A) = X$ (wegen $(*)$ für A).

(Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X_0 mit $x_n \to x \in X$. Dann insbesondere Cauchy-Folge und aus $(*)$ folgt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und daher konvergent, da Y vollständig.)

(iii). Eindeutigkeit: Ist g eine stetige Fortsetzung auf X, dann $\mathrm{gr}(g) \supseteq \mathrm{gr}(f_0)$, $\mathrm{gr}(g)$ abgeschlossen, also $\mathrm{gr}(g) \supseteq A = \mathrm{gr}(f_A)$. Also $g = f_A$ wegen $D(f_A) = X$.

□

Beweis: (Folgerung 4.2)

- Nach Satz 4.1 ist T_0 gleichmäßig stetig. Daher existiert T eindeutig nach Lemma 4.3.
- Sind $x, y \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X_0 mit $x_n \to x, y_n \to y$ $(n \to \infty)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann:

  $$\begin{aligned} & T_0(x_n + \lambda \cdot y_n) = T_0(x_n) + \lambda \cdot T_0(y_n) \\ \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \; & T(x + \lambda \cdot y) = T(x) + \lambda \cdot T(y) \end{aligned}$$

  Damit T linear.

- Klar: $\|T_0\| \leq \|T\|$. Sei $x \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X_0 mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Dann:

$$\begin{aligned}\|T \cdot x\| &= \lim_{n\to\infty} \|T_0(x_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_0\| \cdot \|x_n\| \\ &= \|T_0\| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

d.h. $\|T\| \leq \|T_0\|$.

$\square$

Definition (i). $L(X,Y) := \{T : X \to Y; T \text{ linear und stetig}\}$. $L(X) := L(X,X)$.

(ii). $X' := L(X,\mathbb{K})$ Dualraum (oder: der Dual von X)

4.4 Satz (i). $L(X,Y)$ mit $\|\cdot\|$ aus Satz 4.1 ist normierter Raum.

(ii). Y vollständig $\Rightarrow L(X,Y)$ vollständig

Beweis: (i). Sei $T \in L(X,Y), \lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt offensichtlich

$$\|\lambda \cdot T\| = \ldots = |\lambda| \cdot \|T\|$$

Seien $S,T \in L(X,Y)$. Für $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$:

$$\|(T+S)(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|S\| + \|T\|$$

Insbesondere: $S + T \in L(X,Y)$.

(ii). Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$. Für $x \in X$:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$$

also $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in Y. Somit existiert

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

T ist linear: Für $x, x' \in X, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}&T_n(\lambda \cdot x + x') = \lambda \cdot T_n(x) + T_n(x') \\ \overset{n\to\infty}{\Rightarrow}\ &T(\lambda \cdot x + x') = \lambda \cdot T(x) + T(x')\end{aligned}$$

T stetig, $\|T - T_n\| \to 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m,n \geq N$:

$$\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon$$

Für $x \in X$:

$$\begin{aligned}&\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow}\ &\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|\end{aligned}$$

also ist $T_n - T \in L(X,Y)$, $T \in L(X,Y)$, $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$.

$\square$

Bemerkung Für anderen Beweis von 4.4(ii): $C_b(B_X(0,1);Y)$ ist vollständig,

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y; x \in B_X(0,1)\}$$

Zeige, dass $L(X,Y)$ isometrisch isomorph zu

$$L := \{T|_{B_X(0,1)}; T \in L(X,Y)\} \subseteq C_b(B_X(0,1);Y)$$

und dass L abgeschlossen in $C_b(B_X(0,1);Y)$ ist.

4.5 Satz

Sind $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ linear und stetig, so gilt
$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

Beweis:
$$\forall x \in X : \|(T \circ S)(x)\| \leq \|T\| \cdot \|S(x)\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|x\| \qquad \square$$

Bemerkung Ist X ein Banachraum, so ist $L(X)$ eine Banachalgebra mit 1, d.h.

(i). $L(X)$ ist ein Banachraum.

(ii). Komposition erfüllt: $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$

Definition Sei $T : X \to Y$ ein Operator. T heißt kompakt $:\Leftrightarrow T(B(0,1))$ ist relativ kompakt. (Dann T stetig wegen relativ kompakt $\Rightarrow$ beschränkt)
Notation:
$$K(X,Y) := \{T \in L(X,Y); T \,\text{kompakt}\}$$

4.6 Satz (i). $A, B \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow A + B := \{a + b; a \in A, b \in B\}$ kompakt

(ii). $K(X,Y)$ ist linearer Teilraum von $L(X,Y)$. Ist Y vollständig, dann ist $K(X,Y)$ abgeschlossen.

(iii). Seien $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ und einer der Operatoren T bzw. S sei kompakt. Dann $S \circ T$ kompakt. (Idealeigenschaft von K)

Beweis: (i). $A + B$ folgenkompakt. *(Betrachte $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A + B$, dann $z_n = a_n + b_n$ mit $a_n \in A, b_n \in B$. Wähle konvergente Teilfolge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und dann konvergente Teilfolge von $(b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$.)*

(ii). Teilraum folgt mit (i) aus
$$(T + S)(B(0,1)) \subseteq \overline{T(B(0,1))} + \overline{S(B((0,1)))}$$
Sei Y vollständig, $T_n \to T$, $T_n \in K(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $T(B(0,1))$ ist präkompakt (Folgerung 2.7, Satz 4.4(ii)). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$: $\|T_n - T\| < \varepsilon$. $T_n(B(0,1))$ ist präkompakt, d.h. es gibt $F \subseteq B_X(0,1)$ endlich mit
$$T_n(B(0,1)) \subseteq \bigcup_{x\in F} B(T_n(x), \varepsilon)$$
Dann gilt:
$$\begin{aligned} T(B(0,1)) &\subseteq T_n(B(0,1)) + B_y(0,\varepsilon) \\ &\subseteq \bigcup_{x\in F} (B(T_n(x),\varepsilon) + B_y(0,\varepsilon)) \\ &\subseteq \bigcup_{x\in F} B(T_n(x), 2\varepsilon) \end{aligned}$$

(iii). T kompakt $\Rightarrow \overline{T(B(0,1))}$ kompakt $\Rightarrow S(\overline{T(B(0,1))}) \supseteq S \circ T(B(0,1))$ kompakt. S kompakt $\Rightarrow S(T(B(0,1)))$ relativ kompakt wegen $T(B(0,1)) \subseteq B_Y(0, \|T\|) \cup \{0\}$.

$\square$

4.7 Proposition

Sei X ein Vektorraum, $\dim X < \infty$, $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es existieren $0 < c_1 < c_2$ mit
$$\forall x \in X : c_1 \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \cdot \|x\|_1$$
und X ist vollständig.

Beweis: Sei $n := \dim X$. Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von X,

$$j : \mathbb{K}^n \to X, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i$$

Dann ist j nach $(X, \|\cdot\|_1)$ stetig, also

$$\begin{aligned} 0 < c_1 &:= \inf\{\|j(\alpha)\|_1; |\alpha| = 1\} \\ \leq c_2 &:= \sup\{\|j(\alpha)\|_1; |\alpha| = 1\} < \infty \end{aligned}$$

mit Satz vom Maximum. Mit $\|x\|_0 := |j^{-1}(x)|$ für $x \in X$ folgt:

$$\begin{aligned} c_1 &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|_0} \right\|_1 \leq c_2 \qquad (x \in X, x \neq 0) \\ \Rightarrow c_1 \cdot \|x\|_0 &\leq \|x\|_1 \leq c_2 \cdot \|x\|_0 \qquad (x \in X) \end{aligned}$$

Somit $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent. Auch: $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Damit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Wegen $\mathbb{K}^n$ vollständig folgt X vollständig. □

4.8 Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i). $\dim X < \infty$

(ii). id_X ist kompakt, d.h. $B(0,1)$ ist relativ kompakt

(iii). X ist lokalkompakt

(iv). $B(0,1)$ ist präkompakt

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii):

  Klar, da $X \cong \mathbb{K}^n$. *(j, j^{-1} sind stetig (lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen) und daher folgt die Behauptung wegen $B(0,1) \subseteq j(\overline{j^{-1}(B(0,1))})$ aus dem Satz von Heine-Borel.)*

- (ii) $\Rightarrow$ (iii):

  Mit $B(0,1)$ ist auch $B(0,r)$ relativ kompakt für $r > 0$.

- (iii) $\Rightarrow$ (iv):

  Mit $B(0,\varepsilon)$ ist auch $B(0,1)$ relativ kompakt, also präkompakt. *(Sei $U \in \mathcal{U}_0$ kompakt. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(0,\varepsilon) \subseteq U$, also $B(0,\varepsilon)$ relativ kompakt. Folglich $B(0,1)$ relativ kompakt und somit präkompakt nach Bemerkung Anfang §4.)*

- *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*:

  Es existiert $F \subseteq B(0,1)$ endlich, sodass

  $$B(0,1) \subseteq \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = F + B\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

  Sei $L := \operatorname{lin} F$. Dann $\dim L < \infty$, also L vollständig (4.7) und somit abgeschlossen in X.

  $$\begin{aligned} B(0,1) &\subseteq L + B\left(0, \frac{1}{2}\right) = L + \frac{1}{2} \cdot B(0,1) \\ &\subseteq L + B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subseteq \ldots \subseteq L + B\left(0, \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

  Zu $x \in B(0,1)$ gibt es also $x_n \in L$ mit $|x - x_n| < \frac{1}{2^n}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L, $x_n \to x$, also $x \in L$. Damit ist $L = X$.

□

4.9 Satz (Arzelà-Ascoli)

Sei S ein kompakter topologischer Raum, $F \subseteq C(S)$. Dann äquivalent:

(i). F relativ kompakt

(ii). $F(x) := \{f(x); f \in F\}$ beschränkt für alle $x \in S$ und F gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall x_0 \in S : \forall \varepsilon > 0 \, \exists U \in U_{x_0}(\mathcal{T}) : \forall f \in F, x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii):
  $F(x)$ beschränkt: Bekannt. F gleichgradig stetig: Übung.
- $(ii) \Rightarrow (i)$:
  Genügt zu zeigen: F präkompakt (Folgerung 2.7). Sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in S$ existiert $U_x \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ offen mit
  $$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$
  für $x' \in U_x, f \in F$. Es gibt $x_1, \ldots, x_n$ mit
  $$S = \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}$$
  da S kompakt ist. Die Menge
  $$\tilde{F} := \{(f(x_1), \ldots, f(x_n)); f \in F\} \subset \mathbb{K}^n$$
  ist beschränkt *(und somit relativ kompakt nach dem Satz von Heine-Borel)*, also präkompakt (Folgerung 2.7). Daher gibt es $f_1, \ldots, f_k \in F$ mit
  $$\tilde{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_{\mathbb{K}^n}((f_j(x_1), \ldots, f_j(x_n)), \varepsilon) \qquad (*)$$
  Sei $f \in F$. Es gibt $j \in \{1, \ldots, k\}$, sodass
  $$|f_j(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$
  für $1 \leq i \leq n$ wegen $(*)$. Zu $x \in S$ gibt es $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in U_{x_i}$ und daher:
  $$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$
  Somit
  $$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_{C(S)}(f_j, 3\varepsilon)$$
  □

4.10 Folgerung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Die Injektion

$$C_b^1(I) \to C_b(I), f \mapsto f$$

ist kompakt.

Beweis: Zu zeigen:

$$\{f \in C_b^1(I); \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < 1\}$$

ist relativ kompakt in $C_b(I)$. Beschränkt ist klar. Für $x, x' \in I$, $x \leq x'$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| \leq \int_x^{x'} |f'(y)| \, dy \leq |x - x'|$$

für f mit $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < 1$, d.h. die Menge ist gleichgradig stetig. □

Bemerkung Ist I offen, $f \in C_b(I)$, dann lässt sich f stetig auf $\bar{I}$ fortsetzen.

5 Separabilität und Vervollständigung

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

(i). $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ Basis von $\mathcal{T}$

$$:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup_{V \in \mathcal{A} : V \subseteq U} V$$

(ii). X heißt separabel $:\Leftrightarrow \exists A \subseteq X$: A abzählbar, $\bar{A} = X$.

5.1 Satz

Sei (X, d) ein metrischer separabler Raum, $M \subseteq X$. Dann ist auch M (als Teilraum) separabel.

5.2 Lemma

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X separabel

(ii). X besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii):

  Sei $A \subseteq X$ abzählbar, dicht. Definiere

  $$\mathcal{A} := \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right); x \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

  dann ist $\mathcal{A}$ abzählbar und $\mathcal{A}$ ist Basis der Topologie: Sei U offen, $x \in U$. Es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$ und es existiert $y \in A \cap B\left(x, \frac{1}{2n}\right)$. Dann

  $$x \in B\left(y, \frac{1}{2n}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$$

- $(ii) \Rightarrow (i)$:

  Sei $\mathcal{A}$ eine abzählbare Basis. Ohne Einschränkung $V \neq \emptyset$ für $V \in \mathcal{A}$. Für $V \in \mathcal{A}$ sei $x_V \in V$. Dann $\{x_V; V \in \mathcal{A}\}$ abzählbar und dicht. (In jeder offenen Umgebung $\neq \emptyset$ von x liegen Punkte von $\{x_V; V \in \mathcal{A}\}$.)

$\square$

Beweis: (Satz 5.1) X separabel, also existiert abzählbare Basis des Topologie. Damit hat M abzählbare Basis, also separabel nach Lemma 5.2. $\square$

5.3 Satz

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann äquivalent:

(i). X ist separabel.

(ii). $\exists A \subseteq X$ abzählbar, sodass $\overline{\operatorname{lin} A} = X$ ($:\Leftrightarrow A$ total)

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii): Klar.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*:

  Ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetze A durch $A \cup \imath \cdot A$.) Die Menge $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} A$ ist abzählbar und $\overline{\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} A} \supseteq \overline{\operatorname{lin}_{\mathbb{R}} A} = X$, also $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} A$ dicht in X.

□

Beispiel (i). $\mathbb{K}^n$ ist separabel.

(ii). ℓ_p ist separabel für $1 \leq p < \infty$. Sei $e_n := (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. $\operatorname{lin}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in ℓ_p. Dann Satz 5.3.

(iii). ℓ_∞ ist nicht separabel: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. Für $A, B \subseteq \mathbb{N}, A \neq B$ gilt $\|1_A - 1_B\|_\infty = 1$. Also

$$B\left(1_A, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(1_B, \frac{1}{2}\right) = \emptyset \qquad (*)$$

Ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty$, so ist

$$\left\{A \subseteq \mathbb{N}; B\left(1_A, \frac{1}{2}\right) \cap \{x^n; n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset\right\}$$

abzählbar. *(Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es maximal ein $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $x^n \in B(1_A, \frac{1}{2})$. Sonst Widerspruch zu $(*)$.)* Also gibt es $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $\|x^n - 1_A\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5.4 Satz

Sei S ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $C(S)$ separabel.

Beweis: • Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Überdeckung $(A_j^n)_{j=1,\ldots,k_n}$ von S mit $\operatorname{diam}(A_j^n) \leq \frac{1}{n}$ für $j = 1, \ldots, k_n$. Ohne Einschränkung sei $A_j^n \cap A_i^n = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist

$$X_n := \operatorname{lin}\{1_{A_j^n}; j = 1, \ldots, k_n\}$$

ein k_n-dimensionaler Teilraum von $\ell_\infty(S)$ (beschränkte Funktionen, Supremumnorm). Daher ist

$$X := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}$$

separabel in $\ell_\infty(S)$.

- Zeige: $C(S) \subseteq X$. Sei $f \in C(S)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass für $x, y \in S$ mit $d(x, y) \leq \frac{1}{n}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(f gleichmäßig stetig auf S). Für $j = 1, \ldots, k_n$ wähle $x_j \in A_j^n$ und definiere

$$g(x) := \sum_{j=1}^{k_n} f(x_j) \cdot 1_{A_j^n}(x) \in X_n$$

Für $x \in A_j^n$ ($j \in \{1, \ldots, k_n\}$) folgt dann:

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| \leq \varepsilon$$

wegen $\operatorname{diam} A_j^n \leq \frac{1}{n}$. Somit $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Dann Satz 5.1.

□

Bemerkung (i). Zu Satz 5.4 gilt „Umkehrung“: S kompakt, $C(S)$ separabel, dann S metrisierbar.

(ii). Beispiel für S: $S \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. $C(S)$ separabel wegen Approximationssatz von Weierstraß.

Definition Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein metrischer Raum $(\tilde{M}, \tilde{d})$ heißt Vervollständigung von $M :\Leftrightarrow$

(i). $\tilde{M}$ ist vollständig.

(ii). Es gibt eine isometrische Abbildung $j : M \to \tilde{M}$, sodass $j(M)$ dicht in $\tilde{M}$ ist.

Genauer: $(\tilde{M}, \tilde{d}, j)$ Vervollständigung.

Bemerkung Sind M_1, M_2 Vervollständigung eines metrischen Raumes M, dann sind M_1 und M_2 isometrisch isomorph.

5.5 Satz

Jeder metrische Raum M besitzt eine Vervollständigung.

5.6 Lemma

Sei (X, d) halbmetrischer Raum. Wir definieren „$\sim$" auf X durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow d(x, y) = 0$$

Dann $\sim$ Äquivalenzrelation, $\tilde{X} := X/_{\sim}$, $q : X \to \tilde{X}$ Quotientenabbildung,

$$\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty), \tilde{d}(q(x), q(y)) := d(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

ist wohldefiniert und $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein metrischer Raum.

Beweis: Äquivalenzrelation: Klar. $\tilde{d}$ ist wohldefiniert: Seien $x \sim x', y \sim y'$, dann gilt

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

wegen

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \\ \Rightarrow d(x, y) - d(x', y') &\leq d(x, x') + d(y, y') \end{aligned}$$

□

5.7 Lemma

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $X_0 \subseteq X$ dicht und jede Cauchy-Folge in X_0 sei konvergent in X. Dann ist X vollständig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x'_n \in X_0$ mit $d(x_n, x'_n) \leq \frac{1}{n}$. Dann $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X_0, also konvergent in X,

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

□

Beweis: (Satz 5.5)

- Sei $M_1 :=$ Menge der Cauchy-Folgen in M. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei

  $$d_1((x_n), (y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

  Existenz des Limes folgt aus

  $$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

  also $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

- d_1 ist eine Halbmetrik (leicht). Sei $\tilde{M} := M_1/_\sim$ mit Metrik $\tilde{d}$ aus Lemma 5.6 und $q : M_1 \to \tilde{M}$. Definiere
$$j_1 : M \to M_1, j_1(x) := (x, x, \dots)$$
Dann ist $j := q \circ j_1 : M \to \tilde{M}$ isometrisch, denn für $x, y \in M$:
$$d(x,y) = d_1(j(x), j_1(y)) = \tilde{d}(q(j_1(x)), q(j_1(y)))$$
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M eine Cauchy-Folge, dann $j_1(x_k) \to (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$d_1(j_1(x_k), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n) \to 0 \qquad (k \to \infty)$$
$$j(x_k) = q(j_1(x_k)) \to q((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$$
Daraus: $j(M)$ ist dicht in $\tilde{M}$. Cauchy-Folgen aus $j(M)$ sind konvergent in $\tilde{M}$; nach Lemma 5.7 ist $\tilde{M}$ vollständig.

□

5.8 Satz

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $\tilde{X}$ „die“ Vervollständigung von X (als metrischer Raum) mit Einbettung $j : X \to \tilde{X}$. Dann besitzt $\tilde{X}$ eine Banachraumstruktur, sodass j linear ist.

Beweis:

- Ohne Einschränkung $X \subseteq \tilde{X}$. Addition
$$X \times X \to \tilde{X}, (x,y) \mapsto x + y$$
ist gleichmäßig stetig:
$$\|(x+y) - (x_1 + y_1)\| \le \|x - x_1\| + \|y - y_1\|$$
daher fortsetzbar (eindeutig) auf $\tilde{X} \times \tilde{X}$ (4.3).
- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Abbildung $X \to \tilde{X}$, $x \mapsto \lambda \cdot x$ ist gleichmäßig stetig
$$\|\lambda \cdot x - \lambda \cdot x_1\| = |\lambda| \cdot \|x - x_1\|$$
und daher fortsetzbar auf $\tilde{X}$. Mit diesen Operationen ist $\tilde{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
- Die Abbildung $X \to [0,\infty), x \mapsto \|x\|$ ist gleichmäßig stetig:
$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$$
und daher fortsetzbar auf $\tilde{X}$. Leicht: $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ normierter Raum, z.B. Dreiecksungleichung:
$$\{(x,y) \in \tilde{X} \times \tilde{X}; \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|\}$$
ist abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{X} \times \tilde{X}$ und enthält $X \times X$, also $\{\dots\} = \tilde{X} \times \tilde{X}$. $\|\cdot\|$ erzeugt Metrik $\tilde{d}$ von $\tilde{X}$.

□

Beispiel Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Auf $C_C(\Omega) := \{f \in C(\Omega); \operatorname{spt} f \text{ kompakt}\}$ definiere Norm $\|\cdot\|_p$ durch
$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
(Dreiecksungleichung: Minkowski-Ungleichung, siehe unten) $(C_C(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ist nicht vollständig (Übung). Die Vervollständigung: $L^p(\Omega)$; später.

