Technische Universität Dresden

Skript:

Graphentheorie

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Dr. Ulrike Baumann
Sommersemester 2011
Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung, Satz von Turan, Ramsey-Zahlen

Definition:

Ein Graph $G = (V, E, f)$ besteht aus einer Menge V von Elementen erster Art, einer Menge E von Elementen zweiter Art und einer auf G erklärten Inzidenzfunktion f, die jedem $e \in E$ ein geordnetes oder ungeordnetes Paar nicht notwendig verschiedener Elemente aus V zuordnet.

Beispiel:

(i). $V = \{a, b, c\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $f = \{(e_1, (a, b)), (e_2, \{b, c\}), (e_3, \{a, c\}), (e_4, \{a, c\}), (e_5, \{b, b\})\}$. Offenbar f nicht injektiv (Mehrfachkante), $(e_5, \{b, b\})$ heißt Schlinge.

Bemerkung:

(i). Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißen schlicht.

(ii). Graphen, bei denen f jedem $e \in E$ ein ungeordnetes Paar verschiedener Elemente aus V zuordnet, heißen ungerichtet.

(iii). Graphen mit endlicher Menge V und endlicher Menge E heißen endliche Graphen.

Im Folgenden: G endlich, schlicht, ungerichtet kurz als Graph bezeichnet.

Definition:

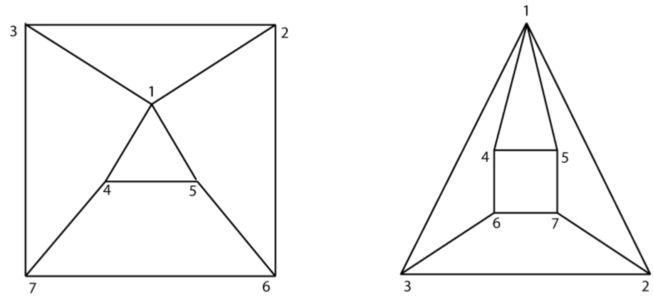
Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V (Knotenmenge) und einer Menge E (Kantenmenge), wobei $V \neq \emptyset$, V endlich, $E \subseteq \binom{V}{2}$. Die Elemente von V heißen Knoten, die Elemente von E heißen Kanten.

Graphendiagramm	Graph $G = (V, E)$
	$x, y \in V$ $e = yx = xy = \{x, y\} \in E$

Sprechweise: x, y inzidieren mit e, x, y sind Endpunkte von e, x, y sind adjazente Knoten. x, y heißen Nachbarn.

Bemerkung:

(i). Derselbe Graph besitzt unterschiedliche Graphendiagramme.



Definition:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der Grad $d_G(v)$ (kurz: $d(v)$) eines Knotens v im Graphen G ist die Anzahl der Nachbarn von v in G:

$$d_G(v) := |\{w \in V; \{v, w\} \in E\}|$$

Dann heißt

$$\Delta G := \max_{v \in V} d_G(v) \qquad \delta(G) := \min_{v \in V} d_G(v)$$

heißt Maximalgrad bzw. Minimalgrad von G. Haben in G alle Knoten den Grad r, dann heißt G r-regulär (regulär vom Grad r).

Lemma: Handschlaglemma

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis. (doppeltes Abzählen) Betrachte alle Paare (v, e) mit $v \in V$, $e \in E$. Dann

(i). $\sum_{v \in V} d(v)$

(ii). $2|E|$

□

Folgerung: (i). Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in Graphen G ist eine gerade Zahl.

(ii). Es gibt keinen r-regulären Graphen mit ungeradem r und ungerader Knotenanzahl.

Definition:

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen. Eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ mit

$$\forall u, v \in V_1 : \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

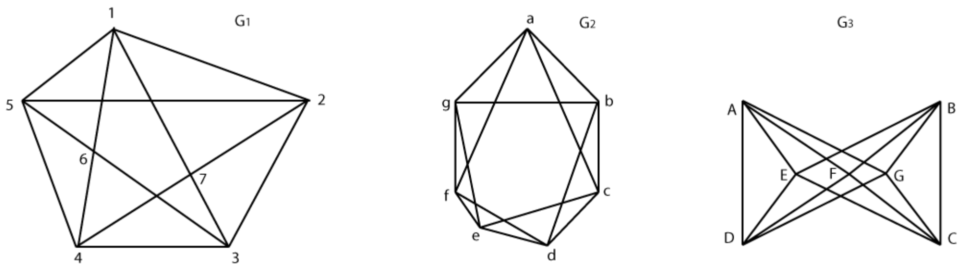
heißt isomorphe Abbildung von G_1 auf G_2. G_1 heißt isomorph zu G_2, wenn es eine isomorphe Abbildung von G_1 auf G_2 gibt.

Bemerkung:

(i). Unbeschriftete Graphendiagramme beschreiben die Isomorphieklasse.

Isomorphie-Problem für Graphen G_1, G_2: $G_1 \cong G_2$?

Beispiel:



(i). $G_1 \cong G_2$:

$$f : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto d, 4 \mapsto e, 5 \mapsto g, 6 \mapsto f, 7 \mapsto c$$

f ist ein Isomorphismus.

(ii). $G_1 \ncong G_3$: Löscht man in G_2 einen Knoten v und die zu v adjazenten Kanten, sind im Restgraphen zwei Knoten vom Grad 4 adjazent. Löscht man in G_3 den Knoten E und die zu E adjazenten Kanten, existieren im Restgraphen genau zwei Knoten vom Grad 4, die nicht adjazent sind.

Bezeichnung: Seien $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Durch Löschen von v und der zu v adjazenten Kanten entsteht aus G der Graph $G - v$. Durch Löschen von $e \in E$ entsteht der Graph $G - e$.

Vermutung (Ulamsche Vermutung, reconstruction conjecture): Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$. Kennt man die Isomorphieklassen der Graphen $G - v_i$ $(i = 1, \dots, n)$, dann

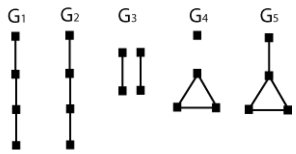
(i). ist die Isomorphieklasse von G eindeutig bestimmt.

(ii). kann die Isomorphieklasse von G eindeutig ermittelt werden.

Beispiele:

(i). Für $n = 2$ kann die Isomorphieklasse nicht eindeutig ermittelt werden.

(ii). $G_i := G - v_i = (V - \{v_i\}, E_i)$. Seien $G_1, \dots, G_5$ gegeben durch:



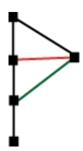
Dann $|V| = 5$ und

$$(|V| - 2) \cdot |E| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| = 15$$

also $|E| = 5$,

$$d(v_1) = 2 \quad d(v_2) = 2 \quad d(v_3) = 3 \quad d(v_4) = 2 \quad d(v_5) = 1$$

Lösung (rot: falsch, grün: richtig):



Bemerkung: Reguläre Graphen sind rekonstruierbar.

Definition:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit $E = \binom{V}{2}$ heißt vollständiger Graph und wird für $|V| = n$ mit K_n bezeichnet.

Definition:

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen. Dann heißt G_1 Untergraph von G_2, wenn $V_1 \subseteq V_2$ und $E_1 \subseteq E_2$ gilt. Ein Untergraph $G_1' = (V_1', E_1')$ von G_2 heißt aufgespannter (induzierter) Untergraph von G_2, wenn gilt

$$\{u, v\} \in E_2 \wedge u, v \in \underbrace{V_1'}_{V(G_1')} \Rightarrow \{u, v\} \in E_1'$$

Satz:

Ist G ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und Kantenanzahl $> \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, dann enthält G einen Untergraphen K_3 („Dreieck“).

Beweis. Annahme: Es existiert kein Dreieck als Untergraph. Sei $\{x, y\} \in E(G)$. Dann gilt $d(x) + d(y) \leq n$ (Nachbarn von x und y sind paarweise verschieden).

$$\underbrace{\sum_{\{x,y\} \in E(G)} (d(x) + d(y))}_{= \sum_{v \in V(G)} d(v)^2} \leq n \cdot |E(G)|$$

Laut Handschlag-Lemma:

$$\left(\sum_{v \in V} d(v) \right)^2 = (2|E(G)|)^2$$

Damit:

$$4|E|^2 = \left(\sum_{v \in V} 1 \cdot d(v) \right)^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} (1^2 + \ldots + 1^2) \cdot \sum_{v \in V} d(v)^2 \leq n^2 \cdot |E|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|E|}_{\in \mathbb{N}} \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

Widerspruch! □

Bemerkung:

(i). $n = 6, |E| = 9 = \lfloor \frac{6^2}{4} \rfloor$, ohne Dreieck.

(ii). $n = 5$, $|E| = 6 = \lfloor \frac{5^2}{4} \rfloor$, ohne Dreieck

Definition:

$G = (V, E)$ heißt bipartiter Graph $G(A, B)$, wenn V so in zwei Teilmengen A, B zerlegt werden kann, dass jede Kante von G einen Knoten aus A mit einem Knoten aus B verbindet. Gilt für einen bipartiten Graphen $G(A, B)$, dass die Kantenanzahl $|A| \cdot |B|$ ist, dann wird $G(A, B)$ vollständiger bipartiter Graph genannt $K_{|A|,|B|}$.

Frage: Gegeben Knotenanzahl n, $p \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq p \leq n$. Gesucht Graph(en) mit Knotenanzahl n, die keinen vollständigen Graphen K_p als Untergraph enthalten und größtmögliche Kantenanzahl haben.

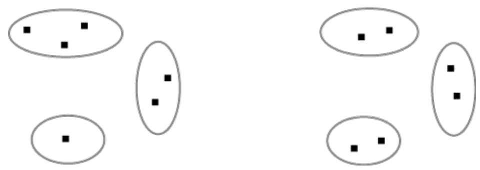
Konstruktion: $V := V_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} V_{p-1}$ mit $|V_i| = n_i$ $(i = 1, \ldots, p-1)$, d.h. $n = \sum_{i=1}^{p-1} n_i$. Je zwei Knoten aus V_i, V_j $(i \neq j)$ werden durch eine Kante verbunden $(i, j = 1, \ldots, p-1)$. Dann $G = (V, E) = K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ (multipartiter Graph) mit

$$|E| = \sum_{i<j} n_i \cdot n_j$$

G enthält keinen K_p als Untergraph. (Annahme: $K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ enthält K_p. Dann liegen zwei adjazente Knoten in derselben Teilmenge V_i. Widerspruch zur Konstruktion!)

Beispiel:

(i). $n = 6$, $p = 4$: $K_{1,2,3}$ (11 Kanten) bzw. $K_{2,2,2}$ (12 Kanten) ohne K_4



Behauptung: Gilt $n = \sum_{i=1}^{p-1} n_i$ $(2 \leq p \leq n)$ und hat $G := K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ größtmögliche Kantenanzahl, dann gilt $|n_i - n_j| \leq 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Beweis. Annahme: $n_i - n_j \geq 2$. Konstruiere aus G einen Graphen G' wie folgt: Man lösche in V_i einen Knoten v und alle dazu adjazenten Kanten. Verbinde anschließend v mit allen Knoten aus $V_i \setminus \{v\}$ und allen Knoten aus Klassen V_k $(k \notin \{i, j\})$. Dann gilt: $G' = K_{\ldots,n_i-1,\ldots,n_j+1}$,

$$|E(G')| = |E(G)| + \underbrace{n_i - 1 + n_j}_{\geq 1}$$

Widerspruch! $\square$

Definition:

Ein Graph $K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ mit $|n_j - n_i| \leq 1$ für $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$ und $n := \sum_{i=1}^{p-1} n_i$, $2 \leq p \leq n$ heißt Turán-Graph T_n^{p-1}.

Bemerkungen:

(i). T_n^{p-1} ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. (Division mit Rest: $n = q \cdot (p-1) + r$ $(r < p-1)$. Die ersten r Klassen haben dann $q+1$ Knoten, die restlichen Klassen q Knoten.)

(ii). $|E(T_n^{p-1})| =$ Übung

(iii). $|E(T_n^{p_1-1})| > |E(T_n^{p_2-1})|$ für $p_1 > p_2$

Satz: Turán

Sei $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$. Jeder Graph G mit Knotenanzahl n, der keinen K_p als Untergraphen enthält und größtmögliche Kantenanzahl hat, ist ein Turán-Graph T_n^{p-1}.

Beweis. (i). Noch zu zeigen: $G \cong K_{n_1,\ldots,n_k}$

(ii). $G \cong T_n^k$

(iii). $k = p - 1$

Zu (i):

(i). Annahme: u, v, w seien Knoten von G, $\{u, v\} \notin E$ und $\{v, w\} \notin E$, aber $\{u, w\} \in E$.

- 1.Fall: $d(u) > d(v)$ oder $d(w) > d(v)$
  O.B.d.A. sei $d(u) > d(v)$. Aus G den Graphen G' wie folgt konstruieren: Lösche v und alle zu v adjazenten Kanten. „Verdopple“ Knoten u, d.h. man füge u' hinzu und verbinde u' mit $x \in V$, falls $\{u, x\} \in E(G)$. Dann gilt $|V(G')| = n, |E(G')| = |E(G)| + d(u) - d(v) > |E(G)|$. Widerspruch zur Maximalität von G. (G' enthält keinen K_p, denn: Enthält G' einen K_p, dann ist u' ein Knoten in diesem K_p, aber u kein Knoten von K_p. Dann enthält aber auch G einen vollständigen Graphen mit p Knoten. Man findet diesen, indem man in K_p u' löscht und u hinzufügt.)
- 2.Fall: $d(u) \leq d(v)$ und $d(w) \leq d(v)$
  G'' aus G konstruieren: Lösche u und w in G, „verdreifachen“ von v, d.h. man füge v', v'' hinzu und verbinde diese mit den Nachbarn von v. Dann $|V(G'')| = n$, $|E(G'')| = |E(G)| - (d(u) + d(w)) + 2d(v) + 1 > |E(G)|$. G'' enthält keinen K_p als Untergraph. Widerspruch zur Maximalität von G.

□

p-Cliquen-Problem Gegeben: $G = (V, E)$. Gesucht ist das größte p so, dass G einen K_p als Untergraph enthält. (NP-vollständig)

Satz:

Sei G ein Graph mit n Knoten und $|E(G)| \geq |E(T_n^{p-1})|$. Dann ist G zu T_n^{p-1} isomorph oder man findet wie folgt einen vollständigen Untergraphen K_p in G: Wähle in $G = G_1$ einen Knoten v_1 mit $d_{G_1}(v_1) = \Delta(G_1)$. Betrachte den Untergraphen G_2 von G_1, der von den Nachbarn von v_1 in G_1 aufgespannt wird. Wähle in G_2 einen Knoten v_2 mit $d_{G_2}(v_2) = \Delta(G_2)$ usw. So findet man $v_1, \ldots, v_p$ von G, die einen K_p in G aufspannen.

Ramsey-Zahlen Party-Problem: Wieviele Personen müssen min. anwesend sein, damit unter ihnen p Personen sind, die untereinander bekannt sind, oder p Personen, die paarweise nicht miteinander bekannt sind?

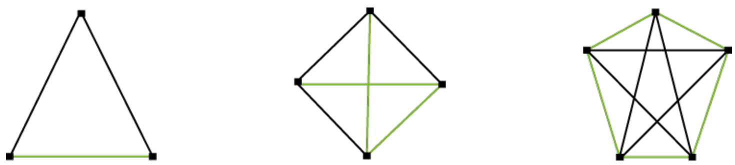
Definition:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann nennt man $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \backslash E)$ Komplement von G.

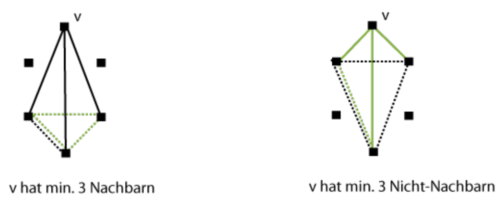
Bezeichnung: $R(p) \ldots$ Jeder Graph mit $\geq R(p)$ Knoten enthält einen K_p als Untergraph oder einen $\bar{K}_p$ als induzierten Untergraph.