Bemerkung (zur Hölder-Ungleichung und Ungleichung von Minkowski) (i). Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \geq 0$:

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

Beweis: Ohne Einschränkung $x, y > 0$. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav, denn $\ln^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

$$\ln\left(\frac{1}{p} \cdot x + \frac{1}{q} \cdot y\right) \geq \frac{1}{p} \cdot \ln x + \frac{1}{q} \cdot \ln y = \ln\left(x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}\right)$$

Dann exp anwenden. □

(ii). Hölder-Ungleichung: Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C_C(\Omega)$. Dann:

$$\int |f \cdot g| \, dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Beweis: Seien $c_f > \|f\|_p$, $c_g > \|g\|_q$, $\tilde{f} := \frac{1}{c_f} \cdot f$, $\tilde{g} := \frac{1}{c_g} \cdot g$. Dann $\|\tilde{f}\|_p \leq 1$, $\|\tilde{g}\|_q \leq 1$. Aus (i) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{|f \cdot g|}{c_f \cdot c_g} &= |\tilde{f}|^{p \cdot \frac{1}{p}} \cdot |\tilde{g}|^{q \cdot \frac{1}{q}} \leq \frac{|\tilde{f}|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}|^q}{q} \\
\Rightarrow \frac{1}{c_f \cdot c_g} \cdot \int |f \cdot g| \, dx &\leq \frac{1}{p} \cdot \|\tilde{f}\|_p^p + \frac{1}{q} \cdot \|\tilde{g}\|_q^q \leq 1 \\
\Rightarrow \int |f \cdot g| \, dx &\leq c_f \cdot c_g
\end{aligned}$$

□

(iii). Sei $p \in (1, \infty)$. Für $x, y \geq 0$ gilt dann:

$$\varphi(x, y) := \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^p = \inf_{0 \leq t \leq 1} (\underbrace{(1-t)^{1-p} \cdot x + t^{1-p} \cdot y}_{=:\varphi_t(x,y)})$$

Beweis: Ohne Einschränkung $x > 0, y = 1$ (mit Konstante multiplizieren). Rechte Seite mit Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((1-t)^{1-p} \cdot x + t^{1-p} \cdot 1) &= (1-p) \cdot (-(1-t)^{-p} \cdot x + t^{-p}) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow x &= \left(\frac{1-t}{t}\right)^p = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^p \\
\Rightarrow \frac{1}{t} &= x^{\frac{1}{p}} + 1 \\
\Rightarrow t^{1-p} &= \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-1} \\
\Rightarrow (1-t)^{1-p} \cdot x &= \left(\frac{x^{\frac{1}{p}} + 1 - 1}{x^{\frac{1}{p}} + 1}\right)^{1-p} \cdot x = \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-1} \cdot x^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Mit diesem t:

$$\varphi_t(x, 1) = \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right) = \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p = \varphi(x, 1)$$

□

(iv). Minkowski-Ungleichung: Sei $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C_C(\Omega)$. Dann

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \int \varphi(|f|^p, |g|^p) \overset{\forall t\in[0,1]}{\leq} \int \varphi_t(|f|^p, |g|^p) \\
&= (1-t)^{1-p} \cdot \|f\|_p^p + t^{1-p} \cdot \|g\|_p^p \\
\Rightarrow \|f+g\|_p^p &\leq \inf \varphi_t(\|f\|_p^p, \|g\|_p^p) = \varphi(\|f\|_p^p, \|g\|_p^p) \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)^p
\end{aligned}$$

□

Teil III

Satz von Baire und seine Konsequenzen

6 Satz von Baire

6.1 Satz (Baire)

Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge offener Teilmengen von X mit $\overline{U_n} = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

dicht in X.

Beweis: Sei $x_0 \in X$. Zu zeigen: $\forall r_0 > 0$:

$$B[x_0, r_0] \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \neq \emptyset$$

Behauptung: Es existieren Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ mit $r_n \to 0$, sodass

$$B[x_n, r_n] \subseteq U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

Seien $x_1, \ldots, x_{n-1}, r_1, \ldots, r_{n-1}$ bereits gewählt. Es existiert $x_n \in U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \emptyset$ (da U_n dicht) und es existiert $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$:

$$B[x_n, r_n] \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$$

Dann insbesondere $r_n \to 0$. Nach Proposition 2.6 (Schachtelsatz) existiert

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x_n, r_n]$$

Somit $x \in B[x_0, r_0]$, $x \in B[x_n, r_n] \subseteq U_n$ $(n \in \mathbb{N})$, damit

$$x \in B[x_0, r_0] \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \qquad \square$$

Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(i). X heißt Baire-Raum $:\Leftrightarrow$ Ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge offener dichter Mengen, dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht.

Nach Satz 6.1: Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum. *Übung 6: Jeder lokalkompakte separierte Raum ist ein Baire-Raum. Übung 7: Jeder normierte Raum von zweiter Bair'scher Kategorie ist ein Baire-Raum.*

(ii). $A \subseteq X$ heißt nirgends dicht $:\Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$. $A \subseteq X$ heißt mager (von erster Bair'scher Kategorie) $:\Leftrightarrow \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit A_n nirgends dicht und $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $A \subseteq X$ heißt von zweiter Bair'scher Kategorie $:\Leftrightarrow A$ nicht mager.

(iii). $A \subseteq X$ heißt ein G_δ (oder eine G_δ-Menge) $:\Leftrightarrow \exists (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, U_n offen $(n \in \mathbb{N})$ und $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

6.2 Satz

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann äquivalent:

(i). X Baire-Raum

(ii). $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge dichter G_δ-Mengen $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dichtes G_δ

(iii). $B_n \subseteq X$ abgeschlossen, B_n nirgends dicht $(n\in\mathbb{N}) \Rightarrow \operatorname{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \emptyset$

(iv). $B\subseteq X$ mager $\Rightarrow X\backslash B$ dicht ($\Leftrightarrow \operatorname{int} B = \emptyset$)

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii):
  Sind A_n G_δ-Mengen, dann
  $$A_n = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_n^j$$
  mit $U_n^j \in \mathcal{T}$ dicht. Also
  $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_n^j$$
  dicht nach (i).
- $(ii) \Rightarrow (i)$: Klar.
- (i) $\Leftrightarrow$ (iii):
  Komplementbildung. Beachte: B nirgends dicht $\Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{B}) = \emptyset$
  $$\Leftrightarrow X = (\operatorname{int}(\overline{B}))^c = \overline{\overline{B}^c} = \overline{\operatorname{int}(B^c)}$$
  $\Leftrightarrow \operatorname{int}(B^c)$ dicht.
- (iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Nur Umformulierung.

□

Bemerkung Baire-Eigenschaft oft so benutzt: X Baire-Raum, dann X nicht mager, d.h. gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit $B_n \subseteq X$ abgeschlossen, dann existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} B_n \neq \emptyset$.

Beispiel (Nirgends stetige Funktionen) Die Menge $A := \{f \in C[0,1]; f$ besitzt in keinem Punkt von $[0,1)$ eine rechtsseitige Ableitung $\}$ enthält ein dichtes G_δ (ist insbesondere $\neq \emptyset$ und sogar überabzählbar).

Beweis:
- Für $n\in\mathbb{N}$ sei
  $$B_n := \left\{ f\in C[0,1]; \exists x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \forall h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq n \right\}$$
  Dann $A^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Somit:
  $$A \supseteq C[0,1]\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C[0,1]\backslash B_n)$$
  Nach Satz von Baire genügt es zu zeigen, dass jedes B_n abgeschlossen und nirgends dicht ist.
- Abgeschlossenheit: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in B_n, $f\in C[0,1]$, $\|f_k - f\| \to 0$ $(k\to\infty)$. Für $k\in\mathbb{N}$ existiert ein $x_k \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, sodass für alle $h\in\left(0,\frac{1}{n}\right]$:
  $$\left|\frac{f_k(x_k+h)-f_k(x_k)}{h}\right| \leq n$$

Ohne Einschränkung existiert $\lim_{k\to\infty} x_k =: x$. (Man nimmt an, dass man die konvergente Teilfolge gleich hatte.) Für $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f_k(x_k+h)-f_k(x_k)}{h}\right| &\le n \\ \overset{k\to\infty}{\Rightarrow} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| &\le n \end{aligned}$$

Doppelter Grenzwert okay, weil

$$|f(x)-f_k(x_k)| \le |f(x)-f(x_k)| + \underbrace{|f(x_k)-f_k(x_k)|}_{\le\|f-f_k\|} \to 0\,(k\to\infty)$$

- Nirgends dicht: Sei $f \in B_n, \varepsilon > 0$. Zu zeigen: Es existiert $g \in B(f,\varepsilon) : g \notin B_n$. Es gibt eine stetige, stückweise affin-lineare Funktion p mit $\|f-p\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Sei M die (betraglich) maximale Steigung von p. Sei s eine stetige, stückweise affin-lineare Funktion, sodass $\|s\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ und die Steigung sei betraglich $\ge M+n+1$. Für $g := p+s$ gilt dann:

  $$\|f-g\| \le \|f-p\| + \|s\| < \varepsilon$$

  Für alle $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ gibt es $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ mit

  $$\left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h}\right| \ge M+n+1$$

  daher

  $$\begin{aligned} \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| &\ge \left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h}\right| - \left|\frac{p(x+h)-p(x)}{h}\right| \\ &\ge M+n+1-M = n+1 \end{aligned}$$

  also $g \notin B_n$.

□

Beispiel für eine nirgends differenzierbare Funktion:

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle\, 2^j \cdot x \,\rangle}{2^j}$$

mit $\langle\, x \,\rangle$ = Abstand zu $\mathbb{Z}$.

Beispiel (Überabzählbare Lebesgue-Nullmengen) Sei $X = [0,1]$, $\{r_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ eine Nullfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$U_n := \bigcup_{j=1}^{\infty} ((r_j - \varepsilon_n \cdot 2^{-j}, r_j + \varepsilon_n \cdot 2^{-j}) \cap [0,1])$$

Dann U_n offen, dicht und von Lebesgue-Maß

$$\lambda(U_n) \le 2\varepsilon_n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2 \cdot \varepsilon_n$$

Nach Satz von Baire ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ein dichtes G_δ, $\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = 0$. Jedenfalls

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \supseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ist überabzählbar, sonst

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{s_n; n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n\}$$

mager und somit

$$[0,1] = \underbrace{\left([0,1]\setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)}_{=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]\setminus U_n \text{ mager}} \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ mager}$$

Für Komplemente: $[0,1]\setminus\bigcap U_n$ mager, $\lambda([0,1]\setminus\bigcap U_n) = 1$, $[0,1]\setminus\bigcap U_n$ dicht. *Damit gezeigt: Es gibt überabzählbare Lebesgue-Nullmengen. (Zweiter Teil des Beweises zeigt auch:* $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ *ist kein* G_δ *in* $[0,1]$*.)*

7 Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit

7.1 Satz (Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit/Satz von Banach-Steinhaus)

Seien X, Y normierte Räume, X Baire-Raum. Sei $\mathcal{F} \subseteq L(X, Y)$ und

$$\forall x \in X : \sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{F}\} < \infty$$

Dann

$$\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{F}\} < \infty$$

($\Leftrightarrow \mathcal{F}$ gleichgradig stetig).

Beweis: (i). Vorüberlegung: Seien $T \in L(X, Y)$, $x \in X$, $r > 0$. Dann

$$r \cdot \|T\| \leq \sup_{y \in B(x,r)} \|T(y)\|$$

Denn: Für $\xi \in X, \|\xi\| < r$:

$$\begin{aligned}\|T(\xi)\| &\leq \frac{1}{2} \cdot (\|T \underbrace{(x+\xi)}_{\in B(x,r)}\| + \|T \underbrace{(x-\xi)}_{\in B(x,r)}\|) \\ &\leq \sup_{y \in B(x,r)} \|T(y)\|\end{aligned}$$

(ii). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$B_n := \{x \in X; \forall T \in \mathcal{F} : \|T(x)\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(B_Y[0, n])$$

Dann B_n abgeschlossen und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = X$ nach Voraussetzung. Da X Baire-Raum ist, existiert ein $n \in \mathbb{N} : \operatorname{int} B_n \neq \emptyset$. Dann gibt es $x \in \operatorname{int} B_n$, $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq \operatorname{int} B_n$. Dann mit (i):

$$\forall T \in \mathcal{F} : r \cdot \|T\| \leq \sup_{y \in B(x,r)} \|T(y)\| \leq \sup_{y \in B_n} \|T(y)\| \leq n$$

und somit

$$\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{F}\} \leq \frac{n}{r}$$

□

Bemerkung Alternativbeweis von (ii): (ohne Satz von Baire, mit X Banachraum)

Beweis: Annahme: $\mathcal{F}$ unbeschränkt. Nach (i) gilt für jede Kugel B:

$$\sup\{\|T(x)\|; x \in B, T \in \mathcal{F}\} = \infty$$

Daraus: Es existiert Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$, absteigende Folge $(B[x_n, r_n])_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n \to 0$ mit $\|T_n(x)\| \geq n$ für $x \in B[x_n, r_n]$. Da X Banachraum ist, folgt dann aber

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x_n, r_n] = \{x\} \qquad \|T_n(x)\| \geq n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Widerspruch! □

7.2 Folgerung

Seien X, Y normierte Räume, X Baire-Raum, $\mathcal{F} \subseteq L(X,Y)$. Sei $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{F}\} = \infty$, dann gibt es $x \in X$:

$$\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{F}\} = \infty$$

Beweis: Klar mit Satz 7.1. $\square$

Bemerkung Aus $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{F}\} = \infty$ folgt zunächst: Es gibt Folgen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\| \leq 1$ und

$$\|T_n(x_n)\| \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

In Folgerung 7.2 sogar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant.

Definition Seien X, Y normierte Räume, $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L(X,Y)$, $T \in L(X,Y)$. Dann konvergiert $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen T in der starken Operatortopologie (oder punktweise/einfach) $:\Leftrightarrow \forall x \in X : T_j(x) \to T(x)$ für $j \to \infty$. Notation: $T_j \overset{s}{\to} T$.

Ist X ein Baire-Raum, dann folgt, dass $\sup \|T_j\| < \infty$ nach Satz 7.1.

7.3 Proposition

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L(X,Y)$. Es gelte:

(i). Es gibt $D \subseteq X$ total (d.h. $\operatorname{lin} D$ dicht), sodass $(T_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle $x \in D$.

(ii). $M := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\| < \infty$

Dann konvergiert $(T_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ und durch

$$T(x) := \lim_{j\to\infty} T_j(x)$$

ist $T \in L(X,Y)$ definiert mit

$$\|T\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|T_j\|$$

Beweis:
- Ohne Einschränkung $D = \operatorname{lin} D$ (dicht). Sei $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $x_1 \in D$ mit $\|x - x_1\| \leq \varepsilon$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i, j \geq n_0$:

  $$\|T_j(x_1) - T_i(x_1)\| \leq \varepsilon$$

  Für $i, j \geq n_0$ folgt:

  $$\begin{aligned}\|T_j(x) - T_i(x)\| &\leq \underbrace{\|T_j(x) - T_j(x_1)\|}_{\leq M\cdot\|x-x_1\|} + \underbrace{\|T_j(x_1) - T_i(x_1)\|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\|T_i(x_1) - T_i(x)\|}_{\leq M\cdot\|x-x_1\|} \\ &\leq 2M \cdot \|x - x_1\| + \varepsilon \leq \varepsilon \cdot (2M+1)\end{aligned}$$

  d.h. $(T_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und somit konvergent, da Y ein Banachraum ist.

- $T : X \to Y$ ist linear (klar). Für $x \in X$ folgt:

  $$\|T(x)\| = \lim_{j\to\infty} \|T_j(x)\| \leq M \cdot \|x\|$$

  Für $\liminf$ wähle Teilfolge, sodass Norm gegen $\liminf$ konvergiert.

$\square$

Beispiel $X = Y = \ell_2$, $T_j((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_{n+j})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann $\|T_j\| = 1$ für $j \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \ell_2$: $\|T_j(x)\| \to 0$ für $j \to \infty$, d.h. $T_j \overset{s}{\to} 0$.

Beispiel (Quadraturformel) Approximative Berechnung bestimmter Integrale wie folgt:

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot f(t_k)$$

wobei $A_k \in \mathbb{R}$, $a \le t_1 < \ldots < t_n \le b$ (zum Beispiel Trapezregel, Simpson'sche Formel). Betrachte Folge solcher Formeln

$$\int_a^b f(t)\,dt = Q_n(f) + R_n(f)$$

mit

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{k_n} A_k^n \cdot f(t_k^n)$$

Frage: Finde Bedingungen, für die $R_n(f) \to 0$ für alle $f \in C[a,b]$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) gilt.
Literatur: vgl. Wloka- Funktionalanalysis und Anwendungen

Satz (Szegö)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i). $\forall f \in C[a,b] : R_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$

(ii). (a) Für alle Polynome p gilt $R_n(p) \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k_n} |A_k^n| < \infty$

Beweis: Offenbar ist $Q_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$ linear. Wir zeigen:

$$\|Q_n\| = \sum_{k=1}^{k_n} |A_k^n|$$

„$\le$" ist klar. Sei $f(t_k^n) := \operatorname{sgn}(A_k^n)$ für $k = 1, \ldots, k_n$ und f affin-linear auf (t_{k-1}^n, t_k^n). Dann ist $\|f\| \le 1$ und

$$\|Q_n(f)\| = \sum_{k=1}^{k_n} |A_k^n|$$

- (i) $\Rightarrow$ (ii): (a) ist klar. (b) folgt mit Satz 7.1.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: Polynome dicht in $C[a,b]$ (Approximationssatz von Weierstraß), dann Proposition 7.3.

$\square$

Satz (Steklov)

Seien $A_k^n \ge 0$ für $n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, k_n\}$. Dann äquivalent:

(i). $\forall f \in C[a,b] : R_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$

(ii). Für alle Polynome p gilt $R_n(p) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass (ii) die Bedingung (ii)(b) von Satz 7 impliziert. Mit $p(x) = 1$:

$$\sum_{k=1}^{k_n} |A_k^n| = \sum_{k=1}^{k_n} A_k^n = Q_n(p) \to \int_a^b 1\,dx < \infty \qquad (n \to \infty)$$ $\square$

Beispiel (Fourier-Reihen stetiger Funktionen) Sei

$$C(\mathbb{T}) := \{f \in C[-\pi, \pi]; f(-\pi) = f(\pi)\}$$

Für $f \in C(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$c_k(f) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath ks} \cdot f(s)\, ds$$

Für $n \in \mathbb{N}, t \in [-\pi, \pi]$ sei

$$S_n(f)(t) := \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \cdot e^{\imath kt}$$

$S_n(f)$ ist die n-te partielle Summe der Fourier-Reihe von f.

Bemerkung Für alle $f \in C(\mathbb{T})$ gilt $\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$ (sogar für alle $f \in L^2((-\pi, \pi))$). Auch: Für $f \in C^1(\mathbb{T})$ (d.h. $f \in C(\mathbb{T})$, f differenzierbar und $f' \in C(\mathbb{T})$) gilt $S_n(f) \to f$ gleichmäßig.

Frage: Gilt $S_n(f)(t) \to f(t)$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$, $f \in C(\mathbb{T})$? Antwort: Nein!

Beweis: Nimm $t = 0$ und definiere

$$F_n(f) := S_n(f)(0) \qquad (f \in C(\mathbb{T}))$$

Dann $F_n \in C(\mathbb{T})' = L(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ und $\|F_n\| \leq 2n + 1$. Angenommen $F_n(f) \to f(0)$ für $n \to \infty$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Nach Satz 7.1 folgt dann

$$\sup\{\|F_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Wir zeigen $\|F_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$.

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k \cdot (t-s)}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot D_n(t-s)\, ds \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath kt} &= \frac{e^{\imath \frac{t}{2}} - e^{-\imath \frac{t}{2}}}{e^{\imath \frac{t}{2}} - e^{-\imath \frac{t}{2}}} \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath kt} \\ &= \frac{e^{\imath \frac{n+1}{2} t} - e^{-\imath \frac{n+1}{2} t}}{e^{\imath \frac{t}{2}} - e^{-\imath \frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

(Dirichlet-Kern). Zeige:

$$\|F_n\| = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)|\, ds$$

Es gilt

$$F_n(f) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \underbrace{D_n(-s)}_{=D_n(s)}\, ds$$

also $\|F_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \|D_n\|_1$ wegen

$$\begin{aligned} |F_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)| \cdot |f(s)|\, ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)|\, ds \end{aligned}$$

Es gilt sogar „=“ nach Lemma 7. Nun zeige $\|D_n\|_1 \to \infty$.

Aus $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \frac{t}{2}$ folgt

$$|D_n(t)| \geq \left|\frac{2}{t} \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot t\right)\right|$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt &\geq 4 \cdot \int_0^{\pi} \left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot t\right)\right| \cdot \frac{1}{t}\,dt \\
&= 4 \cdot \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi} |\sin t| \cdot \frac{1}{t}\,dt \\
&\geq 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot\pi} \cdot \underbrace{\int_{(k-1)\cdot\pi}^{k\cdot\pi} |\sin t|\,dt}_{=2} = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\to \infty \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

Es folgt: Es gibt $f \in C(\mathbb{T})$, sodass $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist. $\square$

Lemma

Sei $k \in C[0,1]$ reellwertig, $\eta \in C[0,1]'$ definiert durch

$$\eta(f) := \int_0^1 k(s)\cdot f(s)\,ds$$

Dann

$$\|\eta\| = \int_0^1 |k(s)|\,ds$$

Beweis: (i). „$\leq$“: Analog wie oben.

(ii). „$\geq$“: Kandidat ist $f := \operatorname{sgn}(k)$, allerdings f nicht stetig. Definiere

$$f_n := (n\cdot k \wedge 1) \vee (-1)$$

Dann f_n stetig und $\|f_n\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\eta(f_n) &= \int_0^1 k(s)\cdot f_n(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \underbrace{|k(s)|\cdot(n\cdot|k(s)|\wedge 1)}_{\leq|k(s)|,\to|k(s)|\;(n\to\infty)}\,ds \\
&\overset{\text{dK}}{\to} \int_0^1 |k(s)|\,ds = \|k\|_1
\end{aligned}$$

$\square$

7.4 Satz (Satz von Banach-Steinhaus)

Seien X, Y normierte Räume, X Baire-Raum. Sei $\mathcal{F} \subseteq L(X,Y)$,

$$D := \{x \in X; \mathcal{F}(x)\text{ beschränkt}\}$$

wobei $\mathcal{F}(x) := \{T(x); T\in\mathcal{F}\}$. Dann entweder D mager ($\Leftrightarrow X\backslash D$ enthält dichtes G_δ) oder $D = X$. Im zweiten Fall ist $\mathcal{F}$ beschränkt in $L(X,Y)$.

Beweis: Für $n\in\mathbb{N}$ sei

$$B_n := \{x\in X; \forall T\in\mathcal{F} : \|T(x)\| \leq n\}$$

Dann ist B_n abgeschlossen, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = D$. Ist D nicht mager, so gibt es $n\in\mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} B_n \neq \emptyset$. Wie im Beweis von Satz 7.1: $\mathcal{F}$ beschränkt, also $D = X$. $\square$

Bemerkung Tatsächlich ist

$$X \setminus D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{T \in \mathcal{F}} \underbrace{\{x \in X; \|T(x)\| > n\}}_{\text{offen}}$$

also $X \setminus D$ immer G_δ-Menge.

8 Satz von der offenen Abbildung und Graphensatz

Seien im Folgenden X und Y normierte Räume über $\mathbb{K}$.

Definition Seien $(S_1, \mathcal{T}_1), (S_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, $f : S_1 \to S_2$. Dann heißt f offen $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}_1 : f(U) \in \mathcal{T}_2$.

8.1 Lemma

Sei $T : X \to Y$ linear. Dann T offen $\Leftrightarrow$ Es existiert $\delta > 0$ mit

$$T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,\delta)$$

Beweis: (i). „$\Rightarrow$“: Klar nach Definition.

(ii). „$\Leftarrow$“:

Sei $U \subseteq X$ offen, $x \in U$. Es gibt $\varepsilon > 0$, sodass $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Dann

$$\begin{aligned} T(U) &\supseteq T(B(x,\varepsilon)) = T(x + B(0,\varepsilon)) \\ &= T(x) + T(B(0,\varepsilon)) \supseteq T(x) + B(0, \delta\cdot\varepsilon) \\ &= B(T(x), \delta\cdot\varepsilon) \end{aligned}$$

d.h. $T(U)$ offen.

□

8.2 Satz (Satz von der offenen Abbildung)

Sei X ein Banachraum, $T \in L(X,Y)$, $R(T) := \{T(x); x \in X\}$ sei nicht mager in Y. Dann ist T offen, $R(T) = Y$. (Gröber: Y Banachraum, $R(T) = Y \Rightarrow T$ offen)

8.3 Lemma

Sei $T : X \to Y$ linear, $R(T)$ nicht mager in Y, dann gilt: $\overline{T(B(0,1))}$ ist eine Nullumgebung, d.h. T ist fast offen.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$R(T) = T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot B(0,1)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B(0,n))$$

nicht mager, d.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} &\operatorname{int}(\overline{T(B(0,n))}) \neq \emptyset \\ \Rightarrow\ &\operatorname{int}\left(\overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)}\right) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Somit existiert $y \in Y$, $\delta > 0$ mit

$$\overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)} \supseteq B(y,\delta)$$

Damit

$$\begin{aligned}\overline{T(B(0,1))} &\supseteq \overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)} - \overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)}\\ &\supseteq B(y,\delta) - y = B(0,\delta)\end{aligned}$$

□

Bemerkung Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$. Dann

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bigcap_{\varepsilon>0}\{y \in M; B(y,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset\}\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0}\{y \in M; \exists x \in A : y \in B(x,\varepsilon)\}\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$$

für alle $\varepsilon > 0$.

8.4 Lemma

Sei X ein Banachraum, $T \in L(X,Y)$ fast offen. Dann ist T offen.

Beweis:

- Es gibt $\delta > 0$ mit $B_Y(0,\delta) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$. Wir zeigen, dass

$$B(0,\delta) \subseteq T(B_X(0,1)) \qquad (*)$$

Sei dazu $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $(0,\infty)$ mit $\varepsilon_0 = 1$,

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $B(0,\delta\cdot\varepsilon_n) \subseteq \overline{T(B(0,\varepsilon_n))}$. Sei $y \in B(0,\delta)$. Dann gibt es $x_0 \in B_X(0,1), y_1 \in B_Y(0,\delta\cdot\varepsilon_1)$ mit

$$y = T(x_0) + y_1$$

Es gibt $x_1 \in B_X(0,\varepsilon_1)$, $y_2 \in B_Y(0,\delta\cdot\varepsilon_2)$ mit $y_1 = T(x_1) + y_2$ …. Dann existiert $x_n \in B_X(0,\varepsilon_n)$, $y_{n+1} \in B(0,\delta\cdot\varepsilon_{n+1})$ mit

$$y_n = T(x_n) + y_{n+1}$$

Es folgt

$$y = T\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right) + y_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiert $x := \sum_{j=0}^{\infty} x_j \in \alpha\cdot B(0,1)$ wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|x_j\| < \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j = \alpha$$

und X vollständig (3.1). Aus $y_n \to 0$ und Stetigkeit von T folgt $T(x) = y$. Damit gezeigt, dass

$$B(0, \delta) \subseteq T(B(0, \alpha))$$

für $\alpha > 1$, also T offen nach Lemma 8.1. Wegen

$$B(0, \delta) = \bigcup_{\alpha > 1} B\left(0, \frac{\delta}{\alpha}\right) \subseteq \bigcup_{\alpha > 1} T(B(0, 1)) = T(B(0, 1))$$

folgt auch Behauptung $(*)$.

$\square$

Beweis: (Satz 8.2) Klar mit Lemma 8.3 und 8.4. $\square$

Bemerkung In Satz 8.2 gilt $R(T) = Y$ ist vollständig. (Übung, Aufgabe 39)

8.5 Folgerung (i). X, Y Banachräume, $T \in L(X, Y)$, $R(T) = Y \Rightarrow T$ offen

(ii). X, Y Banachräume, $T \in L(X, Y)$, T bijektiv $\Rightarrow T^{-1}$ stetig

(iii). Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf X, sodass $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume und es existiere $\alpha > 0$ mit

$$\forall x \in X : \|x\|_2 \leq \alpha \cdot \|x\|_1$$

($\Leftrightarrow$ id : $(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ stetig), dann sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es existiert $\alpha' > 0$ mit

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq \alpha' \cdot \|x\|_2$$

(iv). Seien $1 \leq p < q \leq \infty$, dann ist ℓ_p mager in ℓ_q.

Beweis: (iv). $\ell_p \subset \ell_q$ mit stetiger Inklusion. Wäre ℓ_p nicht mager in ℓ_q, dann mit Satz 8.2: $\ell_p = \ell_q$. Widerspruch! *(Für $\ell_p \subset \ell_q$ betrachte $x_n := n^{-\frac{1}{p}}$.)*

$\square$

8.6 Proposition

Sei $L \subseteq (C^1[0, 1], \|\cdot\|_1)$ ein Teilraum mit L abgeschlossen in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. Dann $\dim L < \infty$.

Beweis: Da die Abbildung id : $C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ stetig ist, ist L auch in der $\|\cdot\|_1$-Norm abgeschlossen. Also sind $(L, \|\cdot\|_\infty)$ und $(L, \|\cdot\|_1)$ Banachräume. Aus

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

und Folgerung 8.5(iii) folgt, dass $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ auf L äquivalent sind. Damit id : $(L, \|\cdot\|_\infty) \to (L, \|\cdot\|_1)$ stetig. Wir wissen, dass id : $C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ kompakt ist (4.10), also id : $(L, \|\cdot\|_1) \to (L, \|\cdot\|_\infty)$ kompakt (4.6). Somit id auf $(L, \|\cdot\|_\infty)$ kompakt und damit $\dim L < \infty$ (4.8). $\square$

Bemerkung (Alternativbeweis mit Satz von Baire) Beweis: $(L, \|\cdot\|_\infty)$ ist (wie oben) ein Banachraum. Die Menge

$$\begin{aligned} B &:= \{f \in L; \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1\} \\ &= \bigcap_{0 \leq s < t \leq 1} \left\{ f \in L; \|f\|_\infty + \frac{|f(t) - f(s)|}{t - s} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge von L. Es gilt $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot B$ und nach Satz von Baire gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(n \cdot B) \neq \emptyset$. Also $\operatorname{int} B \neq \emptyset$ (Inneres bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm). Nach Satz von Arzelà-Ascoli ist B kompakt. Da $\operatorname{int} B$ eine Kugel enthält, ist die Einheitskugel von L relativ kompakt und somit $\dim L < \infty$. $\square$

Bemerkung Sei $T \in L(X,Y)$. Dann ist der Graph

$$G(T) := \{(x, T(x)); x \in X\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$, denn $G(T)$ ist Urbild der Null unter der stetigen Abbildung

$$X \times Y \ni (x,y) \mapsto y - T(x) \in Y$$

8.7 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen/Graphensatz)

Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein Operator mit abgeschlossenem Graphen ($\Leftrightarrow$: T abgeschlossen). Dann ist $T \in L(X,Y)$.

Beweis: $P_X : X \times Y \to X, (x,y) \mapsto x$ und $P_Y : X \times Y \to Y, (x,y) \mapsto y$ sind stetige und lineare Abbildungen. Da $X \times Y$ Banachraum ist, ist auch $G(T)$ ein Banachraum. $P_X\big|_{G(T)} : G(T) \to X$ ist stetig und bijektiv mit Inverser

$$\left(P_X\big|_{G(T)}\right)^{-1}(x) = (x, T(x))$$

Nach Folgerung 8.5(ii) ist $(P_X\big|_{G(T)})^{-1}$ stetig. Damit

$$T = P_Y \circ \left(P_X\big|_{G(T)}\right)^{-1}$$

stetig. □

Beispiel Seien $1 \le p \le q \le \infty$ und sei $A = (a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $(a_{jk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ (mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Für alle $x \in \ell_p$ sei

$$T(x) := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{jk} \cdot x_k\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_q$$

Dann ist $T : \ell_p \to \ell_q$ linearer und abgeschlossener Operator. Nach Graphensatz folgt dann, dass $T \in L(\ell_p, \ell_q)$.

Beweis: T abgeschlossener Operator: Sei $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ_p, $x^n \to x$ in ℓ_p für $n \to \infty$ und $y^n := T(x^n) \to y$ in ℓ_q für $n \to \infty$. Zu zeigen: $(x,y) \in G(T)$, d.h. $T(x) = y$.
Sei $\hat{y} := T(x)$ mit $\hat{y} = (\hat{y}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt dann $y_j^n \to \hat{y}_j$ für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}|y_j^n - \hat{y}_j| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \cdot (x_k^n - x_k)\right| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^q\right)^{\frac{1}{q}}}_{<\infty} \cdot \|x^n - x\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

Auch: $y_j^n \to y_j$ $(n \to \infty)$, also $y_j = \hat{y}_j$. □

Beispiel (i). Sei $X = C[0,1]$. Sei T definiert durch $D(T) = C^1[0,1]$, $T(f) := f'$. Dann ist T nicht stetig, aber $G(T)$ abgeschlossen.

Beweis: T nicht stetig: Sei $\varphi \in C^1[0,\infty)$, $\operatorname{spt}\varphi \subseteq [0,1]$,

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \varphi(n \cdot x)$$

Dann $f_n \to 0$ in $\|\cdot\|_\infty$, aber $f_n'(x) = \varphi'(n \cdot x)$ und $\|f_n'\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty \not\to 0$.
T abgeschlossen: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(T)$, $f_n \to f$, $f_n' \to g$. Analysis 1: $f \in C^1, f' = g$. □

(ii). $X = C^1[0,1]$ mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm, $Y = C[0,1]$, $T : X \to Y, f \mapsto f'$. T abgeschlossen, aber nicht stetig. 8.7 nicht anwendbar, da $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum.

(iii). $X = C^\infty[0,1]$ mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm, $T : X \to X; f \mapsto f'$. T hat abgeschlossenen Graphen, aber T nicht stetig.

Teil IV

Satz von Hahn-Banach & Dualitätstheorie

9 Satz von Hahn-Banach

Definition (i). Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt X^* der algebraische Dual von X: $\mathbb{K}$-Vektorraum der linearen Funktionale ($X^* \subseteq \mathbb{K}^X$).

(ii). Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann bezeichne X_0 den assoziierten $\mathbb{R}$-Vektorraum, der durch Beschränkung der Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ entsteht.

9.1 Lemma

Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die Abbildung

$$j : (X^*)_0 \to (X_0)^* : j(f) := \operatorname{Re} f$$

ist ein ($\mathbb{R}$-linearer) Isomorphismus. Für $f \in X^*$ gilt:

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - \imath \cdot \operatorname{Re} f(\imath x)$$

Ist zusätzlich X normiert, dann $j((X')_0) = (X_0)'$.

Beweis: Ist $f \in X^*$, dann $j(f) = \operatorname{Re} f \in (X_0)^*$ (klar). j ist bijektiv: Mit Angabe der Inversen

$$k : (X_0)^* \to (X^*)_0, k(g)(x) := g(x) - \imath \cdot g(\imath x)$$

Für $g \in (X_0)^*$ ist $f := k(g) \in X^*$:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x) + f(y) \\
f((\alpha + \imath\beta) \cdot x) &= g((\alpha + \imath\beta) \cdot x) - \imath \cdot g(\imath\alpha \cdot x - \beta \cdot x) \\
&= \alpha \cdot g(x) + \beta \cdot g(\imath x) - \imath\alpha \cdot g(\imath x) + \imath\beta \cdot g(x) \\
&= (\alpha + \imath\beta) \cdot (g(x) - \imath \cdot g(\imath x)) = (\alpha + \imath\beta) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

j und k sind $\mathbb{R}$-linear,

$$\begin{aligned}
(j \circ k)(g) &= \operatorname{Re}(k(g)) = g \\
(k \circ j)(f)(x) &= \operatorname{Re} f(x) - \imath \cdot \operatorname{Re} \underbrace{f(\imath x)}_{\imath \cdot f(x)} = \operatorname{Re} f(x) + \imath \cdot \operatorname{Im} f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Letzte Aussage klar mit dem vorherigen. □

9.2 Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i). Auswahlaxiom: Gegeben eine Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ von Mengen mit $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ sei $A_\alpha \neq \emptyset$ und $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$. Dann existiert eine Menge S, sodass $S \cap A_\alpha$ einelementig ist für alle $\alpha \in \mathcal{A}$.

(ii). Zornsches Lemma: Sei X eine prägeordnete Menge, mit der Eigenschaft, dass jede Kette in X eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt X (mindestens) ein maximales Element. (m maximales Element: Aus $x \in X, m \leq x$ folgt $x \leq m$.)

(iii). Wohlordnungssatz von Zermelo: Jede Menge besitzt eine Wohlordnung. (X wohlgeordnet mit „$\leq$“: X (total-)geordnet und jede nichtleere Teilmenge besitzt ein kleinstes Element.)

Bemerkung Auch äquivalent zu Auswahlaxiom sind

(iv). X Menge $\Rightarrow \exists f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$ mit $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$.

(v). $(A_\alpha; \alpha \in \mathcal{A})$ Familie von Mengen mit $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $A_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \neq \emptyset$, wobei

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha := \{x : \mathcal{A} \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha; \forall\alpha \in \mathcal{A} : x_\alpha \in A_\alpha\}$$

Beweis:

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Einfach mit (iv)
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Kompliziert
- (ii) $\Rightarrow$ (iii):

  Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{Z} := \{(A, \leq); A \subseteq X$ mit $\leq$ Wohlordnung auf $A\}$. Definiere Ordnung $\hat{\leq}$ auf $\mathcal{Z}$ durch $A \hat{\leq} B :\Leftrightarrow$

  (i). $A \subseteq B$

  (ii). Ordnung von A ist induziert von der von B

  (iii). A ist Anfangssegment von B, d.h. $\exists x \in B$ mit $A = \{y \in B; y < x\}$ oder $A = B$.

  für $A, B \in \mathcal{Z}$. Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$ eine Kette. Dann

$$C := \bigcup_{A\in\mathcal{K}} A$$

  mit Wohlordnung $x \leq y :\Leftrightarrow$ Ist A aus $\mathcal{K}$ mit $x, y \in A$, dann ist $x \leq y$ in A. Dann existiert nach Zornschen Lemma ein maximales Element B.

  Zu zeigen: $B = X$. Annahme: $B \neq X$. Sei $x_0 \in X\backslash B$. Auf $B \cup \{x_0\}$ definiere „$\leq$“:

$$x \leq y :\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq_B y & \text{falls}\, x, y \in B \\ x \leq x_0 & \text{für alle}\, x \in B \cup \{x_0\} \end{cases}$$

  Somit $(B \cup \{x_0\}, \leq)$ wohlgeordnet, $B \subset B \cup \{x_0\}$. Widerspruch zu B maximal.

$\square$

9.3 Satz (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach, Version für Vektorräume)

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, d.h. p positiv homogen ($\forall\alpha \geq 0 : p(\alpha\cdot x) = \alpha\cdot p(x)$) und subadditiv ($\forall x, y \in X : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$). Sei $L \subseteq X$ linearer Teilraum, $f \in L^*$ mit

$$\forall x \in L : \operatorname{Re} f(x) \leq p(x)$$

Dann gibt es $F \in X^*$ mit $F|_L = f$, $\forall x \in X : \operatorname{Re} F(x) \leq p(x)$.

Beweis: (i). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(1) Auf der Menge $\mathcal{Z} := \{g; g$ Operator von X nach $\mathbb{R}$, g Fortsetzung von f, $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in D(g)\}$ wird durch

$$g_1 \leq g_2 :\Leftrightarrow g_2 \,\text{ist Fortsetzung von}\, g_1$$

eine Ordnung definiert. Sei $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ eine Kette. Definiere

$$D(h) := \bigcup_{g \in Y} D(g)$$

Für $x \in D(h) : h(x) := g(x)$ falls $x \in D(g)$. Dann h wohldefiniert und $h \in \mathcal{Z}$: $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$, dann $g_1 \leq g_2$ oder $g_2 \leq g_1$ und somit $g_1(x) = g_2(x)$. Dann $h \geq g$ für alle $g \in \mathcal{Y}$. Nach Zornschen Lemma existiert ein maximales Element F in $\mathcal{Z}$. (Zu zeigen: $D(F) = X$; es genügt zu zeigen: Falls $x \in X \backslash D(F)$, dann gibt es eine Fortsetzung g von F auf $\operatorname{lin}(D(F) \cup \{x\})$.

(2) Sei $a \in X \backslash L$. Setze f fort auf $X_1 := \operatorname{lin}(L \cup \{a\})$ unter Erhaltung der geforderten Ungleichung.

Für jedes $y \in X_1$ gibt es eindeutige $x \in L, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $y = x + \lambda \cdot a$. Die Fortsetzungen $F \in X_1^*$ von f sind gegeben durch

$$F_\gamma(x + \lambda \cdot a) = f(x) + \gamma \cdot \lambda \qquad (x \in L, \lambda \in \mathbb{R})$$

und zwar mit $\gamma = F_\gamma(a)$. Zu zeigen: γ kann so gewählt werden, dass

$$\forall x \in L, \lambda \in \mathbb{R} : F_\gamma(x + \lambda \cdot a) \leq p(x + \lambda \cdot a)$$

Es genügt die Ungleichung für $\lambda = \pm 1$ zu haben. (Für $\lambda = 0$ klar, für $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} F_\gamma(x + \lambda \cdot a) &= |\lambda| \cdot F\left(\frac{x}{|\lambda|} + \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot a\right) \leq |\lambda| \cdot p\left(\frac{x}{|\lambda|} + \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot a\right) \\ &= p(x + \lambda \cdot a) \end{aligned}$$

Also zu zeigen: Es existiert $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in L$:

$$\underbrace{F_\gamma(x + a)}_{= f(x) + \gamma} \leq p(x + a) \qquad \underbrace{F_\gamma(y - a)}_{= f(y) - \gamma} \leq p(y - a)$$

d.h. für alle $x, y \in L$:

$$f(y) - p(y - a) \leq \gamma \leq p(x + a) - f(x)$$

Für alle $x, y \in L$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x + y) \leq p(x + y) = p((x + a) + (y - a)) \\ &\leq p(x + a) + p(y - a) \\ \Rightarrow f(y) - p(y - a) &\leq p(x + a) - f(x) \end{aligned}$$

Damit

$$S := \sup\{f(y) - p(y - a); y \in L\} \leq \inf\{p(x + a) - f(x); x \in L\} =: I$$

Jedes $\gamma \in [S, I]$ erfüllt die gewünschte Ungleichung.

(ii). $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Auf $f_0 := \operatorname{Re} f$ und X_0 wird der Fall „$\mathbb{K} = \mathbb{R}$“ angewendet. Man erhält eine Fortsetzung $F_0 \in (X_0)^*$ mit $F_0(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 9.1 existiert eindeutiges $F \in X^*$ mit $F_0 = \operatorname{Re} F$. Mit Lemma 9.1: F auch Fortsetzung von f.