Beispiele:

(i). $p = 3$: $R(p) > 3$ (links), $R(3) > 4$ (mitte), $R(3) > 5$ (rechts)



$R(3) = 6$: Entweder: Alle Graphen mit 6 Knoten untersuchen, das sind $2^{\binom{6}{2}}$. Oder: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenanzahl 6, $v \in V$ (fest). Dann gilt:



(ii). $R(4) = 18$ (Beweis: später)

(iii). $42 < R(5) \leq 50$

Definition:

Sei $R(n_1, n_2)$ die kleinste natürliche Zahl, sodass jeder Graph mit mindestens $R(n_1, n_2)$ Knoten ein K_{n_1} als Untergraph oder einen $\bar{K}_{n_2}$ als induzierten Untergraph enthält. $R(n_1, n_2)$ wird Ramsey-Zahl genannt. (Wohldefiniert, siehe unten)

Eigenschaften von $R(n_1, n_2)$

(i). $R(1, n_2) = 1,\ R(n_1, 1) = 1$

(ii). $R(2, n_2) = n_2,\ R(n_1, 2) = n_1$

(iii). $R(n_1, n_2) = R(n_2, n_1)$

- „$\geq$“: (Idee: G sei ein Graph mit $R(n_1, n_2)$ Knoten. G enthält K_{n_1} oder $\bar{K}_{n_2}$, also enthält $\bar{G}$ $\bar{K}_{n_1}$ oder K_{n_2}.) Sei G ein Graph mit $R(n_1, n_2)$ Knoten. $\bar{G}$ hat ebenfalls Knotenanzahl $R(n_1, n_2)$ und enthält deshalb einen K_{n_1} oder einen $\bar{K}_{n_2}$. Mit obiger Idee folgt, dass G K_{n_2} oder $\bar{K}_{n_1}$ enthält.
- „$\leq$“: analog

(iv). $R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)$ für $n_1, n_2 \geq 2$

Beweis:

- Induktionsanfang: $n_2 = R(2, n_2) \leq R(1, n_2) + R(n_2 - 1, 2) = 1 + (n_2 - 1) = n_2$ und $n_1 = R(n_1, 2) = R(2, n_1) \leq n_1$
- Induktionsschritt: Zeigen:

$$R(n_1, n_2) \leq \underbrace{R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)}_{n}$$

also zu zeigen, dass jeder Graph mit Knotenanzahl n einen K_{n_1} als Untergraph oder einen $\bar{K}_{n_2}$ als aufgespannten Untergraph enthält.
Sei v ein beliebiger fester Knoten. Sei U_1 die Menge der Nachbarn von v in G und U_2 die Menge der Nichtnachbarn von v in G, dann $n = |U_1| + |U_2| + 1$. Annahme: $|U_1| < R(n_1 - 1, n_2)$ und $|U_2| < R(n_1, n_2 - 1)$. Damit folgt $|U_1| + |U_2| \leq n - 2$. Widerspruch! Also $|U_1| \geq R(n_1 - 1, n_2)$ oder $|U_2| \geq R(n_1, n_2 - 1)$.

(1) $|U_1| \geq R(n_1 - 1, n_2)$: Der von U_1 aufgespannte Untergraph enthält einen $K_{n_1 - 1}$ (bildet zusammen mit v einen K_{n_1}) oder einen $\bar{K}_{n_2}$

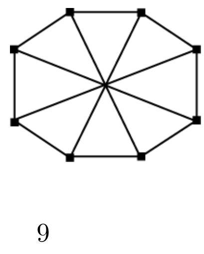
(2) $|U_2| \geq R(n_1, n_2 - 1)$: Der von U_2 aufgespannte Untergraph enthält einen K_{n_1} oder einen $\bar{K}_{n_2 - 1}$ (bildet zusammen mit v einen $\bar{K}_{n_2}$).

(v). Verbesserung von (iv):

$$R(n_1, n_2) \leq \begin{cases} R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1) - 1 & R(n_1 - 1, n_2) \equiv R(n_1, n_2 - 1) \equiv 0 \mod 2 \\ R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

(1) $R(3, 4) \leq 6 + 4 - 1 = 9$, $R(3, 4) > 8$ (Bild), also $R(3, 4) = 9$.



n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	6	9	14	18	23	28	36
4	4	9	18	25				

(2) $R(4,4) = R(4) \leq 9 + 9 = 18$, zeige durch Konstruktion, dass $R(4) > 17$, also $R(4,4) = 18$.

(vi). Es gilt:

$$R(n_1, n_2) \leq \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}$$

Beweis:

- Induktionsanfang:

$$n_2 = R(2, n_2) = \binom{2 + n_2 - 2}{1} = n_2$$

  Analog $R(n_1, 2)$.
- Induktionsschritt:

$$R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1) \overset{\text{IV}}{=} \binom{n_1 - 1 + n_2 - 2}{n_1 - 2} + \binom{n_1 + n_2 - 1 - 2}{n_1 - 1}$$
$$= \binom{n_1 + n_2 - 3}{n_1 - 2} + \binom{n_1 + n_2 - 3}{n_1 - 1} = \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}$$

(vii). $R(p,p) \leq 2^{2p-3}$

Beweis:

$$R(p,p) \overset{(vi)}{\leq} \binom{2p-2}{p-1} = \binom{2p-3}{p-2} + \binom{2p-3}{p-1}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{2p-3} \binom{2p-3}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{2p-3-i} = (1+1)^{2p-3} = 2^{2p-3}$$

Satz: Ramsey

Jeder Graph mit mindestens 2^{2p-3} Knoten enthält einen K_p als Untergraph oder einen $\bar{K}_p$ als induzierten Untergraph.

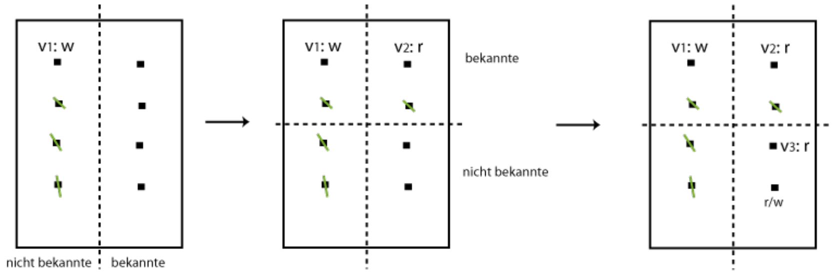
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n \geq 2^{2p-3}$ Knoten. Ziel: Konstruktion von K_p bzw. $\bar{K}_p$.

- Wähle $V_1 \subseteq V$ mit $|V_1| = 2^{2p-3}$ und betrachte den von V_1 aufgespannten Untergraphen G_1. Sei $v_1 \in G_1$ ein fester Knoten. Wähle eine Menge $V_2 \subseteq V_1 \backslash \{v_1\}$ mit $|V_2| = 2^{2p-4}$ so aus, dass

  (i). Typ (α): v_1 zu allen Knoten aus V_2 adjazent

  (ii). Typ (β): v_1 zu allen Knoten aus V_2 nicht adjazent

  V_2 spannt einen Untergraphen G_2 von G_1 auf. Sei v_2 ein fester Knoten von G_2 usw. Am Ende hat man Knoten $v_1, \ldots, v_{2p-3}, v_{2p-2}$ konstruiert. Die Knoten $v_1, \ldots, v_{2p-3}$ spannen einen K_{p-1} oder $\bar{K}_{p-1}$ auf. Dieser K_{p-1} bzw. $\bar{K}_{p-1}$ bildet zusammen mit v_{2p-2} einen K_p bzw. $\bar{K}_p$.



2

Bäume und Gerüste

Definition:

Sei $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $|V| = n + 1$ und $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Dann ist $G = (V, E)$ ein Weg der Länge n von v_0 nach v_n ($n \in \mathbb{N}_0$). Bezeichnung: P_n

Bemerkung:

- Ein Weg ist durch die Knotenfolge $v_0, \ldots, v_n$ bzw. durch die Kantenfolge $v_0v_1, \ldots, v_{n-1}v_n$ beschreibbar.

Definition:

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ($n \geq 3$) mit $|V| = n$ und $E = \{v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Dann ist $G = (V, E)$ ein Kreis der Länge n. Bezeichnung C_n

Bemerkung:

- Ein Weg ist durch die Knotenfolge $v_1, \ldots, v_n$ bzw. durch die Kantenfolge $v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ beschreibbar.

Definition:

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten $u, v \in V$ einen Weg von u nach v in G gibt. Graphen, die nicht zusammenhängend sind, zerfallen in Komponenten (das sind maximale zusammenhängende Untergraphen).

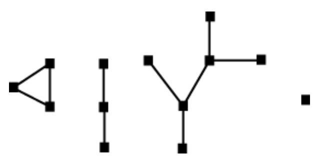
Definition:

Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis als Untergraph enthält, ist ein Baum. Kreislose Graphen sind Wälder.

Beispiel:

(i). n: Anzahl der Isomorphieklassen für Bäume (V, E)

(ii). G ist nicht zusammenhängend und hat 4 Komponenten, von denen drei Bäume sind:



$\lvert v\rvert$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	1	1	1	2	3	6	11	23	47

Folgerung: Eigenschaften von Bäumen (i). Jeder Baum mit Knotenanzahl > 1 enthält mindestens zwei Knoten vom Grad 1 (Blätter).

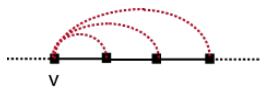
(ii). Jeder Baum mit Knotenanzahl n hat Kantenanzahl $n - 1$.

(iii). Jeder zusammenhängende Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.

(iv). Jeder kreislose Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.

(v). In jedem Baum gibt es zu zwei Knoten u, v genau einen Weg von u nach v.

Beweis. (i). Gestrichelte rote Linien können keine Kanten sein, da sonst ein Kreis entsteht.



(ii). Induktion über n, nutze (i)

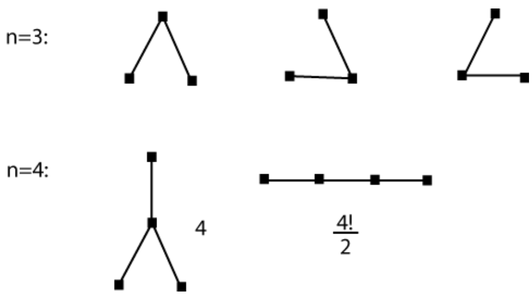
(iii). Lösche Kanten in Kreisen, dann existiert Baum als Untergraph mit n Knoten, also ist der Untergraph (Baum) bereits der Graph selbst.

(iv). Angenommen es gibt Komponenten $G_1, \dots, G_k$ mit Knotenanzahlen $n_1, \dots, n_k$, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. Nach (ii) hat jede Komponenten $n_j - 1$ Kanten. Es muss $\sum_{j=1}^{k} n_j - 1 = n - 1$ gelten, also $k = 1$.

(v). Existenz folgt wegen zusammenhängend. Gibt es zwei Wege, dann existiert ein Kreis im Graph.

□

Bäume zählen:



n Knoten	Anzahl der Bäume
1	1
2	1
3	$3^1 = 3$
4	$4 + \frac{4!}{2} = 16 = 4^2$
5	$5^3 = 125$
6	6^4

Bemerkung: Die Anzahl der Bäume mit der Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ $(n \geq 3)$ ist n^{n-2}.

Beweis: Prüfer-Code

- Behauptung: Es gibt eine bijektive Abbildung von der Menge der Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ auf die Menge der $(n-2)$-Tupel $(a_1, \dots, a_{n-2})$ mit $a_i \in \{1, \dots, n\}$ $(i \in \{1, \dots, n-2\})$. Dann folgt, dass es n^{n-2} Tupel gibt, also n^{n-2} Bäume.
- Baum $T \to (a_1, \dots, a_{n-2})$:

(i). Wähle unter Knoten vom Grad 1 in T den kleinsten Knoten v. a_1 ist der Nachbar von v in T.

(ii). Lösche v und die mit v inzidierende Kante in T. Es entsteht ein Baum mit $n-1$ Knoten. Gehe zu (i).

- $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \to$ Baum T:

  (i). Wähle in $\{1, \ldots, n\}$ das kleinste b_1, das nicht in $\{a_1, \ldots, a_{n-2}\}$ enthalten ist. Füge die Kante $b_1 a_1$ (Anfangspunkt $b_1 \to a_1$ Endpunkt) hinzu.

  (ii). Wähle in $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{b_1\}$ das kleinste b_2, das nicht in $\{a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ enthalten ist. Füge die Kante $b_2 a_2$ hinzu. Usw.

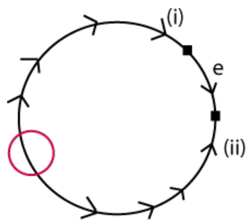
  (iii). In der Menge $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-2}\}$ sind genau zwei Knoten u, v enthalten. Füge die Kante uv hinzu.

- Noch zeigen: Anwenden der Konstruktion auf $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ mit $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ für $i \in 1, \ldots, n-2$ liefert einen Baum. Konstruktion hat n Knoten, $n-1$ Knoten und ist kreislos. Behauptung folgt dann mit obiger Folgerung.

  Für kreislos: Annahme, es entsteht bei Anwenden der Konstruktion durch Hinzufügen einer Kante e ein Kreis.

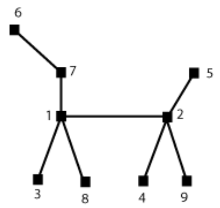
  (i). Jeder Knotenpunkt ist Anfangspunkt höchstens einer Kante.

  (ii). Kein Endpunkt einer Kante ist Anfangspunkt einer früher gezeichneten Kante.



Also existiert ein Knoten w auf dem Kreis, der Anfangspunkt zweier Kanten ist. Widerspruch!

Beispiel für Prüfer-Code:

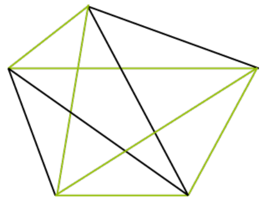


Definition:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Baum $T = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$ heißt Gerüst von G (spanning tree).

Bemerkung:

- Graphen, die nicht zusammenhängend sind, haben keine Gerüste.
- Jeder zusammenhängende Graph hat mindestens ein Gerüst. Konstruierbar durch sukzessives Löschen von Kanten (grün), die in einem Kreis enthalten sind.



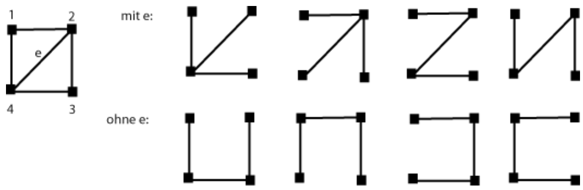
Bezeichnung: $\tau(G)$ ist die Anzahl der Gerüste des Graphen G.

Satz: Cayley

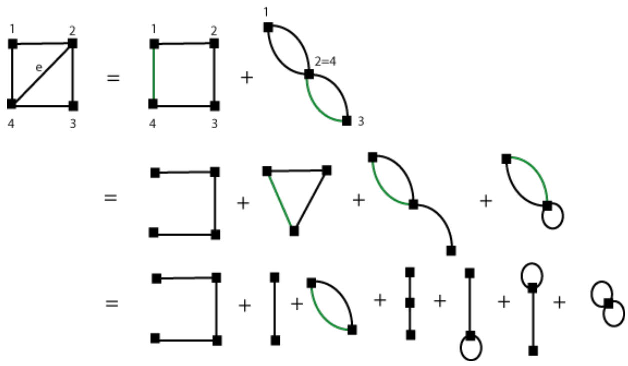
$$\forall n \in \mathbb{N} : \tau(K_n) = n^{n-2}$$

Beispiel:

(i). G besitzt 8 Gerüste.



Bestimmung mit Hilfe des nächsten Satzes:



Satz:

Ist e die Kante des Graphen G, aber keine Schlinge, dann gilt:

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \backslash e)$$

Dabei entsteht $G - e$ durch Löschen der Kante e und $G\backslash e$ durch Kontraktion der Kante e (d.h. Löschen der Kante e und Identifizieren ihrer Endpunkte).

Beweis. (i). Jedem Gerüst von G, das e nicht enthält, entspricht ein Gerüst von $G - e$.

(ii). Jedem Gerüst von G, das e enthält, entspricht ein Gerüst von $G\backslash e$.

□

Definition:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann nennt man $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G und $D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

die Gradmatrix von G.

Satz: Matrix-Gerüst-Satz

Sei G ein zusammenhängender Graph mit $n > 1$ Knoten. Dann ist

$$\tau(G) = \det(D - A)_i$$

wobei D Gradmatrix, A Adjazenzmatrix von G bezeichnen und $(D-A)_i$ aus $D-A$ durch Streichen der i-ten Zeile und Spalte entsteht ($i \in \{1, \dots, \}$ beliebig).

Bemerkung: Die Aussage des Satzes gilt auch für Graphen G, die nicht zusammenhängend sind. (Graph zerfällt in k Komponenten $C_1, \dots, C_k$, wende Methode von oben an.)

Beweis. Induktion über $|E|$

- Induktionsanfang ($|E| = 1$): Offenbar $\tau(G) = 1$ und

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_1 = \det 1 = 1$$

- Induktionsschritt ($|E| > 1$): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $e = v_1 v_2$ eine Kante.

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \backslash e)$$

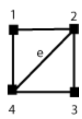
Für beide Terme auf rechter Seite Induktionsvoraussetzung benutzbar, da die Kantenanzahl kleiner als von G ist. (Für Adjazenzmatrix hier: $a_{ij} = s$, falls s Kanten zwischen v_i und v_j existieren; entsprechende Anpassung der Gradmatrix.) Damit:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} d_1 & \dots & \dots \\ \vdots & d_2 & N \\ \vdots & N^T & M \end{pmatrix}_1 \\ &= d_2 \cdot \det M + c \\ \tau(G-e) + \tau(G \backslash E) &= \det \begin{pmatrix} d_1 - 1 & \dots & \dots \\ \vdots & d_2 - 1 & N \\ \vdots & N^T & M \end{pmatrix}_1 + \det \begin{pmatrix} d' & \dots \\ \vdots & M \end{pmatrix}_1 \\ &= (d_2 - 1) \cdot \det M + c + \det M = d_2 \cdot \det M + c \end{aligned}$$

wobei M eine quadratische Matrix, N ein Zeilenvektor.