□

9.4 Folgerung (Folgerung: Satz von Hahn-Banach, Version für halbnormierte Räume)

Sei (X, p) ein halbnormierter Raum. Sei $L \subseteq X$ linearer Teilraum, $f \in L^*$ mit

$$\forall x \in L : |f(x)| \leq p(x)$$

Dann gibt es $F \in X^*$ mit $F|_L = f$ und $|F(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: p sublinear ist klar. Nach Satz 9.3 gibt es $F \in X^* : F|_L = f$ und für alle $x \in X$ gilt $\operatorname{Re} F(x) \leq p(x)$. Sei $x \in X$. Dann gibt es $\gamma \in \mathbb{K}, |\gamma| = 1$ mit

$$|F(x)| = \gamma \cdot F(x)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \gamma \cdot F(x) = F(\gamma \cdot x) = \operatorname{Re} F(\gamma \cdot x) \\ &\leq p(\gamma \cdot x) = \underbrace{|\gamma|}_{=1} \cdot p(x) = p(x) \end{aligned}$$

□

Bemerkung Satz 9.4, falls X normiert und separabel, kann ohne Zornsches Lemma bewiesen werden: Es gibt $L =: L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots$ Teilräume mit $\operatorname{codim} L_n$ in L_{n-1} ist 1 und mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ dicht in X. ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dichte Folge in X, $L_n := \operatorname{lin}(L_0 \cup \{x_1, \dots, x_n\})$; mit Streichung).
f fortsetzen auf $L_1, L_2, \dots$ mit Schritt (2) von Satz 9.3. Dann f zu F_0 fortgesetzt auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$,

$$\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n : |F_0(x)| \leq \|x\|$$

Proposition 7.3: Fortsetzung F auf X. Gegebenenfalls noch Komplexifizierung.

9.5 Folgerung

Sei X ein normierter Raum.

(i). Sei $L \subseteq X$ ein Teilraum, $f \in L'$. Dann gibt es $x' \in X'$:

$$x'|_L = f \qquad \|x'\| = \|f\|_L = \sup\{|f(x)|; x \in L, \|x\| \leq 1\}$$

Beweis: Für $x \in L$ gilt $|f(x)| \leq \|f\|_L \cdot \|x\|$. Verwende Satz 9.4 mit $p(x) := \|f\|_L \cdot \|x\|$. Das liefert $x' \in X'$ mit

$$x'|_L = f \qquad |x'(x)| \leq \|f\|_L \cdot \|x\|$$

Daher $\|x'\| \leq \|f\|_L$. „$\geq$" klar wegen $L \subseteq X$ (und x' Fortsetzung von f). □

(ii). Sei $L \subseteq X$ Teilraum, $x_0 \in X \setminus L$ mit $d := \operatorname{dist}(x_0, L) > 0$ (automatisch erfüllt, falls L abgeschlossen). Dann gibt es $x' \in X'$ mit

$$x'(x_0) = d \qquad x'|_L = 0 \qquad \|x'\| = 1$$

Beweis: Auf $L_1 := \operatorname{lin}(L \cup \{x_0\})$ sei

$$f(x + \lambda \cdot x_0) := \lambda \cdot d \qquad (x \in L, \lambda \in \mathbb{K})$$

Dann f wohldefiniert, $f(x_0) = d$, $f|_L = 0$. Für $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, x \in L$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x + \lambda \cdot x_0\| &= |\lambda| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot x + x_0 \right\| \geq |\lambda| \cdot |d| \\ &= |f(x + \lambda \cdot x_0)| \end{aligned}$$

Daher gilt $\|f\| \leq 1$. Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L mit $\|x_n - x_0\| \to d$. Damit

$$\left| f\left(\frac{1}{\|x_n - x_0\|} \cdot (x_n - x_0) \right) \right| = \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \cdot d \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

also $\|f\| \geq 1$. Dann x' aus (i). □

(iii). $\forall x \in X\backslash\{0\} \exists x' \in X'$:

$$x'(x) = \|x\| \qquad \|x'\| = 1 \qquad x'(0) = 0$$

Beweis: (ii) mit $L = \{0\}$. □

(iv). $\forall x \in X$:

$$\|x\| = \sup\{|x'(x)|; x' \in X', \|x'\| \leq 1\}$$

Beweis: „$\geq$“ ist klar wegen $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$. Aus (iii) folgt „$\leq$“.

Bemerkung: Sei $x \in X$. Dann ist $X' \ni x' \mapsto x'(x) \in \mathbb{K}$ linear, die Norm dieses Funktionals ist $\|x\|$. □

(v). Ist $x \in X, \langle\, x, x' \,\rangle := x'(x) = 0$ für alle $x' \in X'$, so gilt $x = 0$.

Beweis: Klar mit (iii). *Folgerung: $\langle\, X, X' \,\rangle$ ist trennend in X.* □

(vi). Seien $x_1, \ldots, x_n \in X$ linear unabhängig. Dann gibt es $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$:

$$\langle\, x_j, x'_k \,\rangle = \delta_{jk}$$

Beweis: Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $L_j := \text{lin}\{x_k; k \neq j\}$. Dann $x_j \notin L_j$. Nach (ii) gibt es $x'_j \in X'$ mit

$$\langle\, x_j, x'_j \,\rangle = 1 \qquad x'_j|_{L_j} = 0$$ □

Definition Sei X ein normierter Raum. Dann heißt $X'' := (X')'$ der Bidual und $X''' := (X'')'$ der Tridual von X.

9.6 Folgerung

Sei X ein normierter Raum. Sei $\kappa : X \to X''$ definiert durch

$$\kappa(x)(x') := x'(x) = \langle\, x, x' \,\rangle \qquad (x \in X, x' \in X')$$

Dann ist κ linear ($\kappa(X) \subseteq X''$), $\kappa : X \to X''$ ist stetig,

$$\forall x \in X : \|\kappa(x)\|_{X''} = \|x\|$$

Insbesondere ist κ injektiv.

Beweis: (i). Für alle $x \in X$ ist $\kappa(x)$ linear auf X' wegen Vektorraumstruktur. Für $x \in X, x' \in X'$ gilt

$$|\kappa(x)(x')| = |x'(x)| \leq \|x\| \cdot \|x'\|$$

somit $\kappa(x) \in (X')'$.

(ii). κ linear, da $x' \in X'$ lineare Funktionale sind. Letzte Gleichheit ist Folgerung 9.5(iv). Damit auch κ stetig.

□

Definition Mittels κ (kanonische Einbettung) kann man X als Teilraum von X'' auffassen (Notation: $X \subseteq X''$). X heißt reflexiv, falls κ surjektiv ist.

Bemerkung *Jeder normierte reflexive Raum ist vollständig: $X'' = (X')'$ ist vollständig nach Satz 4.4. Daher auch $X = X''$ vollständig.*

Beispiel (i). $c_0' = \ell_1$. Bedeutung: $j : \ell_1 \to c_0'$ sei definiert durch

$$j(x)(y) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j \qquad (x \in \ell_1, y \in c_0)$$

Dann ist j ein Normisomorphismus. Übung: $j(\ell_1) \subseteq c_0'$, $\|j(x)\| = \|x\|$. j ist linear (klar) und surjektiv.

(ii). $\ell_1' = \ell_\infty$. Dabei $j : \ell_\infty \to \ell_1'$ definiert durch

$$j(x)(y) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j \qquad (x \in \ell_\infty, y \in \ell_1)$$

Dann ist $j(x) : \ell_1 \to \mathbb{K}$ linear (klar), $|j(x)(y)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1$. Damit $\|j(x)\| \leq \|x\|_\infty$. Wegen

$$\begin{aligned} \|j(x)\| &\geq \sup\{|j(x)(e_n)|; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty \end{aligned}$$

folgt $\|j(x)\| = \|x\|_\infty$.

j ist linear (klar) und surjektiv: Sei $\eta \in \ell_1'$. Definiere

$$x_j := \eta(e_j) \qquad (j \in \mathbb{N})$$

Dann $|x_j| = |\eta(e_j)| \leq \|\eta\|$, also $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell_\infty$. Für $j \in \mathbb{N}$:

$$j(x)(e_j) = x_j = \eta(e_j)$$

Damit folgt $j(x)(y) = \eta(y)$ für alle $y \in c_c$. Da $j(x), \eta$ stetig sind und c_c dicht in ℓ_1 ist, folgt $j(x) = \eta$.

Damit $c_0'' = \ell_1' = \ell_\infty \neq c_0$, also c_0 nicht reflexiv.

(iii). Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann $\ell_p' = \ell_q$, $(\ell_p')' = \ell_q' = \ell_p$, d.h. ℓ_p ist reflexiv (Übung).

9.7 Folgerung

Sei X ein normierter Raum, $D \subseteq X$. Dann äquivalent:

(i). D total in X, d.h. $\overline{\operatorname{lin} D} = X$.

(ii). Ist $x' \in X', x'|_D = 0$, so ist $x' = 0$.

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$x'|_D = 0 \Rightarrow x'|_{\operatorname{lin} D} = 0 \Rightarrow x' = 0$$

- $(ii) \Rightarrow (i)$:

Annahme D nicht total, d.h. $L := \overline{\operatorname{lin} D} \neq X$, also gibt es $x_0 \in X \backslash L$ und $x' \in X'$ mit

$$x'|_L = 0 \qquad\qquad x'(x_0) \neq 0$$

nach Folgerung 9.5(ii). Widerspruch!

□

10
Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Erinnerung: Für $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar gilt

$$\mu[f = \pm\infty] = \mu(\{x \in \Omega; f(x) = \pm\infty\}) = 0$$

Definition (i). Sei $1 \leq p < \infty$. Wir definieren

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu; \mathbb{K}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K}; f \,\text{mb.}, \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}$$
$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Für $p = \infty$ sei

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K}; f \,\text{mb}, \exists c \geq 0 : \mu[|f| > c] = 0 \}$$
$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0; \mu[|f| > c] = 0\} =: \operatorname{esssup} |f|$$

(ii). f heißt messbar $:\Leftrightarrow$ Für jede offene Mengen $U \subseteq \mathbb{K}$ gilt $[f \in U] \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ messbar. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist im Allgemeinen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ nicht zugelassen, sonst Problem mit Vektorraumstruktur.

10.1 Satz (i). Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ ist dann $|f \cdot g| \in \mathcal{L}^1$,

$$\int |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(Höldersche Ungleichung)

(ii). Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{L}^p$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

also insbesondere $f + g \in \mathcal{L}^p$ (Minkowski-Ungleichung). $\|\cdot\|_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis: (i). (1) $p = 1, q = \infty$:

$$\mu[|g| > \|g\|_\infty] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\left[|g| > \|g\|_\infty + \frac{1}{n}\right]}_{0} = 0$$

Damit folgt

$$\int |f \cdot g| \, d\mu = \int_{[|g| \leq \|g\|_\infty]} |f \cdot g| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

(2) $1 < p \leq q < \infty$: Dann Beweis wie für ℓ_p (vgl. §5), ausgehend von

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \qquad (a, b \geq 0)$$

Beachte: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-fast überall.

(ii). (1) $p = 1$:

$$\int |f+g|\,d\mu \le \int |f|\,d\mu + \int |g|\,d\mu$$

(2) $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\le (2\cdot \max\{|f|,|g|\})^p \le 2^p \cdot \max\{|f|^p, |g|^p\} \\ &\le 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

also $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Weiter wie für ℓ_p.

(3) $p = \infty$: Für $x \in \Omega \backslash ([|f| > \|f\|_\infty] \cup [|g| > \|g\|_\infty])$ gilt:

$$\begin{aligned} &|f(x) + g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ &\Rightarrow \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

(4) Dreiecksungleichung ist bewiesen, $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$ ist klar, also Halbnorm.

□

10.2 Lemma

Sei (X, p) ein halbnormierter Raum. Dann ist $L := \{x \in X; p(x) = 0\}$ ein Teilraum von X und auf $X/_L$ wird durch $\|\tilde{x}\| := p(x)$ $(x \in X)$ eine Norm erklärt.

Bemerkung Äquivalenzrelation auf X erklärt durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in L$, $X/_L = X/_\sim = \{x + L; x \in X\}$ mit Operationen

$$\begin{aligned} (x+L) + (y+L) &:= (x+y) + L \\ \lambda \cdot (x+L) &:= \lambda \cdot x + L \end{aligned}$$

(sind wohldefiniert).

Beweis: $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert: Aus $x \sim y$ folgt $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) = 0$, also $p(x) = p(y)$. Rest: leicht. □

Definition Für $1 \le p \le \infty$ sei $\mathcal{N}_p := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu); \|f\|_p = 0\}$. Dann ist

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/_{\mathcal{N}_p}$$

ein normierter Raum.

10.3 Satz

$L^\infty(\mu)$ ist vollständig.

Beweis: Übung □

10.4 Satz

Sei $1 \le p < \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$. Dann ist

$$g := \sum_{n=1}^\infty |f_n| \in \hat{\mathcal{L}}^p(\mu) := \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}; f \text{ mb}, \int |f|^p\,d\mu < \infty\}$$

und

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

ist fast überall absolut konvergent; setze $f(x) = 0$, wo die Reihe nicht konvergent. Dann gilt

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n f_j \right\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\int \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{j=1}^{n} |f_j|\right\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_p < \infty$$

Wegen $\left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|\right)^p \uparrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|\right)^p$ folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz:

$$\int \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|}_{g}\Big)^p d\mu < \infty$$

Insbesondere ist $g(x) < \infty$ μ-fast überall, für diese x ist

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

absolut konvergent. Außerdem

$$\underbrace{\left|f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right|}_{\to 0\ (n\to\infty)} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(x)| \leq g(x)$$

auf $[g < \infty]$. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz:

$$\int \left|f - \sum_{j=1}^{n} f_j\right|^p d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

□

10.5 Satz (Satz von Fischer-Riesz)

Sei $1 \leq p < \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_p$. Dann existieren $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ sodass $f_{n_j}(x) \to f(x)$ fast überall und $|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$ fast überall $(j \in \mathbb{N})$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$. $L^p(\mu)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \infty$$

(vgl. 3.1). Setze $f_{n_0} := 0, g_j := f_{n_j} - f_{n_{j-1}}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{k=1}^{j} g_k = f_{n_j}$$

und auf $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Satz 10.4 anwendbar. Mit $g := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|$ und $f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ gilt die Behauptung. □

Bemerkung Elemente von $L^p(\mu)$ werden im Allgemeinen als Funktionen aufgefasst.

10.6 Lemma

Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $g \in L^q(\mu)$ sei $j(g) \in L^p(\mu)'$ definiert durch

$$\langle f, j(g) \rangle := \int f \cdot g \, d\mu \qquad (f \in L^p(\mu))$$

Dann $j : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ linear und isometrisch.

Beweis: • Aus der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\left|\int f\cdot g\,d\mu\right| \le \|f\|_p\cdot\|g\|_q \qquad (f\in L^p)$$
$$\Rightarrow \|j(g)\|\le\|g\|_q$$

also $j(g)\in L^p(\mu)'$, da $j(g)$ offenbar linear.

- j ist linear (klar). Zu zeigen: $\|j(g)\|\ge\|g\|_q$. Ohne Einschränkung $g\neq 0$.

  (i). Für $1<p<\infty$ setze
  $$f:=\overline{\operatorname{sgn} g}\cdot|g|^{q-1}$$
  Dann f messbar,
  $$\begin{aligned}
  |f|^p=|g|^{p\cdot(q-1)}&=|g|^q\in L^1(\mu)\\
  \Rightarrow \|f\|_p^p&=\|g\|_q^q\\
  \Rightarrow \left\langle \frac{f}{\|f\|_p}, j(g)\right\rangle &= \frac{1}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}\cdot\int\overline{\operatorname{sgn} g}\cdot|g|^{q-1}\cdot g\,d\mu\\
  &=\|g\|_q^{-\frac{q}{p}}\cdot\int|g|^q\,d\mu=\|g\|_q^{-\frac{q}{p}}\cdot\|g\|_q^q\\
  &=\|g\|_q^{q-\frac{q}{p}}=\|g\|_q
  \end{aligned}$$

  (ii). Für $p=\infty, q=1$: Setze $f:=\overline{\operatorname{sgn} g}$. Dann ist $\|f\|_\infty=1$,
  $$\langle f, j(g)\rangle=\int\underbrace{\overline{\operatorname{sgn} g}\cdot g}_{=|g|}\,d\mu=\|g\|_1$$

  (iii). Für $p=1, q=\infty$: Sei $0<c<\|g\|_\infty$. Dann ist
  $$\mu[|g|\ge c]>0$$
  Man findet $0\le f\in L^1(\mu), \|f\|_1=1, f=0$ auf $[|g|<c]$. (Es gibt $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Omega$ mit $G_n\uparrow\Omega, \mu(G_n)<\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann
  $$\underbrace{\mu(G_n\cap[|g|\ge c])}_{<\infty,>0\text{ für große }n}\to\mu([|g|\ge c])>0$$
  Wähle $f_1:=1_{G_n\cap[|g|\ge c]}$ für n hinreichend groß, noch normieren.) Dann
  $$\begin{aligned}
  \langle\overline{\operatorname{sgn} g}\cdot f, j(g)\rangle&=\int f\cdot\underbrace{\overline{\operatorname{sgn} g}\cdot g}_{=|g|}\,d\mu\\
  &=\int_{[|g|>c]}f\cdot|g|\,d\mu\ge c\cdot\|f\|_1=c
  \end{aligned}$$
  Also $\|j(g)\|\ge c$ für alle $0<c<\|g\|_\infty$.

□

Bemerkung (i). Im Sinne der Abbildung j schreibt man $L^q(\mu)\subseteq L^p(\mu)'$.

(ii). Im Folgenden sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{fin}}&:=\{A\in\mathcal{A};\mu(A)<\infty\}\\
\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})&:=\operatorname{lin}\{1_A;A\in\mathcal{A}_{\text{fin}}\}
\end{aligned}$$

10.7 Lemma

Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i). Sei $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann

$$\|g\|_q = \sup\left\{\left|\int f \cdot g \, d\mu\right| ; f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}}), \|f\|_p \le 1\right\}$$

(ii). Sei $g : \Omega \to [0,\infty]$ messbar und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})$ gelte $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Es gebe $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)'$, sodass

$$\varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}}))$$

Dann $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $\|g\|_q \le \|\varphi\|$.

Beweis: (i). Für $1 \le p < \infty$ ist $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})$ dicht in $\mathcal{L}^p(\mu)$ (Sombrero-Lemma+Beppo-Levi). Dann Aussage klar mit 10.6. Für $q = 1$ beweisen wir den Fall $g \ge 0$ (nur dieser Fall wird später benutzt). Es gibt $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\text{fin}}$ mit $G_n \uparrow \Omega$. Dann

$$\int \underbrace{1_{G_n}}_{\in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}}), \|\cdot\|_\infty \le 1} \cdot g \, d\mu \overset{\text{mK}}{\to} \underbrace{\int g \, d\mu}_{\|g\|_1} \qquad (n \to \infty)$$

(ii). Es gibt $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^q(\mu)$ mit $g_n \ge 0, g_n \uparrow g$, zum Beispiel $g_n := (g \wedge n) \cdot 1_{G_n}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})$, $\|f\|_p \le 1$ folgt:

$$\left|\int f \cdot g_n \, d\mu\right| \le \int \underbrace{|f|}_{\in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})} \cdot g_n \, d\mu \le \underbrace{\int |f| \cdot g \, d\mu}_{\varphi(|f|)} \le \|\varphi\|$$

und aus (i) folgt

$$\|g_n\|_q \le \|\varphi\|$$

Für $q < \infty$ folgt $\|g\|_q < \infty$ mit Satz von der monotonen Konvergenz. Für $q = \infty$:

$$\mu[g > \|\varphi\|] = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [g_n > \|\varphi\|]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu[g_n > \|\varphi\|] \overset{\|g_n\| \le \|\varphi\|}{=} 0$$

$$\Rightarrow \|g\|_\infty \le \|\varphi\|$$

□

Ziel: Für $p \in [1,\infty)$ gilt $L^q(\mu) = L^p(\mu)'$.

Definition (i). ν heißt μ-stetig (auch: absolut stetig) :$\Leftrightarrow$ Für alle $F \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(F) = 0 \Rightarrow \nu(F) = 0$.

(ii). f heißt Dichte von ν bzgl. μ :$\Leftrightarrow$ $f : \Omega \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-messbar und für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

10.8 Satz (Satz von Radon-Nikodým)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, ν ein μ-stetiges Maß auf $\mathcal{A}$, dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ.

Beweis: Vergleich §14 oder Heinz Bauer, Maß- und Integrationstheorie □

Bemerkung Für $f : \Omega \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-messbar ist durch

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu$$

ein Maß ν erklärt. Notation: $\nu = f\,\mu$.

Für die Anwendung muss man Funktionale auf $L^p(\mu)$ als Linearkombination positiver Funktionale darstellen.

Definition $\varphi \in L^p(\mu)'$ heißt positiv $:\Leftrightarrow \forall f \in L^p(\mu), f \geq 0 : \varphi(f) \geq 0$. Notation: $\varphi \geq 0$.

10.9 Lemma

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi \in L^p(\mu)'$. Dann gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_4 \in L^p(\mu)'$ mit $\varphi_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, 4)$, sodass

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \imath\,(\varphi_3 - \varphi_4)$$

(Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entfallen φ_3, φ_4.)

Beweis: (i). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Definiere $\varphi^+ \in L^p(\mu)'$: Für $f \in L^p(\mu), f \geq 0$ sei

$$\varphi^+(f) := \sup\{\varphi(g); g \in L^p(\mu), 0 \leq g \leq f\}$$

Dann ist φ „positiv und linear“ auf $L^p_+(\mu) := \{f \in L^p(\mu); f \geq 0\}$: Für $f \in L^p_+(\mu), \lambda \in [0,\infty)$ gilt

$$\varphi^+(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \varphi^+(f)$$

Für $f, g \in L^p_+(\mu)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi^+(f) + \varphi^+(g) &= \sup\{\varphi(h_1) + \varphi(h_2); h_1, h_2 \in L^p(\mu), 0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g\} \\
&= \sup\{\varphi(h_1 + h_2); h_1, h_2 \in L^p(\mu), 0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g\} \\
&\overset{*}{=} \varphi^+(f + g)
\end{aligned}$$

(Zu $(*)$: Ist $0 \leq h \leq f + g$, so gibt es h_1, h_2 mit $h = h_1 + h_2, 0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g$, zum Beispiel $h_1 := \min\{h, f\}$.)

Man kann φ^+ linear auf $L^p(\mu)$ fortsetzen:

$$\varphi^+(f) := \varphi^+(f^+) - \varphi^+(f^-)$$

mit $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- = (-f)^+$. Für Linearität beachte: Wenn $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \geq 0$, dann $\varphi^+(f) = \varphi^+(f_1) - \varphi^+(f_2)$ wegen

$$\begin{aligned}
f = f^+ - f^- &= f_1 - f_2 \\
\Rightarrow 0 \leq f^+ + f_2 &= f_1 + f^- \\
\Rightarrow \varphi^+(f^+ + f_2) &= \varphi^+(f_1 + f_-) \\
\Rightarrow \varphi^+(f^+) + \varphi^+(f_2) &= \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f^-) \\
\Rightarrow \underbrace{\varphi^+(f^+) - \varphi^+(f^-)}_{\varphi^+(f)} &= \varphi^+(f_1) - \varphi^+(f_2)
\end{aligned}$$

Damit $\varphi^+ \in L^p(\mu)'$: Für $f \geq 0$ gilt

$$|\varphi^+(f)| \leq \|\varphi\| \cdot \sup\{\|g\|_p; 0 \leq g \leq f\} = \|\varphi\| \cdot \|f\|$$

und für $f \in L^p(\mu)$ folgt somit

$$\begin{aligned} |\varphi^+(f)| &= |\underbrace{\varphi^+(f^+)}_{\geq 0} - \underbrace{\varphi^+(f^-)}_{\geq 0}| \leq \max\{|\varphi^+(f^+)|, |\varphi^+(f^-)|\} \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \max\{\|f^+\|_p, \|f^-\|_p\} \leq \|\varphi\| \cdot \|f\| \end{aligned}$$

also $\|\varphi^+\| \leq \|\varphi\|$.

Weiterhin gilt für alle $f \geq 0$: $\varphi(f) \leq \varphi^+(f)$. Für $\varphi^- := \varphi^+ - \varphi$ gilt daher $\varphi^-(f) \geq 0$ für $f \geq 0$. Damit Darstellung

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

(ii). $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Beachte, dass

$$L^p(\mu; \mathbb{C}) = L^p(\mu; \mathbb{R}) + \imath\, L^p(\mu; \mathbb{R})$$

Auf $L^p(\mu; \mathbb{R})$ setze

$$(\operatorname{Re}\varphi)(f) := \operatorname{Re}\varphi(f) \qquad\qquad (\operatorname{Im}\varphi)(f) := \operatorname{Im}\varphi(f)$$

und zerlege $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ wie in (i). Dann $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ linear fortsetzen auf $L^p(\mu; \mathbb{C})$,

$$\varphi_j(f) = \varphi_j(\operatorname{Re} f) + \imath \cdot \varphi_j(\operatorname{Im} f)$$

□

10.10 Satz

Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Beweis:

- Wegen Lemma 10.9 genügt es zu zeigen: Für $\varphi \in L^p(\mu)', \varphi \geq 0$ gibt es ein $g \in L^q(\mu)$, sodass

$$\forall f \in L^p(\mu) : \varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu$$

- Sei also $\varphi \in L^p(\mu)', \varphi \geq 0$. Definiere für $A \in \mathcal{A}$:

$$\nu(A) := \lim_{n \to \infty} \varphi(\underbrace{1_{A \cap G_n}}_{\in L^p})$$

wobei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, G_n \uparrow \Omega, \mu(G_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist ν ein Maß:

(i). $\nu(\emptyset) = 0$ ist klar.

(ii). Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} &1_{(\bigcup_{j=1}^k A_j) \cap G_n} \overset{L^p}{\to} 1_{A \cap G_n} \qquad (k \to \infty) \\ \Rightarrow &\sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi(1_{A_j \cap G_n}) = \varphi(1_{A \cap G_n}) \end{aligned}$$

Satz von der monotonen Konvergenz für Summen:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(A_j) = \lim_{n \to \infty} \varphi(1_{A \cap G_n}) = \nu(A)$$

(In $L^1(\mathbb{N}) : f_n(j) := \varphi(1_{A_j \cap G_n})$, dann $f_n \uparrow f$ mit $f(j) := \nu(A_j)$. Satz von der monotonen Konvergenz: $\int f_n \to \int f$ $(n \to \infty)$.)

Ist insbesondere $\mu(A) < \infty$, dann $1_{A \cap G_n} \overset{L^p}{\to} 1_A$ $(n \to \infty)$, daher $\nu(A) = \varphi(1_A)$. Außerdem ist ν μ-stetig, denn $\mu(A) = 0 \Rightarrow 1_A = 0$, also $\nu(A) = \varphi(0) = 0$.

- Aus dem Satz von Radon-Nikodým: Es existiert $g : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-messbar, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A}_{\text{fin}} : \varphi(1_A) = \nu(A) = \int 1_A \cdot g \, d\mu$$

Ist $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})$, dann

$$\varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu$$

Aus Lemma 10.7(ii): $g \in L^q(\mu)$. Dann folgt aus der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\text{fin}})$ in L^p:

$$\forall f \in L^p(\mu) : \varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu$$

$\square$

Bemerkung (i). Für $1 < p < \infty$ gilt $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$ auch ohne „σ-endlich“. Für $p = 1$ ist dies genau dann richtig, wenn μ „lokalisierbar“ ist und L^∞ leicht modifiziert wird. (vgl. E. Behrends, MINT)

(ii). Sei $(K, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra der Baire-Mengen (=kleinste σ-Algebra, die alle $f \in C(K)$ messbar macht). Sei μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist durch

$$\varphi(f) := \int_K f \, d\mu \qquad (f \in C(K), \mathbb{K} = \mathbb{R})$$

ein $\varphi \in C(K)'$ definiert. Tatsächlich: Jedes $\varphi \in C(K)'$ besitzt eine Zerlegung $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ und jedes $\varphi \in C(K)'$ mit $\varphi \geq 0$ wird von einem Maß μ wie oben erzeugt. (Darstellungssatz von Riesz)

11 Initialtopologie, topologische Vektorräume & schwache Topologie

- Sei S eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Dann ist
$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{T}'; \mathcal{T}' \text{ Topologie auf } S : \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{S}\}$$
die gröbste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält (die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie). $\mathcal{S}$ ist die Subbasis der Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. ($\mathcal{S}$ Subbasis von $\mathcal{T} :\Leftrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$.)
- Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, dann ist $\mathcal{B}$ auch Subbasis von $\mathcal{T}$. Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis, dann ist
$$\mathcal{B} := \Bigg\{ \underbrace{\bigcap \mathcal{F}}_{=\bigcap_{U \in \mathcal{F}} U} ; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich} \Bigg\}$$
eine Basis der Topologie. (Beachte: $X \in \mathcal{B}$, da für $\mathcal{F} = \emptyset : \bigcap \mathcal{F} = X$ gilt.)

Beweis:
- Behauptung:
$$\mathcal{T}' := \left\{ \bigcup \mathcal{R}; \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$
ist eine Topologie.
- Sind $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{B}$, so gilt
$$\begin{aligned}\left(\bigcup \mathcal{R}_1\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{R}_2\right) &= \left(\bigcup_{U \in \mathcal{R}_1} U\right) \cap \left(\bigcup_{V \in \mathcal{R}_2} V\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{R}_1} \left(U \cap \left(\bigcup_{V \in \mathcal{R}_2} V\right)\right) \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{R}_1, V \in \mathcal{R}_2} U \cap V = \bigcup_{U \in \mathcal{R}_1, V \in \mathcal{R}_2} \underbrace{U \cap V}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{T}'\end{aligned}$$
Rest klar. Wegen $\mathcal{S}$ Subbasis folgt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

□

Es gilt: $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{T} \Rightarrow \{V \in \mathcal{B}; x \in S \cap V\}$ Umgebungsbasis von x.

- Seien S eine Menge, I eine Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $(S_\iota, \mathcal{T}_\iota)$ ein topologischer Raum. Seien $f_\iota : S \to S_\iota$ ($\iota \in I$) Abbildungen. Die Topologie
$$\mathcal{T}\left(\bigcup_{\iota \in I} \{f_\iota^{-1}(U_\iota); U_\iota \in \mathcal{T}_\iota\}\right)$$
ist die gröbste Topologie auf S, für die alle f_ι stetig sind. (Initialtopologie auf S bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$)
- Ist $I = \{1\}$ einelementig, so ist $\{f^{-1}(U); U \in \mathcal{T}_1\}$ die Initialtopologie. Spezialfall: Spurtopologie.

- Seien $(S_\iota, \mathcal{T}_\iota)$ topologische Räume für $\iota \in I$. Die Produkttopologie auf $S := \prod_{\iota\in I} S_\iota$ ist die Initialtopologie bzgl. $(\mathcal{P}_\iota)_{\iota\in I}$, wobei

  $$\mathcal{P}_\iota((x_\kappa)_{\kappa\in I}) = x_\iota$$

  Basis der Produkttopologie:

  $$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\iota\in F} U_\iota \times \prod_{\iota\in I\setminus F} S_\iota; F \subseteq I \,\text{endlich}, \forall \iota \in F : U_\iota \in \mathcal{T}_\iota \right\}$$

- Beispiel: Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so wird die Produkttopologie auf $M_1 \times M_2$ durch die Metrik

  $$d((x,y),(x',y')) := d_1(x,x') + d_2(y,y')$$

  erzeugt.

11.1 Satz

Seien $(S_0, \mathcal{T}_0)$, $(S, \mathcal{T})$, $((S_\iota, \mathcal{T}_\iota))_{\iota\in I}$ topologische Räume, $g : S_0 \to S$, $f_\iota : S \to S_\iota$ $(\iota \in I)$ und $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota\in I}$. Dann gilt für alle $s_0 \in S_0$:

(i). g stetig in $s_0 \Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota \circ g$ stetig in s_0

(ii). g stetig $\Leftrightarrow \forall \iota \in I : f_\iota \circ g$ stetig

(iii). Die Initialtopologie $\mathcal{T}'$ bzgl. g (auf S_0) ist gleich der Initialtopologie $\mathcal{T}''$ bzgl. $(f_\iota \circ g)_{\iota\in I}$.

Beweis: (i). „$\Rightarrow$“: Klar (Komposition stetiger Funktionen)

„$\Leftarrow$“:
Sei U eine Umgebung von $g(s_0)$. Es gibt $F \subseteq I$ endlich, $U_\iota \in \mathcal{T}_\iota$ $(\iota \in F)$:

$$g(s_0) \in \bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota) \subseteq U$$
$$\Rightarrow s_0 \in \bigcap_{\iota\in F} g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota)) = \bigcap_{\iota\in F} \underbrace{(f_\iota \circ g)^{-1}(U_\iota)}_{\in\mathcal{T}_0} \in \mathcal{T}_0$$

ist Umgebung von s_0 und

$$\bigcap_{\iota\in F} g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota)) = g^{-1}\left(\bigcap_{\iota\in F} f_\iota^{-1}(U_\iota)\right) \subseteq g^{-1}(U)$$

Also g stetig in s_0.

(ii). Klar.

(iii).
- g ist $\mathcal{T}' - \mathcal{T}$ stetig $\Rightarrow f_\iota \circ g$ $\mathcal{T}' - \mathcal{T}_\iota$ stetig $(\iota \in I) \Rightarrow \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$
- $f_\iota \circ g$ ist $\mathcal{T}'' - \mathcal{T}_\iota$ stetig $(\iota \in I) \overset{(ii)}{\Rightarrow} g$ ist $\mathcal{T}'' - \mathcal{T}$ stetig $\Rightarrow \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$.

□

Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. $\mathcal{T}$ heißt lineare Topologie (und $(X, \mathcal{T})$ topologischer Vektorraum), genau dann wenn die Abbildungen

$$\mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \overset{m}{\mapsto} \lambda \cdot x \in X$$
$$X \times X \ni (x, y) \overset{a}{\mapsto} x + y \in X$$

stetig sind.

Beispiel: (halb-)normierte Räume

11.2 Satz

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Dann gilt

(i). Für $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ ist die Abbildung

$$[\lambda] : X \to X, [\lambda](x) := \lambda \cdot x$$

ein Homöomorphismus.

(ii). Für $x \in X$ ist die Abbildung

$$[x] : X \to X, [x](y) := x + y$$

ein Homöomorphismus. Die Topologie $\mathcal{T}$ ist durch die Angabe einer Nullumgebungsbasis eindeutig bestimmt.

(iii). Ist $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$, so ist U absolut absorbierend, d.h. $\forall x \in X \exists \alpha > 0 : x \in \lambda \cdot U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq \alpha$.

Beweis: (i). Wegen $[\lambda]^{-1} = [\lambda^{-1}]$ genügt es zu zeigen: $[\lambda]$ ist stetig.

$$X \ni x \overset{j}{\mapsto} (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$$

ist stetig nach Satz 11.1. Daher $[\lambda] = m \circ j$ stetig.

(ii). Analog wie (i). Ist $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis, dann folgt, dass

$$\{x + U; U \in \mathcal{U}\}$$

eine Umgebungsbasis von x ist $(x \in X)$. Damit $\mathcal{T}$ bestimmt.

(iii). Wie in (i) folgt, dass $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda \cdot x$ stetig ist. Daher gibt es $\alpha_0 > 0$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \alpha_0 : \lambda \cdot x \in U$$

Für $|\lambda| > \alpha_0^{-1} =: \alpha$ folgt

$$x = \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot x}_{\in U} \in \lambda \cdot U$$ □

Definition Sei X ein normierter Raum mit Dual X' und sei $b : X \times X' \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform,

$$b(x, x') := \langle x, x' \rangle = x'(x)$$

Auf X definiere Initialtopologie bzgl. $(\langle \cdot, x' \rangle)_{x' \in X'}$ (schwache Topologie auf X, Notation: $\sigma(X, X')$).
Auf X' definiere Initialtopologie bzgl. $(\langle x, \cdot \rangle)_{x \in X}$ (schwach*-Topologie auf X', Notation: $\sigma(X', X)$)

Bemerkung (i). $\sigma(X, X'), \sigma(X', X)$ sind gröber als Normtopologie (Satz 11.1 *, wähle für erste Aussage g als* $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|) \to (X, \sigma(X, X'))$). Außerdem gilt $\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', X'')$.

(ii). $(X, \sigma(X, X'))$ und $(X', \sigma(X', X))$ sind topologische Vektorräume (Satz 11.3).

11.3 Satz

Seien X ein Vektorraum und $((X_\iota, \mathcal{T}_\iota))_{\iota \in I}$ eine Familie von topologischen Vektorräumen, $f_\iota : X \to X_\iota$ linear $(\iota \in I)$. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.

Beweis: (i). Vorspann: Seien X, Y, X_1, Y_1 topologische Räume, $f : X \to X_1, g : Y \to Y_1$ stetig. Dann ist

$$f \times g : X \times Y \to X_1 \times Y_1, (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

stetig. Zu zeigen: $P_{1,X_1 \times Y_1} \circ (f \times g)$ und $P_{2,X_1 \times Y_1} \circ (f \times g)$ sind stetig (Satz 11.1). Wegen

$$\begin{aligned} P_{1,X_1 \times Y_1}(f \times g)(x, y) &= P_{1,X_1 \times Y_1}(f(x), g(y)) = f(x) \\ &= f \circ P_{1,X_1 \times Y_1}(x, y) \\ P_{2,X_1 \times Y_1}(f \times g)(x, y) &= P_{2,X_1 \times Y_1}(f(x), g(y)) = g(y) \\ &= g \circ P_{2,X_1 \times Y_1}(x, y) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

(ii). Stetigkeit von $m : \mathbb{K} \times X \to X$. Es genügt zu zeigen: $\forall \iota \in I : f_\iota \circ m$ stetig nach Satz 11.1.

$$\begin{aligned} f_\iota \circ m(\lambda, x) &= f_\iota(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_\iota(x) \\ &= m_\iota \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \times f_\iota)(\lambda, x) \end{aligned}$$

d.h. $f_\iota \circ m = m_\iota \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \times f_\iota)$, letzteres stetig mit (i) und Stetigkeit von $m_\iota : \mathbb{K} \times X_\iota \to X_\iota$.

(iii). Stetigkeit von $a : X \times X \to X$: Für alle $\iota \in I$ ist

$$f_\iota \circ a = a_\iota \circ (f_\iota \times f_\iota)$$

stetig. Dann Satz 11.1.

□

In Definition von $\sigma(X, X'), \sigma(X', X)$ sind X, X' „gleichberechtigt“. Allgemeiner:

Definition (i). Seien X, Y Vektorräume und $b = \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear. Dann heißt $\langle X, Y \rangle$ ein duales Paar ($= (X, Y, b)$) und man definiert $\sigma(X, Y)$ als Initialtopologie auf X bzgl. $(\langle \cdot, y \rangle)_{y \in Y}$ sowie $\sigma(Y, X)$ als Initialtopologie auf Y bzgl. $(\langle x, \cdot \rangle)_{x \in X}$.

(ii). $\langle X, Y \rangle$ heißt trennend in X :⇔ $\{x \in X, \langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in Y \Rightarrow x = 0\}$

$\langle X, Y \rangle$ heißt trennend in Y :⇔ $\{y \in Y, \langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in X \Rightarrow y = 0\}$.

$\langle X, Y \rangle$ heißt trennend :⇔ $\langle X, Y \rangle$ trennend in X und Y.

Beispiel (i). Sei X ein Vektorraum, dann ist $\langle X, X^* \rangle$ trennend.

(ii). Sei X ein normierter Vektorraum, dann ist $\langle X, X' \rangle$ trennend (für trennend in X siehe 9.5(iii)).

Bemerkung Nullumgebungsbasis in X für $\sigma(X, Y)$, wobei $\langle X, Y \rangle$ ein duales Paar sei: Ist $F \subseteq Y$ endlich, $\varepsilon > 0$, so ist

$$\begin{aligned} U_{F,\varepsilon} &:= \{x \in X; \forall y \in F : |\langle x, y \rangle| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{y \in F} \{x \in X; |\langle x, y \rangle| < \varepsilon\} = \bigcap_{y \in F} \langle \cdot, y \rangle^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon)) \end{aligned}$$

eine $\sigma(X, Y)$-Nullumgebung. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{U_{F,\varepsilon}; F \subseteq Y \text{ endlich}, \varepsilon > 0\} \\ &= \{\underbrace{U_{F,1}}_{=:U_F}; F \subseteq Y \text{ endlich}\} \end{aligned}$$

eine Nullumgebungsbasis. Wir definieren $b_1 : X \to Y^*$,

$$b_1(x) := \langle x, \cdot \rangle = b(x, \cdot)$$

b_1 ist linear. Es gilt: b_1 injektiv ⇔ $\langle X, Y \rangle$ trennend in X. Dann „$X \subseteq Y^*$“. Entsprechend $b_2 : Y \to X^*$.

11.4 Satz

Sei $\langle\, X, Y \,\rangle$ ein duales Paar und sei $f \in X^*$ stetig bzgl. $\sigma(X, Y)$. Dann gibt es $y \in Y$ mit $f(x) = \langle\, x, y \,\rangle$ $(x \in X)$, d.h. $f = b_2(y)$.

Bemerkung (i). Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, so bezeichnet $(X, \mathcal{T})'$ den Vektorraum der stetigen Linearformen auf X. Damit Aussage von Satz 11.4: $(X, \sigma(X, Y))' = b_2(Y)$.

(ii). Für $f \in X^*$ definiert man $N(f) := \ker f := f^{-1}\{0\}$ (Kern von f).

11.5 Lemma

Seien X ein Vektorraum und $f, g_1, \ldots, g_n \in X^*$ mit

$$\bigcap_{j=1}^{n} N(g_j) \subseteq N(f)$$

Dann gibt es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ mit

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot g_j$$

Beweis: (i). Vorbemerkung: Seien X, Y, Z Vektorräume, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ linear, g surjektiv, $N(f) \supseteq N(g)$. Dann gibt es $\hat{f} : Z \to Y$ mit $f = \hat{f} \circ g$. (Setze $\hat{f}(g(x)) := f(x)$. Dann $\hat{f}$ wohldefiniert: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 \in N(g) \subseteq N(f) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$)

(ii). Anwendung von (i):
Sei $g : X \to g(X) \subseteq \mathbb{K}^n, g(x) := (g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Dann

$$N(g) = \bigcap_{j=1}^{n} N(g_j) \subseteq N(f)$$

nach Voraussetzung. Nach (i) gibt es $\hat{f} : g(X) \to \mathbb{K}$ linear. Setze $\hat{f}$ auf $\mathbb{K}^n$ fort. Dann gilt $f = \hat{f} \circ g$. Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$:

$$\hat{f}(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot y_j$$

Damit

$$f = \hat{f} \circ g = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot g_j$$

□

Beweis: (von 11.4)
Da f $\sigma(X, Y)$-stetig ist, gibt es $F \subseteq Y$ endlich mit

$$f(U_F) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, 1)$$

Mit anderen Worten:

$$|f(x)| \leq \max_{y \in F} |\langle\, x, y \,\rangle| \qquad (x \in X)$$

Für $x \in X$ mit $\langle\, x, y \,\rangle = 0$ $(y \in F)$ folgt also $f(x) = 0$. Aus Lemma 11.5 folgt: Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ mit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \langle\, x, y_j \,\rangle = \langle\, x, \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot y_j \,\rangle$$

□

Weitere wichtige Weise der Definition topologischer Vektorräume: Halbnormen

Definition Sei X ein Vektorraum, P eine Menge von Halbnormen auf X. Die Initialtopologie $\mathcal{T}_P$ bzgl. der Abbildungen $X \overset{\text{id}}{\to} (X,p)$ $(p \in P)$ heißt die von P erzeugte Topologie.