□

Beispiel:

(i). Für bereits bekannten Beispielgraphen 

$$D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \det(D-A)_2 \qquad = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 8$$

(ii). vollständige Graphen:

$$\tau(K_n) = \det\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & n & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = n^{n-2}$$

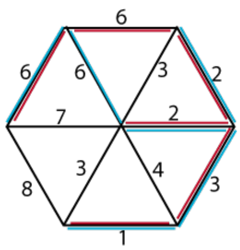
Definition:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\omega : E \to \mathbb{R}_+$. Dann nennt man ein Gerüst T mit

$$\omega(T) := \sum_{e \in E(T)} \omega(e) \leq \sum_{e \in E(T')} \omega(e) = \omega(T')$$

für alle Gerüste T' von G ein Minimalgerüst von G mit ω.

Beispiel: (blau: T_1, rot: T_2)



$w(T_1) = 1 + 2 + 2 + 3 + 6 + 6 = 20$ $\qquad$ $w(T_2) = 1 + 2 + 2 + 3 + 6 + 6 = 20$

Kruskal-Algorithmus zur Konstruktion eines Minimalgerüsts Kruskal-Algorithmus ist ein Greedy-Algorithmus.

(i). Man markiere eine Kante mit kleinstmöglichem Bewertung und ihre Endpunkte.

(ii). Markiere im jeweils nächsten Schritt eine (unmarkierte) Kante mit kleinstmöglicher Bewertung, die höchstens einen Endpunkt im bereits markierten Wald hat.

Bemerkung: Nach $(n-1)$ Schritten hat man ein Gerüst markiert.

Satz:

Mit dem Algorithmus von Kruskal markiert man ein Minimalgerüst in G mit ω.

Beweis. Sei $T = (V, \{e_1, \dots, e_{n-1}\}))$ das markierte Gerüst wobei $\omega(e_1) \leq \dots \leq \omega(e_{n-1})$. Annahme: Es gibt $T' = (V, \{e'_1, \dots, e'_{n-1}\})$ mit $\omega(T') < \omega(T)$ wobei $\omega(e'_1) \leq \dots \leq \omega(e'_{n-1})$. Es existiert ein $i \in \{2, \dots, n-1\}$ mit $\omega(e'_i) < \omega(e_i)$. Betrachte die Wälder $(V, \{e_1, \dots, e_{i-1}\})$ und $(V, \{e'_1, \dots, e'_{i-1} e'_i\})$. Es existiert eine Kante e'_j, die nicht beide Endpunkte in derselben Komponente von $(V, \{e_1, \dots, e_{i-1}\})$ hat. Es gilt $\omega(e'_j) \leq \omega(e'_i) < \omega(e_i)$. Also würde Kruskal-Algorithmus im nächsten Schritt eine Kante $\tilde{e}$ mit $\omega(\tilde{e}) \leq \omega(e'_j) < \omega(e_i)$ markiert. Widerspruch! □

Bemerkung: Ist $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ injektiv ist, dann existiert genau ein Minimalgerüst.

Beweis. T, T' $(T \neq T')$ seien Minimalgerüste. Es existiert eine Kante $e = uv \in E(T) \backslash E(T')$. $T - e$ besteht aus zwei Komponenten C_u $(u \in V(C_u))$ und C_v $(v \in V(C_v))$. In T' existiert genau ein Weg von u nach v. Diejenige Kante, die den ersten Endpunkt in C_u und den zweiten in C_v hat, wird mit e' bezeichnet. Wegen der Injektivität von ω gilt $\omega(e) < \omega(e')$ (oder $\omega(e') < \omega(e)$). $(T - e) + e'$ (oder $(T' - e') + e$) sind Gerüste. Eines der beiden Gerüste $\tilde{T}$ erfüllt $\omega(\tilde{T}) < \omega(T) = \omega(T')$. Widerspruch! □

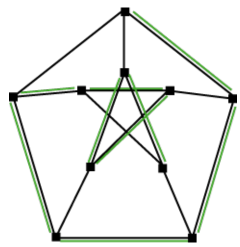
3 Hamiltonkreise von Graphen

Definition: (i). Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Untergraph $H = (V_H, E_H)$ in G mit $V = V_H$, der ein Kreis ist. G heißt hamiltonsch, wenn er einen Hamilton-Kreis enthält.

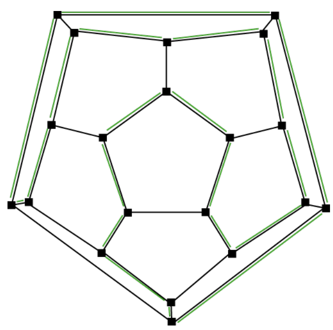
(ii). Ein Hamiltonweg in $G(V, E)$ ist ein Untergraph $P = (V_p, E_p)$ in G mit $V = V_p$, der ein Weg ist.

Beispiel:

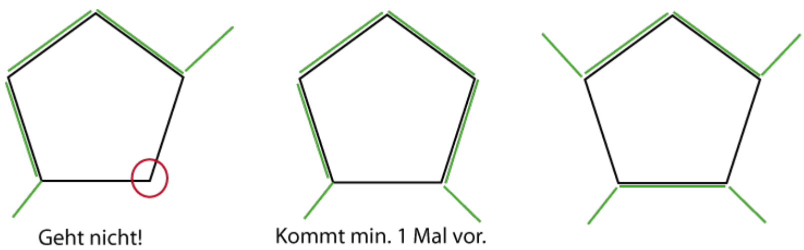
(i). Petersen-Graph P enthält keinen Hamilton-Kreis. (Hinweis: „Speichen“ betrachten, man benutzt eine gerade Anzahl.) Aber: Er enthält einen Hamiltonweg.



(ii). Dodekaedergraph:



Bausteine zum Hamilton-Kreis:



Anzahl der Hamilton-Kreise $12 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 30$ [12: Anzahl der Fünfecke, 5: fehlende Kante in Baustein 1 frei wählbar, 2: bei einem Schritt zwei Kanten wählbar, $\frac{1}{4}$: 4 5-Ecke mit 4 Kanten dabei]

Bemerkung: Existiert in G ein Hamilton-Kreis, dann existiert auch ein Hamiltonweg.

Satz:

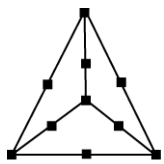
Ist $G = (V, E)$ hamiltonsch, dann gilt:

$$\forall S \subseteq V(G), S \neq \varnothing : c(G - S) \leq |S| \qquad (*)$$

wobei $c(G - S)$ die Anzahl der Komponenten von $G - S$ bezeichnet.

Beweis. Sei $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \neq \varnothing$. Betrachte einen Hamilton-Kreis H in G. $H - v_1$ ist ein Weg, also zusammenhängend, also hat $H - v_1$ nur eine Komponente. $(H - v_1) - v_2 = H - \{v_1, v_2\}$ hat höchstens zwei Komponenten, usw. Mit Induktion folgt, dass $H - S$ höchstens $|S|$ Komponenten hat. Wegen $c(G - S) \leq c(H - S)$ gilt die Behauptung. □

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Petersen-Graph erfüllt $(*)$ und hat keinen Hamilton-Kreis. Oder auch:



Definition:

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt t-robust, wenn gilt:

$$\forall S \subseteq V(G) : c(G - s) > c(G) \Rightarrow c(G - s) \leq \frac{|S|}{t}$$

Robustheitsvermutung: Es existiert ein $t \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: G t-robust $\Rightarrow$ G hamiltonsch. Bekannt: $t > 1$ (siehe oben), $t > 2$.

Satz: Dirac

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$. Gilt $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, dann ist G Hamiltonsch.

Beweis. Folgt aus Satz von Ore. □

Satz: Ore

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$. Gilt für jedes Paar u, v mit $u \neq v$ nicht-adjazenter Knoten $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, dann ist G hamiltonsch.

Lemma:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und $u, v \in V$, $u \neq v$, $\{u, v\} \notin E$, $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + \{u, v\}$ hamiltonsch.

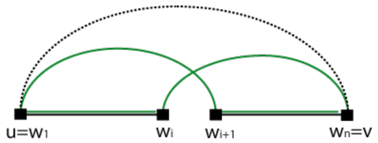
Beweis.
- „$\Rightarrow$“: Klar.
- „$\Leftarrow$“: Sei H ein Hamilton-Kreis von $G + \{u, v\}$.
  (i). $\{u, v\} \notin E(H)$: H ist auch Hamilton-Kreis in G.