Beispiel (i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X = C(\Omega)$. Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei $p_K : C(\Omega) \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|$$

(p_K Halbnorm ist klar.) Sei $P := \{p_K; K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$. $\mathcal{T}_P$ ist die Topologie der kompakten Konvergenz.

Frage: Wird $\mathcal{T}_P$ durch eine Folge von Halbnormen bestimmt? Es existiert $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit Ω_j offene Mengen $(j \in \mathbb{N})$, $\Omega_1 \subseteq \bar{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega$, $\bar{\Omega}_j$ kompakt $(j \in \mathbb{N})$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j = \Omega$; wähle zum Beispiel

$$\Omega_j := \left\{ x \in \Omega; |x| \le j, d(x, \Omega^c) > \frac{1}{j} \right\}$$

Sei $p_j := p_{\bar{\Omega}_j}$. Dann $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{\{p_j; j\in\mathbb{N}\}}$:

- „$\supseteq$“ ist klar wegen $P \supseteq \{p_j; j \in \mathbb{N}\}$
- „$\subseteq$“: Für $K \subseteq \Omega$ kompakt, gibt es $j \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \Omega_j$. Dann $p_j \ge p_K$, also $(X, p_j) \overset{\text{id}}{\to} (X, p_K)$ stetig.

Bemerkung: Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist p_j nur eine Halbnorm und keine Norm auf $C(\Omega)$.

(ii). $C^\infty[0,1] = X$, $p_m(f) := \|f^{(m)}\|_\infty$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $P := \{p_m; m \in \mathbb{N}_0\}$ ist abzählbar.

(iii). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X = C^\infty(\Omega)$. Kombination von (i),(ii): Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann

$$p_{K,\alpha}(f) := p_K(\partial^\alpha f)$$

mit p_K aus (i). (Es genügt eine Folge $\{p_{\bar{\Omega}_j,\alpha}; \alpha \in \mathbb{N}_0^n, j \in \mathbb{N}\}$.)

11.6 Satz (Metrisierungssatz)

Sei X ein Vektorraum, $P = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ ein (abzählbares) System von Halbnormen, dann wird $\mathcal{T}_P$ von der Halbmetrik d erzeugt,

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{p_n(x-y), 1\}$$

Beweis:
- $\mathcal{T}_P$ ist translationsinvariant (Satz 11.2) und d ist translationsinvariant. Daher zu zeigen: $\mathcal{T}_P$ und d erzeugen die gleiche Nullumgebung.
- Sei $U \in \mathcal{U}_0(\mathcal{T})$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$:

$$0 \in \{x \in X; \forall j = 1, \ldots, n : p_j(x) < \varepsilon\} \subseteq U$$

Ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$. Mit $\varepsilon' := 2^{-n} \cdot \varepsilon$ gilt: Aus $d(x,0) < \varepsilon'$ folgt für $j = 1, \ldots, n$:

$$\min\{p_j(x), 1\} < 2^j \cdot 2^{-n} \cdot \varepsilon \le \varepsilon$$
$$\Rightarrow p_j(x) < \varepsilon$$

Somit $B_d(0, \varepsilon') \subseteq \{x \in X; \forall j = 1, \ldots, n : p_j(x) < \varepsilon\} \subseteq U$.

- Sei andererseits $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann $\{x \in X; \forall j = 1, \ldots, n_0 : p_j(x) < 2^j \cdot \frac{\varepsilon}{2n_0}\} \subseteq B_d(0, \varepsilon)$.

□

Zu obigen Beispielen: Mit der definierten Metrik sind diese Räume vollständig (Halbmetrik ist Metrik, (X,p) separiert.):

(i). Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C(\Omega)$. Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, dann ist $(f_j|_K)_{j\in\mathbb{N}}$ eine p_K-Cauchy-Folge. Daher existiert $f_K \in C(K)$ mit

$$\sup_{x\in K} |f_j(x) - f_K(x)| \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

Also existiert $f \in C(\Omega), f|_K = f_K$ für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt, $p_k(f_j - f) \to 0$ $(j \to \infty)$ für alle K. Damit $f_j \to f$ in $\mathcal{T}_P$.

Bemerkung (i). Für vollständige metrische topologische Räume gelten Sätze mit Baire-Argumenten mit geeigneten Modifikationen.

(ii). Ist $\langle X, Y \rangle$ ein duales Paar, $p_y(x) := |\langle x, y \rangle|$ $(x \in X, y \in Y)$, dann ist p_y eine Halbnorm auf X. Es gilt

$$\sigma(X,Y) = \mathcal{T}_{\{p_y, y\in Y\}}$$

(Für $y \in Y$ ist die Initialtopologie bzgl. $X \ni x \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ die von p_y erzeugte Topologie. Achtung: $\mathcal{T}_{\{p_y\}}$ ist nicht die Initialtopologie von $X \ni x \mapsto p_y(x) \in \mathbb{R}$!)

12 Sätze von Tychonoff und Alaoglu

- Ist X ein separabler normierter Raum, dann ist $B_{X'} := B_{X'}[0,1]$ $\sigma(X',X)$-folgenkompakt (Übung). Im Allgemeinen falsch ohne separabel.
- Ziel: $B_{X'}$ immer $\sigma(X',X)$-kompakt.

12.1 Satz (Satz von Tychonoff)

Sei $(S_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist $\prod_{\iota\in I} S_\iota$ kompakt in der Produkttopologie.

Ohne Beweis

12.2 Satz (Satz von Alaoglu)

Sei X ein normierter Raum. Dann ist $(B_{X'}, \sigma(X',X) \cap B_{X'})$ kompakt.

12.3 Lemma

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist X^* eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}^X$ bzgl. der Produkttopologie.

Bemerkung Initialtopologie bzgl. $\mathbb{K}^X \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$ $(x \in X)$ ist Produkttopologie auf $\mathbb{K}^X$.

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in X$ ist

$$\varphi_{x,y,\lambda} : \mathbb{K}^X \ni f \mapsto \big(f(\lambda \cdot x) - \lambda \cdot f(x) - f(y)\big) \in \mathbb{K}$$

stetig. Daher

$$X^* = \bigcap_{x,y\in X, \lambda\in\mathbb{K}} \underbrace{\varphi^{-1}_{x,y,\lambda}\{0\}}_{\text{abgeschlossen}}$$

abgeschlossen. $\square$

Beweis: (Satz 12.2)

- Vorbemerkung: Es gilt
$$B_{X'} \subseteq X' \subseteq X^* \subseteq \mathbb{K}^X$$
und die von der Produkttopologie auf X' induzierte Topologie ist $\sigma(X',X)$ nach Satz 11.1(iii) *(Wähle dort $g : X' \to \mathbb{K}^X, g = \mathrm{id}$ und $f_x : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}, f_x(h) := h(x)$ für $x \in X$.)*

- Somit folgt:

$$\begin{aligned} B_{X'} &= \{x' \in X'; \|x'\| \le 1\} \\ &= \{f \in \mathbb{K}^X; \forall x \in X : |f(x)| \le \|x\|\} \cap X^* \\ &= \underbrace{\left(\prod_{x \in X} B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|] \right)}_{(*)} \cap X^* \end{aligned}$$

$(*)$ ist kompakt nach 12.1 in der Produkttopologie $\mathcal{T}$ *(und daher insbesondere abgeschlossen da $\mathbb{K}^X$ separiert)* Nach Lemma 12.3 ist $B_{X'}$ eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge, also kompakt *(in der Topologie $\mathcal{T} \cap B_{X'} = \sigma(X', X) \cap B_{X'}$, siehe Vorbemerkung).*

□

12.4 Folgerung

Sei X ein reflexiver normierter Raum. Dann ist B_X $\sigma(X, X')$-kompakt. (Später: Äquivalent, siehe Satz 13.10)

Beweis: Nach Satz 12.2 ist $B_{X''}$ $\sigma(X'', X')$-kompakt. Die Abbildung

$$\kappa : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$$

ist ein Homöomorphismus, da X reflexiv ist. Daher ist $\kappa : B_X \to B_{X''}$ ein Homöomorphismus bzgl. der induzierten Topologie. Behauptung folgt mit Satz 2.3.
Zur Stetigkeit: $\kappa : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$ ist nach Satz 11.1 genau dann stetig, wenn $x \mapsto \langle x', \kappa(x) \rangle = \langle x, x' \rangle$ stetig ist. Stetigkeit von $\kappa^{-1} : (X'', \sigma(X'', X')) \to (X, \sigma(X, X'))$ folgt analog, beachte dazu $\langle \kappa^{-1}(x''), x' \rangle = \langle x', x'' \rangle$. □

Bemerkung (zur Approximationstheorie)

- Sei X ein normierter Raum, $A \subseteq X$. Für $x \in X$ heißt $x_0 \in A$ eine Bestapproximation von x in A, falls

$$\|x - x_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

- $A \subseteq X$ heißt proximinal, wenn jedes $x \in X$ eine Bestapproximation in A besitzt. (Zum Beispiel A abgeschlossen und konvex in einem Hilbertraum; später)

Satz

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und X ein normierter Raum. Für $x' \in X'$ sind äquivalent:

(i). $\{x \in X; x'(x) = 0\}$ ist proximinal.

(ii). x' nimmt auf B_X sein Supremum an.

Beweis: Übung □

Beispiel $X = c_0$: Für $x' \in c_0' = \ell_1$ ist (ii) genau dann erfüllt, wenn $\{j; x_j' \neq 0\}$ endlich ist.

Bemerkung Allgemein: (ii) ist für alle $x' \in X'$ erfüllt, falls X reflexiv ist (Folgerung 12.4). Letzteres auch hinreichend für Reflexivität (s. 12)

Satz (Satz von James)

Sei X ein $\mathbb{R}$-Banachraum. Sei $A \subseteq X$ beschränkt und $\sigma(X, X')$-abgeschlossen. Dann äquivalent:

(i). A ist $\sigma(X, X')$-kompakt.

(ii). Jedes $x' \in X'$ nimmt auf A sein Supremum an.

((i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar mit Satz von Maximum, $(ii) \Rightarrow (i)$ schwierig.)

12.5 Folgerung

Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $(B_{X'}, \sigma(X', X) \cap B_{X'})$ metrisierbar (also insbesondere folgenkompakt nach Folgerung 12.4).

Beweis:

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dichte Folge in X. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie auf X' bzgl. $(\langle x_n, \cdot \rangle; n \in \mathbb{N})$. Dann ist $\mathcal{T} \subseteq \sigma(X', X)$. $\mathcal{T}$ ist halbmetrisierbar nach Satz 11.6. Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle x_n, x' \rangle = 0 \Rightarrow x'(x) = 0 \Rightarrow x' = 0$$

  also ist d nach Satz 11.6 sogar eine Metrik, also $\mathcal{T}$ separiert.

- Außerdem ist $\mathrm{id} : (B_{X'}, \sigma(X', X) \cap B_{X'}) \to (B_{X'}, \mathcal{T} \cap B_{X'})$ stetig wegen $\mathcal{T} \subseteq \sigma(X', X)$, also Homöomorphismus nach Satz 2.3(ii), d.h. $\sigma(X', X) \cap B_{X'} = \mathcal{T} \cap B_{X'}$.

$\square$

Bemerkung Es gilt

$$(X', \mathcal{T})' = (X', \sigma(X', \mathrm{lin}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}))' = \mathrm{lin}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

und $(X', \sigma(X', X))' = X$, also

$$\mathcal{T} = \sigma(X', X) \Leftrightarrow \mathrm{lin}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = X$$

13
Konvexität, Trennungssätze & Reflexivität

Definition Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i). $A \subseteq X$ heißt konvex

$$:\Leftrightarrow \forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : (1-t) \cdot x + t \cdot y \in A$$

(ii). $A \subseteq X$ heißt absorbierend

$$:\Leftrightarrow \forall x \in X \, \exists \alpha > 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \geq \alpha : x \in \lambda \cdot A$$

13.1 Proposition

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

(i). Ist $p : X \to [0, \infty]$ sublinear, so sind

$$A_p := \{x \in X; p(x) < 1\} \qquad A'_p := \{x \in X; p(x) \leq 1\}$$

konvex und absorbierend.

(ii). Ist $A \subseteq X$ konvex und absorbierend, so ist

$$p_A : X \to [0, \infty), p_A(x) := \inf\{\lambda \in (0, \infty); x \in \lambda \cdot A\}$$

sublinear und es gilt $A_{p_A} \subseteq A \subseteq A'_{p_A}$. p_A heißt Eichfunktional (Minkowski-Funktional) von A.

Beweis: (i). Seien $0 \leq t \leq 1$ und $x, y \in A_p$. Dann folgt aus der Sublinearität von p

$$p((1-t) \cdot x + t \cdot y) \leq (1-t) \cdot \underbrace{p(x)}_{<1} + t \cdot \underbrace{p(y)}_{<1} < 1$$

also $(1-t) \cdot x + t \cdot y \in A_p$. Analog für A'_p. Also A_p und A'_p konvex. A_p absorbierend:

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Sei $x \in X$. Für $|\lambda| > \max\{p(x), p(-x)\}$ gilt:

$$p\left(\frac{1}{\lambda} \cdot x\right) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot p\left(\frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot x\right) < \frac{|\lambda|}{|\lambda|} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot x \in A_p$$

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Sei $x \in X$. Zeige zunächst:

$$c := \sup\{p(\gamma \cdot x); |\gamma| \leq 1, \gamma \in \mathbb{C}\} < \infty$$

Für $\gamma \in \mathbb{C}, \gamma = \alpha + \imath \cdot \beta$ gilt:

$$\begin{aligned} p(\gamma \cdot x) &\leq p(\alpha \cdot x) + p(\imath \beta \cdot x) = |\alpha| \cdot p(\operatorname{sgn} \alpha \cdot x) + |\beta| \cdot p(\imath \operatorname{sgn} \beta \cdot x) \\ &\leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\max\{p(x), p(-x)\}^2 + \max\{p(\imath x), p(-\imath x)\}^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:c'} \\ &\leq c' \cdot |\gamma| \end{aligned}$$

also $c < \infty$. Für $|\lambda| > c$ weiter wie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A'_p ist absorbierend wegen $A_p \subseteq A'_p$.

(ii). p_A ist wohldefiniert, da A absorbierend ist. p_A ist sublinear: Es gilt $p_A(0) = 0$ wegen $0 \in A$. Seien $x \in X, \alpha > 0$, dann

$$\begin{aligned} p_A(\alpha \cdot x) &= \inf\{\lambda > 0; (\alpha \cdot x) \in \lambda \cdot A\} \\ &= \inf\{\underbrace{\lambda}_{\alpha \cdot \frac{\lambda}{\alpha}} > 0; x \in \frac{\lambda}{\alpha} \cdot A\} \\ &= \alpha \cdot \inf\{\mu > 0; x \in \mu \cdot A\} = \alpha \cdot p_A(x) \end{aligned}$$

also p_A positiv homogen.

Seien $x, y \in A$. Dann

$$p_A(x) + p_A(y) = \inf\left\{\lambda_1 > 0; \frac{1}{\lambda_1} \cdot x \in A\right\} + \inf\left\{\lambda_2 > 0; \frac{1}{\lambda_2} \cdot y \in A\right\}$$

Es gilt

$$\frac{1}{\lambda_1} x \in A, \frac{1}{\lambda_2} y \in A \overset{\text{A konvex}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} x\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} y\right)}_{\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot (x+y)}$$

Damit

$$\begin{aligned} \inf\left\{\lambda > 0; \frac{1}{\lambda} \cdot (x+y) \in A\right\} &\leq p_A(x) + p_A(y) \\ \Leftrightarrow p_A(x+y) &\leq p_A(x) + p_A(y) \end{aligned}$$

Ist $p_A(x) < 1$, so gibt es $\lambda < 1$ mit $x \in \lambda \cdot A$, d.h. es gilt $\frac{1}{\lambda} x \in A$. Aus Konvexität folgt

$$x = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in A$$

Aus $x \in A$ folgt offenbar $p_A(x) \leq 1$, also $A \subseteq A'_{p_A}$.

□

13.2 Satz (Trennungssatz)

Sei X ein topologischer Vektorraum. Seien $A, B \subseteq X$ mit $A, B \neq \emptyset$ konvex, A offen, $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es $x' \in X'$, sodass

$$\operatorname{Re} x'(x) < \gamma := \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in B\}$$

für alle $x \in A$. (Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist „Re“ überflüssig.)

Bemerkung Die reelle „affine“ Hyperebene $\{x \in X; \operatorname{Re} x'(x) = \gamma\}$ „trennt“ A und B, $A \subseteq (\operatorname{Re} x')^{-1}((-\infty, \gamma))$ offener Halbraum, $B \subseteq (\operatorname{Re} x')^{-1}([\gamma, \infty))$ abgeschlossener Halbraum.

13.3 Lemma

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq X$ offen, $x^* \in X^* \backslash \{0\}$. Dann ist $x^*(A)$ offen.

Beweis: Es gibt $x_0 \in X$ mit $x^*(x_0) \neq 0$. Für $x \in A$ ist $A - x$ absorbierend ($0 \in A - x$ und $A - x$ offen $\Rightarrow A - x$ absorbierend nach Satz 11.2), also gibt es $\varepsilon > 0$:

$$B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \cdot x_0 \subseteq A - x$$

Daher

$$\begin{aligned} & x + B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)\cdot x_0 \subseteq A \\ \Rightarrow & \underbrace{x^*(x) + B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)\cdot x^*(x_0)}_{=B_{\mathbb{K}}(x^*(x),\varepsilon\cdot|x^*(x_0)|)} \subseteq x^*(A) \end{aligned}$$

□

Beweis: (Satz 13.2) Wegen Lemma 9.1 genügt es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu betrachten.

(i). Spezialfall: $B = \{x_0\}$

Ohne Einschränkung sei $0 \in A$ (sonst verschieben). Dann ist A absorbierend nach Satz 11.2. Sei p_A das Eichfunktional. Sei $f : \operatorname{lin}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 1$ und f linear. Dann gilt $f(x_0) = 1 \le p_A(x_0)$, da $x_0 \notin A$ und A konvex, daher für $\lambda \ge 0$:

$$f(\lambda\cdot x_0) = \lambda\cdot f(x_0) \le \lambda\cdot p_A(x_0) = p_A(\lambda\cdot x_0)$$

und für $\lambda \le 0$:

$$f(\lambda\cdot x_0) = \lambda \le 0 \le p_A(\lambda\cdot x)$$

Nach Satz 9.3 gibt es $x' \in X^*$ mit $x'(x_0) = 1, x'(x) \le p_A(x)$ für alle $x \in X$, insbesondere $x'(x) \le 1$ für $x \in A$ nach Proposition 13.1. Da A offen ist, ist $x'(A)$ offen (Lemma 13.3), somit $x'(x) < 1 = x'(x_0)$ für alle $x \in A$.

Noch zu zeigen: x' ist stetig. Es genügt die Stetigkeit in 0 zu zeigen (x' linear und $\mathcal{T}$ translationsinvariant). Für $x \in \varepsilon\cdot(A\cap(-A))$, $\varepsilon > 0$ ist $\pm\frac{1}{\varepsilon}\cdot x \in A$, daher ist

$$\begin{aligned} \pm x'(x) &= \varepsilon\cdot x'\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\cdot x\right) \le \varepsilon\cdot \underbrace{p_A\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\cdot x\right)}_{\overset{13.1}{\le} 1} \\ &\le \varepsilon \\ \Rightarrow |x'(x)| &\le \varepsilon \end{aligned}$$

(ii). Allgemein: Sei $A_1 := A - B = \bigcup_{x\in B} A - x$. Dann A_1 offen und konvex (leicht), $0 \notin A - B$ wegen $A \cap B = \emptyset$. Nach (i): Es gibt $x' \in X'$, sodass für alle $x \in A, y \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} & x'(x-y) \le x'(0) = 0 \\ \Rightarrow & x'(x) \le x'(y) \end{aligned}$$

Da $x'(A)$ offen (Lemma 13.3) folgt die Behauptung.

□

13.4 Folgerung (Satz von Hahn-Banach, geometrische Form)

Seien $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $L \subseteq X$ ein Teilraum, $\emptyset \ne A \subseteq X$ offen und konvex, $L \cap A = \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene H ($H = x'^{-1}(\{0\})$ mit $x' \in X'$), sodass $L \subseteq H$ und $H \cap A = \emptyset$.

Beweis: $B = L$ in Satz 13.2: Es existiert $x' \in X'$ wie in Satz 13.2. Für $x \in A$ gilt dann:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in L\} = 0$$

($x'(y) = 0$ für alle $y \in L$, da L Vektorraum.) Für $H := x'^{-1}(0)$ folgt somit $L \subseteq H$ und $H \cap A = \emptyset$. □

Bemerkung $L^p(0,1)$ für $p \in (0,1)$: Sei

$$d(f,g) := \int |f(x) - g(x)|^p\, dx$$

dann ist d eine Metrik und $(L^p(0,1), d)$ ein topologischer Vektorraum. Zeige: Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\operatorname{co} B(0,\varepsilon) = L^p(0,1)$.

Beweis: Sei $f \in L^p(0,1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $f_1, \dots, f_n$ mit:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot n\right) \int |f_j(x)|^p \, dx = \frac{1}{n} \cdot \int |f(x)|^p \, dx$$

Damit folgt:

$$\int |n \cdot f_j|^p = d(0, n \cdot f_j) = n^p \cdot d(0, f_j) = n^{p-1} \cdot \int |f|^p$$
$$\to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Daher gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$n^{p-1} \cdot \int |f|^p < \varepsilon$$

Somit $f \in \operatorname{co} B(0, \varepsilon)$.

Damit: $U \subseteq L^p(0,1)$ konvex und offen $\Rightarrow U = \emptyset$ oder $U = L^p(0,1)$. Daher $L^p(0,1)' = \{0\}$. (Ansonsten existiert ein Urbild, offen und konvex, das nicht trivial ist.) □

Definition Ein topologischer Vektorraum heißt lokalkonvex, wenn es eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. X heißt lokalkonvexer Raum.

Beispiel (i). (X, p) halbnormiert, dann X lokalkonvex, da $B(0, \varepsilon)$ konvex für alle $\varepsilon > 0$ (Proposition 12.1).

(ii). Seien $(X_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von lokalkonvexen Räumen, X Vektorraum, $f_\iota : X \to X_\iota$ linear $(\iota \in I)$. Dann ist X mit Initialtopologie bzgl. $(f_\iota)_{\iota \in I}$ lokalkonvex.

Beweis: Ist $\mathcal{U}_\iota$ eine Nullumgebungsbasis von X_ι $(\iota \in I)$, dann ist

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcap_{\iota \in F} f_\iota^{-1}(U_\iota); F \subseteq I \, \text{endlich}, U_\iota \in \mathcal{U}_\iota (\iota \in F) \right\}$$

Nullumgebungsbasis von X. Nach Voraussetzung können alle $U_\iota \in \mathcal{U}_\iota$ $(\iota \in I)$ konvex gewählt werden. Dann $f_\iota^{-1}(U_\iota)$ konvex, also

$$\bigcap_{\iota \in F} f_\iota^{-1}(U_\iota)$$

konvex. □

(iii). $\langle X, Y \rangle$ duales Paar $\Rightarrow (X, \sigma(X, Y))$ lokalkonvex

(iv). X Vektorraum, $\mathcal{P}$ Menge von Halbnormen auf $X \Rightarrow (X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ lokalkonvex. („Umkehrung“ gilt auch; später)

13.5 Satz (Trennungssatz für lokalkonvexe Räume)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Seien $B \subseteq X$ konvex und abgeschlossen, $x_0 \in X \backslash B$. Dann gibt es $x' \in X'$, sodass

$$\operatorname{Re} x'(x_0) < \inf\{\operatorname{Re} x'(x); x \in B\}$$

13.6 Lemma

Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $C \subseteq X$ konvex. Dann sind $\bar{C}$ und $\operatorname{int} C$ konvex.

Beweis: Übung □

Beweis: (Satz 13.5)
Aus $x_0 \notin B$ und $B = \bar{B}$ folgt, dass $U \in \mathcal{U}_0$ existiert, sodass

$$\underbrace{x_0 + U}_{=:A} \cap B = \emptyset$$

Ohne Einschränkung U konvex und offen (Lemma 13.6). Dann Satz 13.2:

$$\exists x' \in X' \, \forall x \in x_0 + U : \operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in B\}$$ □

13.7 Folgerung

Seien X lokalkonvex, $L \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum und $x_0 \in X \backslash L$. Dann gibt es $x' \in X'$, $x'|_L = 0, x'(x_0) \neq 0$.

Beweis: Nach Satz 13.5 existiert $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x_0) < \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in L\} \stackrel{*}{=} 0$$

($*$) folgt, da L ein Teilraum ist, also $x'(y) = 0$ für alle $y \in L$ gelten muss. □

13.8 Folgerung

Seien $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum und $B \subseteq X$ konvex. Dann:

(i). B $\mathcal{T}$-abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $B\sigma(X, X')$-abgeschlossen.

(ii). $\bar{B}^{\mathcal{T}} = \bar{B}^{\sigma(X,X')}$

Beweis: (i). „$\Leftarrow$“: Klar, da $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}$.

„$\Rightarrow$“: Sei $x_0 \in X \backslash B$. Aus Satz 13.5 folgt: Es gibt $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x_0) < \inf\{\operatorname{Re} x'(y); y \in B\}$$

Es existiert $\varepsilon > 0$:

$$B_{\mathbb{K}}(x'(x_0), \varepsilon) \cap \{\operatorname{Re} x'(y); y \in B\} = \emptyset$$

Damit

$$x'^{-1}(B_{\mathbb{K}}(x'(x_0), \varepsilon)) \cap B = \emptyset$$

also $x_0 \notin \bar{B}^{\sigma(X,X')}$. Es folgt $\bar{B}^{\sigma(X,X')} \subseteq B \subseteq \bar{B}^{\sigma(X,X')}$.

(ii). „$\subseteq$“ folgt wegen $\mathcal{T} \supseteq \sigma(X, X')$. Andererseits ist $\bar{B}^{\mathcal{T}}$ konvex (Lemma 13.6), damit $\sigma(X, X')$-abgeschlossen, also „$\supseteq$“.

□

Bemerkung Folgerung 13.8 ist ohne „konvex“ falsch. Zum Beispiel $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ in ℓ_2 abgeschlossen, aber $e_n \to 0$ in $\sigma(\ell_2, \ell_2)$.

13.9 Folgerung (Satz von Goldstine)

Sei X ein normierter Raum. Dann gilt

$$\overline{B_X}^{\sigma(X'',X')} = B_{X''}$$

Beweis:

- „$\subseteq$“: $B_{X''}$ ist $\sigma(X'', X')$-kompakt (Satz von Alaoglu, 13.2), also abgeschlossen. Wegen $B_X \subseteq B_{X''}$ folgt Behauptung.

- „$\supseteq$“: Sei $x_0'' \in X'' \backslash \overline{B_X}^{\sigma(X'',X')}$. Satz 13.5 und Lemma 13.6: Es existiert $x' \in (X'', \sigma(X'',X'))' \overset{11.4}{=} X'$:

$$\underbrace{\sup\{\mathrm{Re}\,\langle\, x, x'\,\rangle; x \in B_X\}}_{\|x'\|} < \mathrm{Re}\langle x_0'', x'\rangle \leq \|x_0''\| \cdot \|x'\|$$

$$\Rightarrow 1 < \|x_0''\|$$

also $x_0'' \notin B_{X''}$.

$\square$

Bemerkung Aus Folgerung 13.9: $(X, \sigma(X'', X'))$ ist dicht in X''. Ist einfacher: $x' \in (X'', \sigma(X'', X'))' = X', x'|_X = 0$ folgt $x' = 0$, dann Folgerung 13.7: $\bar{X}^{\sigma(X'',X')} = X''$.

13.10 Satz

Sei X ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

(i). X reflexiv

(ii). B_X ist $\sigma(X, X')$-kompakt.

Beweis:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): 12.4, Satz von Alaoglu
- $(ii) \Rightarrow (i)$:
  $\sigma(X'', X')$ ist separiert, da $\langle\, X'', X'\,\rangle$ trennend in X'' ist (Übung 12), $\sigma(X, X') = \sigma(X'', X') \cap X$. Damit: B_X ist $\sigma(X'', X')$-kompakt (und daher $\sigma(X'', X')$-abgeschlossen), $B_{X''} = \overline{B_X}^{\sigma(X'',X')}$ nach Folgerung 13.9, somit $B_{X''} = \overline{B_X}^{\sigma(X'',X')} = B_X$, also $X'' = X'$.

$\square$

13.11 Folgerung

Sei X ein reflexiver normierter Raum, $L \subseteq X$ abgeschlossener Teilraum. Dann ist auch L reflexiv.

Beweis: $B_L = B_X \cap L$ und B_X ist $\sigma(X, X')$-kompakt, L ist $\sigma(X, X')$-abgeschlossen (Folgerung 13.8). Wegen

$$\sigma(L, L') \overset{11.1}{=} \sigma(X, X') \cap L$$

folgt das $B_L \sigma(L, L')$-kompakt. Also L reflexiv nach 13.10. $\square$

Bemerkung Direkter Beweis ($\kappa_L : L \to L''$ ist surjektiv) möglich.

13.12 Folgerung

Sei X ein Banachraum. X reflexiv $\Leftrightarrow$ X' reflexiv.

Beweis:
- „$\Rightarrow$“: $(X')'' = (X'')' = X'$
- „$\Leftarrow$“: X' reflexiv, dann ist X'' reflexiv nach „$\Rightarrow$“. Da $X \subseteq X''$ abgeschlossen (da κ isometrisch und X vollständig) folgt X reflexiv nach Folgerung 13.11.

$\square$

Beispiel (i). ℓ_∞ nicht reflexiv, sonst wäre c_0 als abgeschlossene Teilmenge reflexiv, aber $c_0'' = \ell_1' = \ell_\infty$.

(ii). Für S kompakt ist $C(S)$ nur in ausgearteten Fällen reflexiv. Zum Beispiel ist $C([0, 1])$ nicht reflexiv: Man kann c_0 in $C([0, 1])$ einbetten,

$$c_0 \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot \varphi_n \in C([0, 1])$$

Alternative Begründung: $C[0,1]'$ ist nicht separabel, denn für die überabzählbar vielen δ-Funktionale gilt $\|\delta_x - \delta_y\| = 2$ für $x \neq y$. Wäre $C[0,1]$ reflexiv, d.h. $C[0,1]'' = C[0,1]$, dann müsste $C[0,1]'$ separabel sein (X' separabel $\Rightarrow X$ separabel).

Schließlich: Lokalkonvexe Räume sind $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ mit $\mathcal{P}$ Menge von Halbnormen.

13.13 Lemma

Sei X ein Vektorraum, $A \subseteq X$ konvex, absorbierend und kreisförmig ($\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1 : \lambda \cdot A \subseteq A$). Dann ist p_A eine Halbnorm.

Beweis: Wegen 13.1 nur noch $p_A(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p_A(x)$ zu zeigen.

$$p_A(\lambda \cdot x) = \inf\{\mu > 0; \lambda \cdot x \in \mu \cdot A\} = \inf \left\{ \mu > 0; |\lambda| \cdot x \in \mu \cdot \underbrace{\frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot A}_{A} \right\}$$

$$= p_A(|\lambda| \cdot x) = |\lambda| \cdot p_A(x)$$

(Beachte: Aus A kreisförmig folgt $\gamma \cdot A$ kreisförmig für $|\gamma| \leq 1$. Damit

$$A = |\gamma|^2 \cdot A = \bar{\gamma} \cdot \gamma \cdot A \subseteq \gamma \cdot A$$

für $|\gamma| = 1$.) □

13.14 Lemma

Sei X ein topologischer Vektorraum, U konvex, absorbierend und offen. Dann $U = \{x \in X; p_U(x) < 1\}$.

Beweis: Übung, Aufgabe 69 □

13.15 Satz

Sei $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvex.

(i). Dann gibt es eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ aus kreisförmigen, konvexen und offenen Nullumgebungen.

(ii). Mit $\mathcal{P} := \{p_U; U \in \mathcal{U}\}$ gilt $\mathcal{T}_\mathcal{P} = \mathcal{T}$.

Beweis: (i). Sei U eine Nullumgebung. Mit Aufgabe 56(b): Es existiert eine kreisförmige Nullumgebung $V_1 \subseteq U$. Sei zusätzlich U konvex (X lokalkonvex). Sei $V_2 := \operatorname{co} V_1$ mit

$$\operatorname{co} V_1 := \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot x_j; n \in \mathbb{N}, \gamma_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \gamma_j = 1, x_j \in V_1 \right\}$$

Dann V_2 konvex und kreisförmig, $V_2 \subseteq U$. Somit ist $V := \operatorname{int} V_2$ konvex, kreisförmig, offen und $V \subseteq U, 0 \in V$.

(ii). $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ haben gleiche Nullumgebungsbasis (13.14).

□

Teil V

Grundlagen der Hilberträume

14
Hilberträume

Definition (i). Sei H ein Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, genau dann wenn

(1) $(\cdot|x) : H \to \mathbb{K}$ ist linear für alle $x \in H$.

(2) $(x|y) = \overline{(y|x)}$ für alle $x, y \in H$

(3) $(x|x) \geq 0$ für alle $x \in H$, $\{(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\}$

$(H, (\cdot|\cdot))$ heißt Prähilbertraum.

Bemerkung (i). Aus (1), (2) folgt: $(x|\cdot) : H \to \mathbb{K}$ ist antilinear.

(ii). Eine Funktion mit den Eigenschaften (1),(2) heißt sesquilinear.

14.1 Satz

Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt

(i). $|(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y)$ für alle $x, y \in H$; Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann wenn x, y linear abhängig.

(ii). Durch $\|x\| := (x|x)^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm auf H erklärt.

(iii). Es gilt die Parallelogramm-Identität:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(iv). Es gilt die Polarisierungs-Identität: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \imath\,\|x + \imath\, y\|^2 - \imath\,\|x - \imath\, y\|^2\big)$$

für alle $x, y \in H$.

Beweis: (i). Seien $x, y \in H$. Ohne Einschränkung $x, y \neq 0$. Es gibt $\gamma \in \mathbb{K}, |\gamma| = 1$ mit $(\gamma \cdot x|y) = |(x|y)|$. Setze $\tilde{x} := \frac{\gamma \cdot x}{\|x\|}, \tilde{y} := \frac{y}{\|y\|}$. Es folgt

$$0 \overset{(3)}{\leq} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2 = (\tilde{x} - \tilde{y}|\tilde{x} - \tilde{y}) = \underbrace{(\tilde{x}|\tilde{x})}_{1} + \underbrace{(\tilde{y}|\tilde{y})}_{1} - 2 \cdot \underbrace{(\tilde{x}|\tilde{y})}_{\in\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow (\tilde{x}|\tilde{y}) = \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \cdot (\gamma \cdot x|y) \leq 1$$

$$\Rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

„=“ in CSU impliziert $\|\tilde{x}-\tilde{y}\|=0$, also $\tilde{x}=\tilde{y}$. Aus $x=\alpha\cdot y$ folgt

$$|(x|y)| = |\alpha|\cdot|(y|y)| = \underbrace{|\alpha|\cdot\|y\|}_{=\|x\|}\cdot\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|$$

(ii). Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\underbrace{\operatorname{Re}(x|y)}_{\leq|(x|y)|}+\|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

(iii). Nachrechnen.

(iv). Nachrechnen.

$\square$

Definition Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Prähilbertraum.

Bemerkung Für Diskussion von (Semi-)Skalarprodukten und Sesquilinearformen siehe J. Weidemann, Lineare Operatoren in Hilberträumen.

14.2 Satz

Seien H ein Prähilbertraum, $C\subseteq H$ konvex und vollständig, $C\neq\emptyset$. Dann gilt: Für jedes $x\in H$ gibt es genau ein $y\in C$ mit

$$\|x-y\| = \inf_{c\in C}\|x-c\| =: \operatorname{dist}(x,C)$$

(Insbesondere: C ist proximinal.)

Beweis: Sei $x\in H$.

(i). Für $y',y''\in C$ gilt

$$\begin{aligned}\|y'-y''\|^2 &= \|(y'-x)-(y''-x)\|^2 \\ &\overset{\text{PI}}{=} 2\|y'-x\|^2+2\|y''-x\|^2-4\left\|\underbrace{\frac{y'+y''}{2}}_{\in C}-x\right\|^2 \\ &\leq 2\|y'-x\|^2+2\|y''-x\|^2-4\underbrace{\operatorname{dist}(x,C)^2}_{=:d^2}\end{aligned}$$

(ii). Eindeutigkeit: Seien $y',y''\in C$ mit $\|y'-x\|=\|y''-x\|=d$, dann folgt aus (i) $\|y'-y''\|=0$, also $y'=y''$.

(iii). Existenz: Es existiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C mit $\|x-y_n\|\to d$ $(n\to\infty)$. Dann

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &\overset{(i)}{\leq} 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4d^2 \\ &\to 0 \qquad (m,n\to\infty)\end{aligned}$$

Damit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, also existiert $y:=\lim_{n\to\infty}y_n\in C$,

$$\|y-x\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n-x\| = d$$

$\square$

Definition (i). Sei H ein Prähilbertraum, dann heißen $x,y\in H$ orthogonal $(x\perp y) :\Leftrightarrow (x|y)=0$.

(ii). Sei H ein Prähilbertraum, $M \subseteq H$, $x \in H$. Dann heißt x orthogonal zu M $(x \perp M) :\Leftrightarrow \forall y \in M : (x|y) = 0$.

Für $M \subseteq H$ heißt $M^\perp := \{x \in H; x \perp M\}$ der Orthogonalraum von M.

Bemerkung (i). Wegen

$$M^\perp = \bigcap_{y \in M} \{y\}^\perp$$

ist der Orthogonalraum ein abgeschlossener Teilraum von H.

(ii). „Satz des Pythagoras“: $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

14.3 Satz (Projektionssatz)

Sei H ein Prähilbertraum, $L \subseteq H$ ein vollständiger Teilraum. Dann gilt: Für alle $x \in H$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $Px \in L$ mit $x - Px \in L^\perp$ und zwar ist Px die Bestapproximation zu x in L. Die Abbildung $P : H \to L$ ist linear, $P^2 = P$, $\|P\| \leq 1$. Es folgt $(L^\perp)^\perp = L$.

P heißt Orthogonalprojektion auf L.

Beweis: (i). Existenz: Da L konvex und vollständig ist, folgt aus Satz 14.2, dass $Px \in L$ existiert mit

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in L} \|x - y\| =: d$$

Sei $y = x - Px$. Für alle $z \in L, a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
d^2 &\leq \|x - \underbrace{Px + a \cdot z}_{\in L}\|^2 = \|y - a \cdot z\|^2 \\
&= \underbrace{\|y\|^2}_{d^2} - 2\operatorname{Re}(a \cdot z|y) + |a|^2 \cdot \|z\|^2 \\
\Rightarrow 0 &\geq 2\operatorname{Re}(a \cdot (z|y)) - |a|^2 \cdot \|z\|^2 \\
\Rightarrow 0 &\geq 2\operatorname{Re}\left(\frac{a}{|a|} \cdot (z|y)\right) - |a| \cdot \|z\|^2
\end{aligned}$$

Für $a \to 0$ geeignet folgt $0 \geq |(z|y)|$, also $z \perp y$. Damit $(x - Px) \perp L$.

(ii). Eindeutigkeit: Sei $x = x' + y'$ mit $x' \in L, y' \in L^\perp$. Dann

$$\begin{aligned}
Px + (x - Px) = x' + y' \Leftrightarrow \underbrace{Px - x'}_{\in L} &= \underbrace{y' - (x - Px)}_{\in L^\perp} \in L \cap L^\perp = \{0\} \\
\Rightarrow Px &= x', y' = x - Px
\end{aligned}$$

(iii). P linear: Seien $x, y \in H, \lambda \in \mathbb{K}$. Dann

$$\lambda \cdot x + y = \underbrace{\lambda \cdot Px + Py}_{\in L} + \underbrace{\lambda \cdot (x - Px) + (y - Py)}_{(\lambda \cdot x + y) - (\lambda \cdot Px + Py) \in L^\perp}$$

Aus Eindeutigkeit folgt $P(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot Px + Py$. Aus

$$\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$$

folgt $\|Px\| \leq \|x\|$. $P^2 = P$ ist klar.

(iv). $L \subseteq (L^\perp)^\perp$ gilt immer, da $L \perp L^\perp$. $(L^\perp)^\perp \subseteq L$: Sei $x \in (L^\perp)^\perp$. Dann $x - Px \in L^\perp$, aber auch $Px \in L \subseteq (L^\perp)^\perp$. Damit $x - Px \in (L^\perp)^\perp$. Es folgt $x - Px = 0$, also $x \in L$.

□

14.4 Satz (Darstellungssatz von Riesz-Fréchet)

Sei H ein Hilbertraum. Für $x \in H$ definieren wir $\varphi_x \in H'$ durch

$$\varphi_x(y) = \langle\, y, \varphi_x \,\rangle := (y|x)$$

Es gilt $\|\varphi_x\| = \|x\|$. Die Abbildung $H \ni x \mapsto \varphi_x \in H'$ ist bijektiv und antilinear.

Beweis:

- Es gilt $\varphi_x \in H'$ wegen $|(y|x)| \leq \|y\| \cdot \|x\|$ nach Cauchy-Schwarzscher Ungleichung, also $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$. Mit $\varphi_x(x) = (x|x) = \|x\|^2$ folgt $\|\varphi_x\| = \|x\|$.
- Antilinearität von H ist klar. Surjektivität: Sei $x' \in H$, $x' \neq 0$. Dann ist

$$N(x') := \{x \in H; \langle\, x, x' \,\rangle = 0\}$$

ein abgeschlossener Teilraum, $N(x') \neq H$ wegen $x' \neq 0$. Daher existiert nach Satz 14.3 ein $y \in N(x')^{\perp}, \|y\| = 1$. Für $x \in H$ gilt dann

$$\langle\, x, x' \,\rangle \cdot y - \langle\, y, x' \,\rangle \cdot x \in N(x')$$

also insbesondere $\langle\, x, x' \,\rangle \cdot y - \langle\, y, x' \,\rangle \cdot x \perp y$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle\, x, x' \,\rangle \cdot y - \langle\, y, x' \,\rangle \cdot x | y) = \langle\, x, x' \,\rangle - \langle\, y, x' \,\rangle \cdot (x|y) \\ &= \langle\, x, x' \,\rangle - (x | \underbrace{\overline{\langle\, y, x' \,\rangle} \cdot y}_{=:\tilde{y}}) \\ \Rightarrow \langle\, x, x' \,\rangle &= (x|\tilde{y}) = \varphi_{\tilde{y}}(x) \end{aligned}$$

Injektivität folgt aus $\|x\| = \|\varphi_x\|$.

□

Bemerkung Es folgt: Hilberträume sind reflexiv.

Beweis: (Satz 10.8, Satz von Radon-Nikodým)

(i). Spezialfall: μ endliches Maß, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$.