(ii). $\{u,v\} \in E(H)$: Es existiert ein Hamiltonweg $u = w_1, w_2, \ldots, w_n = v$ in G. Seien $A := \{w_i; uw_{i+1} \in E(G)\}$ und $B := \{w_i; vw_i \in E(G)\}$. Zeige: $A \cap B \neq \varnothing$. Es gilt $|A| = d_G(u)$ und $|B| = d_G(v)$, somit

$$|A| + |B| = d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

laut Voraussetzung ($\{u,v\} \notin E(G)$).

$$|A \cup B| = \underbrace{|A| + |B|}_{\geq n} - |A \cap B|$$



Wegen $v \notin A \cup B$ gilt $|A \cup B| \leq n-1$, daher $|A \cap B| \geq 1$. Sei $w_i \in A \cap B$, dann beschreibt die Knotenfolge $u = w_1, \ldots, w_i, w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{i+1}, w_1$ einen Hamilton-Kreis in G.

□

Ore. Existiert in G ein Paar u,v von Knoten mit $\{u,v\} \notin E(G)$, dann gilt nach obigem Lemma: G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + \{u,v\}$ hamiltonsch. Also bilde $G' = G + \{u,v\}$. Existiert in G' ein Paar u', v' von Knoten mit $\{u',v'\} \notin E(G')$, dann gilt wieder nach Lemma: G' hamiltonsch $\Leftrightarrow G' + \{u',v'\}$ hamiltonsch. Man bilde $G'' = G' + \{u',v'\}$, usw.
Schließlich erhält man einen vollständigen Graphen mit Knotenanzahl n, dieser ist hamiltonsch. Somit auch G hamiltonsch. □

Definition:

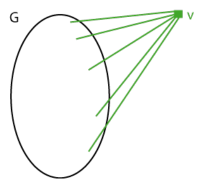
Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$. Der hamiltonsche Abschluß von G, ist der kleinste Obergraph $H(G) = (V',E')$ (d.h.$V = V', E \subseteq E'$) mit der Eigenschaft, dass $d_{H(G)}(u) + d_{H(G)}(v) < n$ für je zwei Knoten u,v ($u \neq v$) von $H(G)$ mit $\{u,v\} \notin E(H(G))$.

Bemerkung: Sind die Voraussetzungen des Satzes von Ore erfüllt, dann ist der hamiltonsche Abschluß ein vollständiger Graph.

Folgerung:

Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 2$ und es gelte $d_G(u) + d_G(v) \geq n-1$ für je zwei nicht-adjazente Knoten u,v ($u \neq v$). Dann enthält G einen Hamiltonweg.

Beweis. Übung. (Zeige: $G + v$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Ore.)

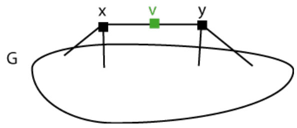


□

Folgerung:

Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und es gelte $d_G(u) + d_G(v) \geq n+1$ für alle nicht-adjazenten Knoten u,v ($u \neq v$). Dann wird jede Kante von G von einem Hamilton-Kreis durchlaufen.

Beweis. Übung. ($G+v$ erfüllt Voraussetzungen des Satzes von Ore, $G+v$ hat daher einen Hamilton-Kreis. Also wird $\{x, y\}$ auch in G von einem Hamilton-Kreis durchlaufen.)



□

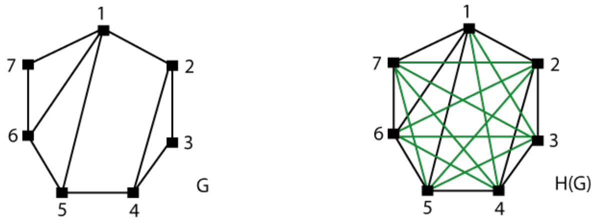
Folgerung:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und es gelte $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$ für alle nicht-adjazenten Knoten u, v $(u \neq v)$. Dann ist G ein hamilton-zusammenhängend, d.h. die Endpunkte jeder Kante sind Endpunkte eines Hamiltonweges in G.

Beweis. Folgt direkt aus vorheriger Folgerung. □

Hamiltonsche Abschluss von G:

Beispiel:



(i). $G :_1 := G$. Dann: Falls $uv \notin E(G_1)$ mit

- $d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq n \Rightarrow G_2 := G_1 + uv$
- $d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) < n \Rightarrow G_2 := G_1$

usw. (für alle Paare nichtadjazenter Knoten). Man erhält $H(G)$. Abbruchbedingung: Es lässt sich keine Kante mehr hinzufügen.

Hier: $H(G)$ hamiltonsch, also G hamiltonsch.

Bemerkungen:

(i). G hamiltonsch $\Leftrightarrow H(G)$ hamiltonsch

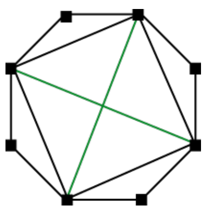
(ii). Der hamiltonsche Abschluss $H(G)$ von G ist eindeutig bestimmt.

(Annahme: $G \subseteq H_1(G) \neq H_2(G) \supseteq G$, dann existiert o.B.d.A. eine Kante $e \in E(H_2(G)) \setminus E(H_1(G))$, führe dies nach Konstruktionsprinzip zum Widerspruch.)

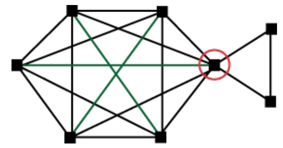
(iii). Der hamiltonsche Abschluss von G muss nicht hamiltonsch sein.

Beispiele:

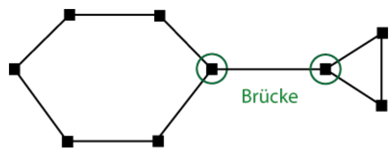
(i). G hamiltonsch, aber $H(G)$ nicht vollständig.



(ii). G nicht hamiltonsch (zerfällt in zwei Komponenten beim Entfernen von grünem Knoten, Bezeichnung: Artikulation, Zerfällungsknoten), $H(G)$ ist nicht hamiltonsch



Analog: Brücke (rot).

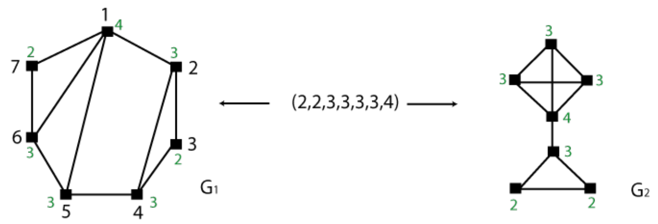


Definition:

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ seien so nummeriert, dass $d_G(v_1) \leq \ldots \leq d_G(v_n)$ gilt. Dann nennt man $(d_G(v_1), \ldots, d_G(v_n))$ die Gradsequenz von G.

Beispiel:

(i). Aus der Gradsequenz kann nicht eindeutig ein Graph konstruiert werden. G_1 und G_2 besitzen gleiche Gradsequenz. G_1 ist hamiltonsch, aber G_2 nicht.



Satz: Chvatál

Sei G ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_n)$. Gilt für alle i

$$d_i \leq i < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i$$

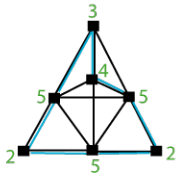
(Chtavál-Bedingung), dann hat G einen Hamilton-Kreis.

Beispiel:

(i). Für $(2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$ $(n = 4)$:

$d_1 \geq 1$: nicht erfüllt	$d_6 \geq 6$
$d_2 \geq 2$: erfüllt	$d_5 \geq 5$: nicht erfüllt
$d_3 \geq 3$: erfüllt	$d_4 \geq 4$: nicht erfüllt

d.h. Bedingung nicht erfüllt. Aber: Für $(2, 2, 3, 4, 5, 5, 5)$ ist Chvatál-Bedingung erfüllt. Ist die Gradsequenz eines Graphen.

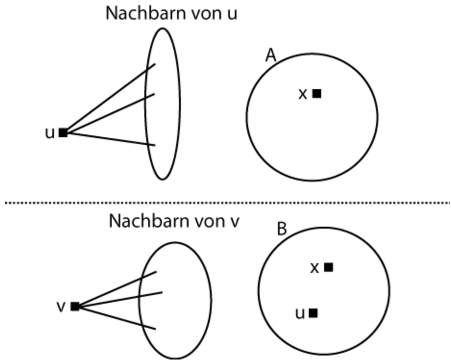


Beweis. Bilde den hamiltonschen Abschluss $H(G)$. $H(G)$ hat die Gradsequenz $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ erfüllt die Chvatál-Bedingung, denn

$$d_i \leq \delta_i \leq i < \frac{n}{2} \Rightarrow \delta_{n-i} \geq d_{n-i} \geq n - i$$

(i). 1. Fall: $H(G) = K_n$, dann sind $H(G)$ (und G) hamiltonsch.

(ii). 2. Fall: $H(G) \neq K_n$ führt zur Widerspruch zur Chvatál-Bedingung, d.h. es existiert ein i mit $d_i \leq i < \frac{n}{2}$ und $d_{n-i} \leq n - i - 1$.



Es existiert ein Paar u, v nichtadjazenter Knoten in $H(G)$, d.h. $\delta(u) + \delta(v) \leq n - 1$. Wähle u, v so, dass $\delta(u) + \delta(v)$ maximal ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\delta(u) \leq \delta(v)$. Sei $i := \delta(u)$, dann $i < \frac{n}{2}$. Jetzt Knoten zählen. Es gilt:

- $x \in A \Rightarrow u, x$ nicht adjazent. Nach Wahl von u und v:

  $$\delta(x) \leq \delta(v) \leq n - 1 - \delta(u) = n - 1 - i$$

  d.h. alle Knoten aus A haben Grad $\leq n - i - 1$. Wegen

  $$|A| = n - 1 - \delta(u) = n - 1 - i \Rightarrow |A \cup \{u\}| = n - i$$

  Somit: Es existieren mindestens $n - i$ Knoten, deren Grad $\leq n - i - 1$ ist (nämlich die Knoten aus $A \cup \{u\}$), also $d_{n-i} \leq n - i - 1$.
- Es gilt $|B| = n - 1 - \delta(v) \geq \delta(u) = i$, d.h. $|B| \geq i$. Für $x \in B$ gilt $\delta(x) \leq \delta(u) = i$. Es existieren also mindestens i Knoten (in B) mit Grad $\leq i$, daher $d_i \leq i$.

□

Folgerung:

Der Satz von Ore folgt aus dem Satz von Chvatál.

Beweis. Es gelte $d(u) + d(v) \geq n$ für je zwei nicht-adjazente Knoten u, v. Annahme: Chvatál-Bedingung verletzt, d.h. es existiert $i < \frac{n}{2}$ mit $d_i \leq i$ und $d_{n-i} \leq n - i - 1$. Dann:

$$n - i - 1 \leq d(v_i) \leq i < \frac{n}{2}$$

wegen $d(v_i) + d(v_{n-i}) \leq i + n - i - 1 = n - 1$, also $v_i v_{n-i} \in E$ (analog für $v_1, \dots, v_{i-1}$). Damit:

$$n - i - 1 \leq i \Rightarrow \frac{n-1}{2} \leq i < \frac{n}{2}$$

also $i = \frac{n-1}{2}$. Damit

$$n - i = \frac{n+1}{2} = i + 1 \qquad n - i - 1 = \frac{n-1}{2} = i$$

also $d_j \leq i$ für $j = 1, \dots, i+1$. Nach Voraussetzung folgt, dass $v_1, \dots, v_{i+1}$ paarweise adjazent sind, d.h. diese Knoten spannen einen K_{i+1} auf. Sie sind damit zu keinem anderen Knoten des Graphen adjazent. v_n hat also höchstens

$$n - 1 - (i+1) = n - 1 - i - 1 = (n - i - 1) - 1 = i - 1$$

Nachbarn. Widerspruch zur Definition der Gradsequenz!

Also ist die Chvatál-Bedingung erfüllt und G hat einen Hamilton-Kreis nach Satz von Chvatál. $\square$

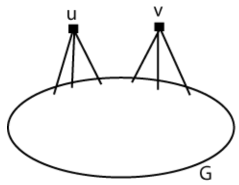
Bemerkung:

(i). Satz von Chvatál $\Rightarrow$ Satz von Ore $\Rightarrow$ Satz von Dirac

Folgerung: aus Satz von Ore

Ist G ein Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$ und Kantenanzahl $> \binom{n-1}{2} + 1$, dann hat G einen Hamilton-Kreis.

Beweis. Seien u, v zwei nicht-adjazente Knoten von G.



Zeigen: $d(u) + d(v) \geq n$.

$$\binom{n-1}{2} + 1 < |E(G)| \leq \binom{n-2}{2} + d(u) + d(v)$$

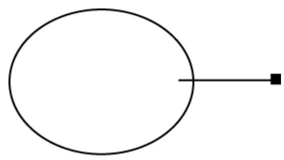
also

$$\begin{aligned} d(u) + d(v) &> \frac{1}{2}(n-1)\cdot(n-2) + 1 - \frac{1}{2}\cdot(n-2)\cdot(n-3) \\ &= \frac{1}{2}(n-2)\cdot(n-1-n+3) + 1 = n - 2 + 1 = n - 1 \end{aligned}$$

also $d(u) + d(v) \geq n$. Nach Satz von Ore ist G hamiltonsch. $\square$

Bemerkung:

(i). Für kleinere Kantenanzahlen gilt die Behauptung nicht:



Hamiltonkreise in regulären Graphen:
Bemerkungen:

(i). Ist G r-regulär mit n Knoten ($n \geq 3$), $r \geq \frac{n}{2}$, dann G hamiltonsch.

(ii). Ist G r-regulär mit n Knoten ($n \geq 3$), $r \geq \frac{n-1}{2}$, dann G hamiltonsch.

(iii). Ist G r-regulär, $n \geq 3$ Knoten und G zusammenhängend, $r \geq \frac{n-2}{2}$, dann G hamiltonsch.

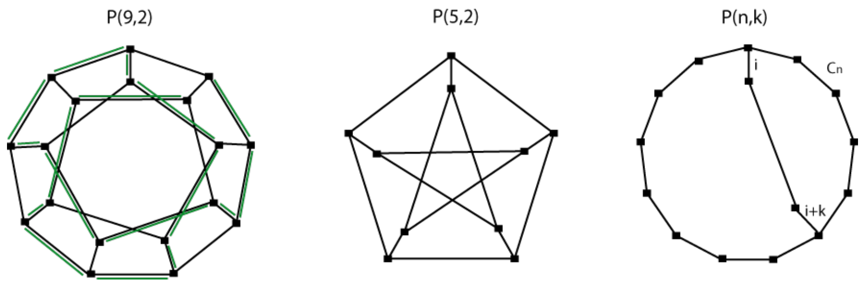
(iv). Ist G r-regulär, $n \geq 3$ Knoten und G zusammenhängend, G enthält keine Artikulation, $r \geq \frac{n}{3} \Rightarrow G$ hamiltonsch.

Verbessern? $r \geq \frac{n-1}{3} \Rightarrow G$ hamiltonsch. Geht nicht, zum Beispiel Petersen-Graph:

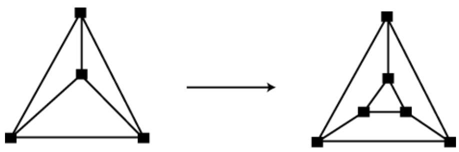
$$3 = r \qquad \frac{n-1}{3} = \frac{10-1}{3} = 3$$

Bemerkungen:

(i). Verallgemeinerter Petersen-Graph $P(n,k)$



(ii). $P(9,2)$ hat genau 3 Hamiltonkreise. Ebenso K_4. Sind das alle mit 3 Hamiltonkreise? Nein!



Sei G 3-regulär. Konstruktion: „Ersetzen eines Knotens durch ein Dreieck.". Nach Konstruktion stimmt Anzahl der Hamiltonkreise in G und G_Δ überein.

(iii). Vermutung: Ist G ein „ebener" Graph (d.h. ohne Überkreuzung von Kanten in die Zeichenebene gezeichnet) mit genau 3 Hamilton-Kreisen, dann lässt er sich durch Kontraktion von Dreiecken in den K_4 überführen.

(Zum Beispiel ist K_4 ein ebener Graph.)

Satz:

Es sei G ein 3-regulärer Graph. Ist G hamiltonsch, dann gibt es mindestens drei Hamilton-Kreise.

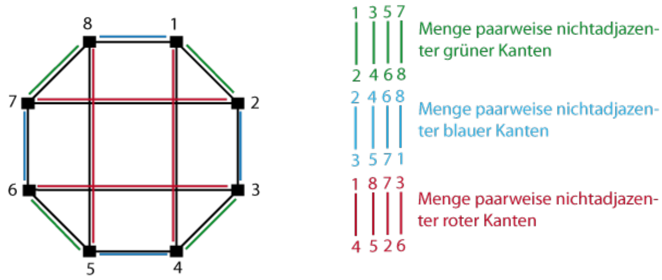
	$\dots$	$E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$	$E_{\alpha_i} \cup E_{\gamma_i}$	$E_{\beta_i} \cup E_{\gamma_i}$	$\dots$
P_1					
$\vdots$					
$P_i = \{E_{\alpha_i}, E_{\beta_i}, E_{\gamma_i}\}$	%	$E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$	$E_{\alpha_i} \cup E_{\gamma_i}$	$E_{\beta_i} \cup E_{\gamma_i}$	%
$\vdots$					
P_r					

Beweis. (i). Wird eine Kante e im Graphen G von einem Hamilton-Kreis durchlaufen, dann wird sie von einer geraden Anzahl von Hamilton-Kreisen durchlaufen. Zeigen wir später.