- Sei $H := L^2(\mu + \nu)$ (reell), dann ist H ein Hilbertraum. Definiere $\varphi \in H'$ durch

$$\varphi(g) = \int g \, d\mu$$

(Für $g \in L^2(\mu + \nu)$ gilt

$$\int |g| \, d\mu \leq \|1\|_{L^2(\mu)} \cdot \|g\|_{L^2(\mu)} \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} \cdot \|g\|_{L^2(\mu+\nu)} \in \mathbb{R}$$

also $g \in L^1(\mu), \|\varphi\| \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}$, somit $\varphi \in H'$.)
Nach Riesz-Fréchet gibt es $h \in L^2(\mu + \nu)$:

$$\forall g \in L^2(\mu + \nu) : \int g \, d\mu = \int g \cdot h \, d(\mu + \nu) \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in L^2(\mu + \nu) : \int (1 - h) \cdot g \, d\mu = \int g \cdot h \, d\nu \tag{2}$$

Ziel: $\nu = \frac{1-h}{h} \mu$.

- Es gilt $0 \leq h \leq 1$: Mit $g = h^- \in H$ folgt

$$0 \leq \int h^- \, d\mu \stackrel{(1)}{=} \int \underbrace{h^- \cdot h}_{\leq 0} d\,(\mu + \nu)$$

also $h \geq 0$ μ-fast überall. Mit $g := (h-1)^+ \in H$ gilt

$$0 \geq \int \underbrace{(1-h)\cdot(h-1)^+}_{\leq 0} \, d\mu \overset{(2)}{=} \int \underbrace{(h-1)^+ \cdot h}_{\geq 0} \, d\nu \geq 0$$

und somit $h - 1 \leq 0$ μ-fast überall.

- Setze $f := \frac{1-h}{h}$ (wird Radon-Nikodým-Dichte).
  (1) Auf $[h > 0]$: Sei $g : \Omega \to [0, \infty)$ messbar, $[g \neq 0] \subseteq [h \neq 0]$. Dann $(1-h)\cdot(g \wedge (n \cdot h)) \in H$, also folgt mit (2):

$$\int (1-h)\cdot(g \wedge (n \cdot h))\, d\mu = \int (g \wedge (n \cdot h)) \cdot h \, d\nu$$
$$\overset{n\to\infty,\text{mK}}{\Rightarrow} \int (1-h)\cdot g \, d\mu = \int g \cdot h \, d\nu$$

  Damit auch

$$\int g \cdot f \, d\mu = \int (1-h)\cdot \frac{g}{h} \, d\mu = \int \frac{g}{h} \cdot h \, d\nu$$
$$= \int g \, d\nu$$

  Dies zeigt $\nu = f\,\mu$ auf $[h \neq 0]$.

  (2) Auf $[h = 0]$: Behauptung: $\nu = \infty \cdot \mu (= f \cdot \mu)$. Sei $A \subseteq [h = 0]$. Im Fall $\nu(A) = \infty$ ist $\mu(A) > 0$ wegen $\nu << \mu$. Im Fall $\nu(A) < \infty$ ist $1_A \in H$ und somit

$$\mu(A) = \int 1_A \, d\mu \overset{(1)}{=} \int \underbrace{1_A \cdot h}_{0} \, d(\mu + \nu) = 0$$
$$\Rightarrow \nu(A) = 0 = \infty \cdot \mu(A)$$

(ii). Allgemeiner Fall: μ ist σ-endlich

Es existiert $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Omega, \mu(G_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$, $G_n \in \mathcal{A}$. Dann existieren $f_n : G_n \to [0, \infty]$, sodass $\nu_n = f_n\,\mu_n$, wobei μ_n, ν_n Einschränkung von μ, ν auf G_n $(n \in \mathbb{N})$. f ist „Zusammensetzung" der f_n.

□

15 Orthonormalsysteme und -basen

Definition Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Prähilbertraum. Ein Orthonormalsystem ist eine Familie $(e_\alpha; \alpha \in A)$ in H, für die

$$\forall \alpha, \beta \in A : (e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

gilt. Eine Orthonormalbasis ist ein totales Orthonormalsystem.

Bemerkung Jedes Orthonormalsystem ist linear unabhängig: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ für $j \neq k$, dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_{\alpha_j} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_{\alpha_j} \middle| e_{\alpha_k} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n : \lambda_k \cdot \underbrace{(e_{\alpha_k} | e_{\alpha_k})}_{1} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel Sei M eine Menge, dann ist

$$\begin{aligned} \ell^2(M) &:= \left\{ x : M \to \mathbb{K}; \sum_{m \in M} |x(m)|^2 < \infty \right\} \\ (x|y) &:= \sum_{m \in M} x(m) \cdot \overline{y(m)} \end{aligned}$$

ein Hilbertraum und durch $(e_m)_{m \in M}$ mit $e_m(n) := \delta_{mn}$ ist eine Orthonormalbasis definiert.

15.1 Satz

Sei H ein Prähilbertraum, $(e_\alpha; \alpha \in A)$ ein Orthonormalsystem in H.

(i). Sei $x \in H$. Dann ist $\{\alpha \in A : (x|e_\alpha) \neq 0\}$ abzählbar und es gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{\alpha \in A} |(x|e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

(ii). Äquivalent sind:

(1) $(e_\alpha; \alpha \in A)$ ist eine Orthonormalbasis.

(2) Für alle $x \in H$ gilt die Parsevalsche Ungleichung

$$\sum_{\alpha \in A} |(x|e_\alpha)|^2 = \|x\|^2$$

Ist (1) erfüllt, so gilt

$$\forall x \in H : x = \sum_{\alpha \in A} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha$$

Beweis: (i). Sei $F \subseteq A$ endlich,

$$y := \sum_{\alpha \in F} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha$$

Dann ist $x - y \perp y$, denn

$$\forall \alpha \in F : (x - y|e_\alpha) = 0$$

Daher ist

$$\|x\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |(x|e_\alpha)|^2$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist somit

$$A_n := \left\{ \alpha \in A; |(x|e_\alpha)| > \frac{1}{n} \right\}$$

endlich und daher ist

$$\{\alpha \in A; |(x|e_\alpha)|^2 \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

abzählbar (siehe Bemerkung nach Beweis).

(ii). (1) $\Rightarrow$ (2)

Sei $x \in H, \varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $F \subseteq A$ endlich mit

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{lin}\{e_\alpha; \alpha \in F\}) \leq \varepsilon$$

Mit $y := \sum_{\alpha \in F} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha$ gilt $x - y \perp e_\alpha$ für alle $\alpha \in F$. Nach Satz 14.3 ist y Bestapproximation von x in $\operatorname{lin}\{e_\alpha; \alpha \in F\}$. Damit $\|x - y\| \leq \varepsilon$ und somit folgt aus (i), dass

$$0 \overset{(i)}{\leq} \|x\|^2 - \underbrace{\|y\|^2}_{\sum_{\alpha \in F} |(x|e_\alpha)|^2} = \|x - y\|^2 \leq \varepsilon^2$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sei $x \in H$, $\varepsilon > 0$. Es gibt $F \subseteq A$ endlich, sodass

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in F} |(x|e_\alpha)|^2 \leq \varepsilon$$

Für jede Menge $G \subseteq A$ endlich, $F \subseteq G$ folgt

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in G} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in G} |(x|e_\alpha)|^2 \leq \varepsilon$$

Damit (1) gezeigt und Zusatzaussage.

□

Bemerkung (i). Sei X ein normierter Raum, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie in X. Dann sind äquivalent:

(1) $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist summierbar

$$:\Leftrightarrow \exists x := \lim_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ endlich}}} \sum_{\alpha \in F} x_\alpha$$

(2) Es gilt $\{\alpha \in A; x_\alpha \neq 0\} = \{\alpha_j; j \in N\}$ abzählbar mit $N \subseteq \mathbb{N}$ und $\sum_{j \in N} x_{\alpha_j}$ unbedingt konvergent.

Beweis: • „⇒“: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A_n := \left\{\alpha \in A; \|x_\alpha\| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

endlich. (Aus Summierbarkeit folgt nämlich: $\forall \varepsilon > 0\, \exists F \subseteq A$ endlich $\forall F' \subseteq A \backslash F$ endlich:

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon$$

daher

$$\left\| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right\| \leq \left\| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - x \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha - x \right\|$$
$$\leq 2\varepsilon$$

Wähle F' als einelementige Mengen ...) Damit

$$\{\alpha \in A; x_\alpha \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

abzählbar.

• „⇐“: Klar.

□

Beachte:

(1) Reihe unbedingt konvergent $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar, vgl. Bemerkung (ii).

(2) unbedingt konvergent $\Leftarrow$ absolut konvergent, Umkehrung gilt nicht (z.B. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot e^n$ in ℓ_2).

(ii). $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ unbedingt konvergent $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar.

Beweis: Angenommen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wäre nicht summierbar. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass für alle $F \subseteq \mathbb{N}$ endlich ein $F' \in \mathbb{N} \backslash F$, F' endlich, existiert mit

$$\left\| \sum_{n \in F'} x_n \right\| \geq \varepsilon$$

Dann existiert $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit F_j endlich ($j \in \mathbb{N}$), $F_j \cap F_k = \emptyset$ ($j \neq k$), mit

$$\left\| \sum_{n \in F_j} x_n \right\| \geq \varepsilon$$

Sei $\{n_1, n_2, \ldots\} = \mathbb{N} \backslash \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$, dann ist für $F_1, n_1, F_2, n_2, \ldots, =: n'_1, n'_2, \ldots$ die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{n'_j}$$

nicht konvergent. Widerspruch! □

15.2 Satz (Entwicklungssatz)

Seien H ein Hilbertraum und $(e_\alpha; \alpha \in A)$ ein Orthonormalsystem in H.

(i). Sei $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie in $\mathbb{K}$. Dann $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \cdot e_\alpha$ konvergent (d.h. $(a_\alpha \cdot e_\alpha)_{\alpha\in A}$ summierbar) $\Leftrightarrow (a_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_2(A)$.

Für $y := \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \cdot e_\alpha$ gilt dann

$$a_\alpha = (y|e_\alpha) \qquad\qquad \|y\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |a_\alpha|^2$$

(ii). Die Orthogonalprojektion $P : H \to \overline{\operatorname{lin}\{e_\alpha; \alpha\in A\}}$ ist für $x \in H$ gegeben durch

$$Px = \sum_{\alpha\in A} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha$$

Beweis: (i). „$\Rightarrow$“: Aus der Konvergenz erhält man

$$\sup_{F\subseteq A \text{ endlich}} \underbrace{\left\| \sum_{\alpha\in F} a_\alpha \cdot e_\alpha \right\|}_{=\sum_{\alpha\in F}|a_\alpha|^2} < \infty$$

also $(a_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_2(A)$.

„$\Leftarrow$“: Ohne Einschränkung ist $A = \mathbb{N}$ (siehe Bemerkung oben), $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Für $m < k$ folgt:

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot e_j - \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{k} |a_j|^2$$

Daher $\left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot e_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und somit konvergent. Weiter: Für $\varepsilon > 0$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j|^2 < \varepsilon$$

Mit $y := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot e_j$ gilt für $\{1,\dots,k_0\} \subseteq F \subseteq \mathbb{N}$, F endlich:

$$\left\| \sum_{j\in F} a_j \cdot e_j - y \right\| \le \varepsilon$$

Somit $(a_j \cdot e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ summierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} (y|e_j) &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k | e_j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k | e_j \right) \\ &= a_j \\ \|y\|^2 &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \end{aligned}$$

(ii). Sei $x \in H$. Wegen Besselscher Ungleichung folgt

$$\sum_{\alpha\in A} |(x|e_\alpha)|^2 < \infty$$

und somit ist

$$y := \underbrace{\sum_{\alpha\in A} (x|e_\alpha) \cdot e_\alpha}_{\in\overline{\operatorname{lin}\{e_\alpha;\alpha\in A\}}}$$

konvergent nach (i). Es folgt $x - y \perp e_\alpha$ für alle $\alpha \in A$, da $(x|e_\beta) = (y|e_\beta)$ für $\beta \in A$. Aus Satz 14.3 folgt $Px = y$.

$\square$

15.3 Satz (Gram-Schmidt-Verfahren)

Sei H ein Prähilbertraum. Sei $M \subseteq H$ abzählbar, dann gibt es ein abzählbares Orthonormalsystem $(e_j; j \in A)$, sodass

$$\operatorname{lin} M = \operatorname{lin}\{e_j; j \in A\}$$

Ist $M = \{f_j; j \in N\}$ linear unabhängig, $f_j \neq f_k$ $(j \neq k)$, mit $N = \{1, \ldots, n\}$ oder $N = \mathbb{N}$, so erreicht man $A = N$,

$$\forall k \in N : \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_k\}$$

Bemerkung Es existieren Prähilberträume, die keine Orthonormalbasis besitzen. Für separable Prähilberträume H folgt aus Satz 15.3, dass H eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Beweis: Ohne Einschränkung $M = \{f_j; j \in N\}$ wie oben. Setze

$$e_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

$$g_2 := f_2 - (f_2|e_1) \cdot e_1 \qquad\qquad e_2 := \frac{g_2}{\|g_2\|}$$

Im k-ten Schritt:

$$g_k := f_k - \sum_{j=1}^{k-1} (f_k|e_j) \cdot e_j \qquad \perp\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$$

$$e_k := \frac{1}{\|g_k\|} \cdot g_k$$

Alle $g_k \neq 0$, da f_k linear unabhängig von $e_1, \ldots, e_{k-1}$. Außerdem gilt $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_k\}$ und wegen gleicher Dimension folgt die Gleichheit der Mengen. □

Bemerkung Das Orthonormalsystem wird eindeutig, wenn man in der Darstellung

$$e_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot f_j$$

verlangt, dass $a_k > 0$ ist: Für das konstruierte e_k aus 15.3 gilt dies. Ist

$$\tilde{e}_k = \sum_{j=1}^{k} \tilde{a}_j \cdot f_j$$

mit $\tilde{a}_k > 0$, dann $\tilde{e}_k = \gamma \cdot e_k$ mit $|\gamma| = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= (e_k|e_k) = a_k \cdot (e_k|f_k) \\ &= (\tilde{e}_k|\tilde{e}_k) = \tilde{a}_k \cdot (\tilde{e}_k|f_k) = \underbrace{\gamma \cdot \tilde{a}_k}_{a_k} \cdot (e_k|f_k) \end{aligned}$$

also $\gamma = 1$.

Beispiel (i). In $C[-1,1] \subseteq L^1[-1,1]$ betrachte $\{f_n; n \in \mathbb{N}_0\} =: M$ mit $f_n(x) := x^n$. Dann M linear unabhängig und total. Gram-Schmidt-Verfahren liefert Orthonormalbasis $(p_n; n \in \mathbb{N}_0)$ mit

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} \cdot x^j$$

und $a_{nn} > 0$ (Legendre-Polynome). Explizit:

$$p_n(x) = (2^n \cdot n!)^{-1} \cdot \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

(ii). In $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$ definiere Skalarprodukt durch

$$(f|g) = \int f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2}\,dx$$

Sei $M := \{f_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Orthonormalisierung liefert Hermite-Polynome (Orthonormalbasis),

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

(iii). $L^2((0,\infty), e^{-x}\,dx)$: Laguerre-Polynome

16

Satz von Krein-Milman

- Jeder Punkt in $[0,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist konvexe Linearkombination von den 8 Eckpunkten $(0,0,0)^T, (1,0,0)^T, \ldots$.
- Frage: Ist c_0 ein Dual? Ist $C[0,1]$ ein Dual?

Definition Sei X ein Vektorraum, $K \subseteq X$. Dann heißt $A \subseteq K$ extremal in K $:\Leftrightarrow A \neq \emptyset$, $\{\forall x, y \in K, t \in (0,1)$ mit $(1-t)\cdot x + t \cdot y \in A$: $x, y \in A\}$. $x \in K$ heißt Extremalpunkt $:\Leftrightarrow \{x\}$ ist extremal.

Beispiel In einem Kreis sind die Extremalpunkte die Randpunkte des Kreises.

Bemerkung Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $K \subseteq X$.

(i). $x^* \in X^*$ nach unten beschränkt auf K, $A := \{x \in K; \langle x, x^* \rangle = \inf_K x^*\} \neq \emptyset \Rightarrow A$ extremal in K.

(ii). $A \subseteq K$ extremal in K, $A_1 \subseteq A$ extremal in $A \Rightarrow A_1$ extremal in K.

16.1 Proposition

Sei X ein separierter lokalkonvexer Raum und sei $K \subseteq X, K \neq \emptyset$ kompakt. Dann besitzt K (mindestens einen) Extremalpunkt.

Beweis:
- Ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq K; A$ abgeschlossen, extremal $\}$ mit Ordnung $A_1 \leq A_2 :\Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2$. Sei $\mathcal{A}_1$ eine Kette in $\mathcal{A}$. Dann

$$A_1 := \bigcap_{A \in \mathcal{A}_1} A \neq \emptyset$$

da $\mathcal{A}_1$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und K kompakt ist. A_1 ist extremal (leicht) und abgeschlossen. Nach Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element A_0 von $\mathcal{A}$. Es genügt zu zeigen: A_0 ist einelementig.

- Angenommen es existieren $x_1, x_2 \in A_0, x_1 \neq x_2$. Dann gibt es $x' \in X'$, sodass

$$\langle x_1, x' \rangle < \langle x_2, x' \rangle$$

nach Satz 13.5 (wegen X separiert ist $\{x_2\}$ abgeschlossen). Sei

$$A := \left\{ x \in A_0; \langle x, x' \rangle = \inf_{A_0} x' \right\} \neq \emptyset$$

da A_0 kompakt ist (Satz von Weierstraß). Dann A extremal in A_0 (siehe Bemerkung oben) und daher auch in K. Wegen $A \subset A_0$ ist dies ein Widerspruch zur Maximalität von A_0.

□

16.2 Satz (Satz von Krein-Milman)

Seien X ein separierter lokalkonvexer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, E die Menge der Extremalpunkte von K. Dann $K \subseteq \overline{\operatorname{co} E}$. Ist K konvex, dann $K = \overline{\operatorname{co} E}$.

Beweis: • Ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}, K \neq \emptyset$. Annahme: Es existiert $x_0 \in K \backslash \overline{\operatorname{co} E}$. Satz 13.5: Es gibt $x' \in X'$ mit

$$\langle x_0, x' \rangle < \inf_{\operatorname{co} E} x'$$

- Sei

$$K_1 := \Big\{ x \in K; \langle x, x' \rangle = \underbrace{\inf_K x'}_{\leq \langle x_0, x' \rangle} \Big\}$$

dann $K_1 \neq \emptyset$ (K kompakt), extremal und abgeschlossene Teilmenge von K, $K_1 \cap E = \emptyset$. Nach Propositon 16.1 besitzt K_1 einen Extremalpunkt $x_1 \in K_1$. Dieser ist auch Extremalpunkt von K. Widerspruch zu $K_1 \cap E = \emptyset$!

- Ist K konvex, dann ist

$$K \subseteq \overline{\operatorname{co} E} \subseteq \overline{\operatorname{co} K} = K$$

□

Bemerkung (i). Ist X normiert, so ist $B_{X'}$ $\sigma(X', X)$-kompakt und konvex, somit $B_{X'} = \overline{\operatorname{co} E}^{\sigma(X', X)}$ mit E Extremalpunkte von $B_{X'}$.

(ii). Ist X ein Banachraum mit zu wenig Extremalpunkten von B_X, so ist X kein Dualraum.

Beispiel (i). B_{c_0} besitzt keine Extremalpunkte, damit ist c_0 kein Dual.

(Für $x \in B_{c_0}$ existiert $n \in \mathbb{N} : |x_n| < 1$. Dann ist

$$x = \frac{1}{2} \underbrace{(x + t \cdot e_n)}_{\in B_{c_0}} + \frac{1}{2} \underbrace{(x - t \cdot e_n)}_{\in B_{c_0}}$$

für $t > 0$ hinreichend klein.)

(ii). $C([0, 1]; \mathbb{R}) =: X$, dann $\pm 1_{[0,1]}$ Extremalpunkte von B_X. Somit $B_X \neq \overline{\operatorname{co} E}$, also X kein Dualraum.

Beweis analog zu (i)

(iii). $L^1((0, 1), dx) =: X$: B_X besitzt keine Extremalpunkte.

(Für $f \in X$, $f \neq 0$ gibt es $t_0 \in (0, 1)$:

$$\|1_{(0,t_0)} \cdot f\| = \|1_{[t_0,1)} \cdot f\|$$

Dann

$$f = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot 1_{(0,t_0)} \cdot f + 2 \cdot 1_{[t_0,1)} \cdot f\right)$$

Damit L^1 kein Dual.

Beispiel (i). Sei $\Omega = B_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Dann ist $X = \mathcal{H}(\Omega)$ (Menge der holomorphen Funktionen) mit kompakter Konvergenz ein vollständiger metrischer topologischer lokalkonvexer Vektorraum.

Sei $K := \{f \in \mathcal{H}(\Omega); \|f\|_\infty \leq 1\}$. Dann ist K kompakt (Satz von Montel) und konvex. Zum Beispiel sind $f_n(z) := z^n$ Extremalpunkte.

Seien $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty), c_n \uparrow \infty$ und

$$K_{(c_n)} := \Big\{ f \in \mathcal{H}(\Omega); \|f\|_{B[0, 1-\frac{1}{n}]} \leq c_n \Big\}$$

dann ist $K_{(c_n)}$ kompakt. Sogar: K beschränkt in $\mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow \exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty), c_n \uparrow \infty$ mit $K \subseteq K_{(c_n)}$.

(ii). $C^\infty(\Omega)$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist Montelraum, d.h. jede beschränkte Menge ist relativ kompakt.