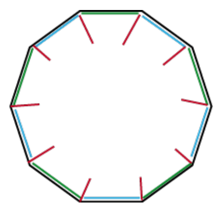
(ii). Sei H_1 ein Hamilton-Kreis in G, $e \in E(H_1)$. Mit (1) folgt: Es existiert ein Hamilton-Kreis H_2 in G mit $H_1 \neq H_2$ und $e \in E(H_2)$. Es existiert eine Kante $e' \in E(H_2) \setminus E(H_1)$. Daher existiert ein Hamilton-Kreis H_3 mit $H_3 \neq H_2$ und $e' \in E(H_3)$. Dabei gilt $H_1 \neq H_3$ wegen $e' \in E(H_3) \setminus E(H_1)$.

□

Beispiel:



Beweis von (i). Jeder Hamilton-Kreis H in G hat gerade Länge (Handschlaglemma mit Graph 3-regulär), deshalb können die Kanten von H alternierend mit α, β gefärbt werden. Die Kanten aus $E(G) \setminus E(H)$ sind paarweise nichtadjazent und werden mit γ gefärbt. Damit erhält man eine Zerlegung $P = \{E_\alpha, E_\beta, E_\gamma\}$ von $E(G)$ in drei Mengen paarweise nichtadjazenter Kanten.



Wir betrachten sämtliche Zerlegungen $(*)$ $P_1, P_2, \dots, P_r$ von $E(G)$ in drei Mengen $\{E_{\alpha_i}, E_{\beta_i}, E_{\gamma_i}\}$ $(i = 1, \dots, r)$ paarweise nichtadjazenter Kanten. Tabelle: Sämtliche Mengen in den Tabellenkopf, die sich als Vereinigung zweier Teilmengen einer Zerlegung P_i $(i = 1, \dots, r)$ darstellen lassen, jede Teilmenge nur einmal notieren. Ausfüllen der Tabelle: In der i-ten Zeile/j-ten Spalte den Spalteneingang $E_{\alpha_j} \cup E_{\beta_j}$ eintragen, falls $E_{\alpha_j} \cup E_{\beta_j}$ die Vereinigung aus zwei Teilmengen von P_i ist, anderenfalls nichts eintragen.
Sei e eine Kante von G, die von einem Hamilton-Kreis durchlaufen wird. Zähle, wie oft e im Tabelleninneren notiert ist. Methode des doppelten Abzählens:

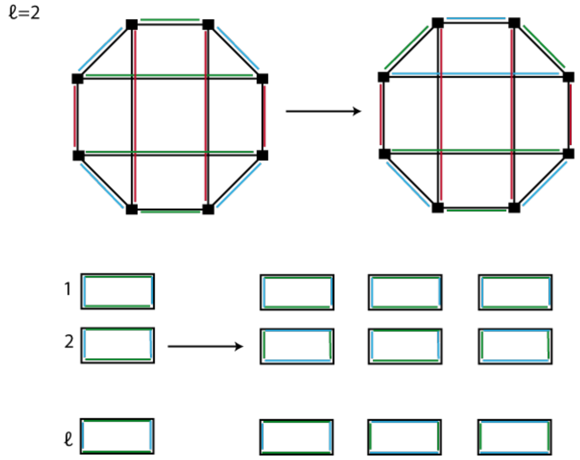
(i). zeilenweise zählen: e kommt in jeder Zeile genau zweimal vor, d.h. im Tabelleninneren genau $2r$ (gerade!) mal vor.

(ii). spaltenweise zählen:

- Es gibt Spalten, in denen e nicht vorkommt.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $e \in E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$. $E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$ ist eine Menge von ℓ alternierend mit α_i und β_i gefärbten Kreisen gerader Länge.

– $\ell = 1$: $E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$ ist die Kantenmenge eines Hamilton-Kreises. Es gibt nur eine Zerlegung $(*)$, die $E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$ als Vereinigung zweier Teilmengen hat. Also e steht genau einmal in dieser Spalte.

– $\ell > 1$:



Es gibt genau $2^{\ell-1}$ (gerade!) Zerlegungen $(*)$, für die $E_{\alpha_i} \cup E_{\beta_i}$ als Vereinigung zweier Teilmengen von P_i vorkommt.

Ergebnis:

$$2r = \textit{gerade Zahl} + \textit{Anzahl der Hamilton-Kreise, die } e \textit{ durchlaufen}$$

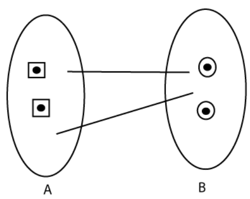
Also: Anzahl der Hamilton-Kreise, die e durchlaufen, ist eine gerade Zahl. □

Satz:

Ein Graph $G = (V, E)$ ist bipartit genau dann, wenn G keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beweis.

- „⇒“: Kontraposition zeigen.

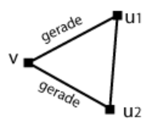


- „⇐“: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei G zusammenhängend. G enthalte keinen Kreis ungerader Länge.

  (i). G ist ein Baum: Sei v ein fester Knoten von G. u sei ein beliebiger Knoten von G. Es existiert ein eindeutig bestimmter Weg in G von v nach u (Baum). Hat dieser Weg gerade Länge, dann setze $u \in A$, sonst $u \in B$. Damit erhält man eine Bipartition von G.

  (ii). G ist kein Baum: Sei T ein Gerüst. Wie in Fall 1 erzeugt man eine Zerlegung der Knotenmenge von G (von T) in Klassen A, B.

  Annahme: $u_1, u_2 \in A$ mit $u_1 u_2 \in E(G)$. Dann existiert ein Kreis ungerader Länge, Widerspruch. Analog für B.



□

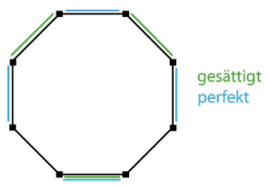
4

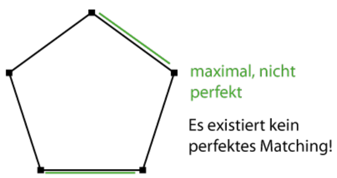
Matchings

Definition:

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Jede nichtleere Teilmenge M von E nennt man ein Matching von G, wenn je zwei verschiedene Elemente von M keinen gemeinsamen Endpunkt haben.
- Ein Matching in G heißt gesättigt, wenn kein Matching M^* mit $M \subset M^*$ in G existiert.
- Ein Matching in G heißt maximal, wenn kein Matching M^* in G existiert mit $|M^*| > |M|$.
- Ein (maximales) Matching in G heißt perfekt, wenn jeder Knoten von G mit einer Kante aus M inzidiert.

Beispiel:





Bemerkung:

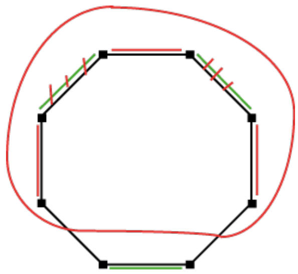
(i). M perfekt $\Rightarrow M$ maximal $\Rightarrow M$ gesättigt.

Definition:

Sei G ein Graph mit einem Matching M. Ein Weg P in G heißt M-alternierend, wenn seine Kanten abwechselnd zu M und zu $E(G) \setminus M$ gehören. Ein M-alternierender Weg heißt M-Verbesserungsweg, wenn er als Anfangs- und Endpunkt Knoten hat, die nicht mit einer Kante aus M inzidieren, und positive Länge hat.

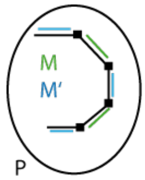
Satz: Berge

Sei G ein Graph mit einem Matching M. M ist maximal genau dann, wenn G keinen M-Verbesserungsweg enthält.

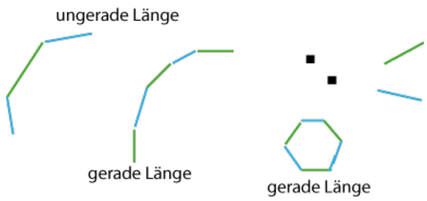


Beweis.

- „$\Rightarrow$“: Kontraposition zeigen. Sei P ein M-Verbesserungsweg in G. Dann betrachte man $M' := (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$. M' ist ein Matching. Außerdem gilt: $|M'| = |M| + 1 > |M|$, also ist M nicht maximal. Widerspruch!



- „$\Leftarrow$“: G enthalte keinen M-Verbesserungsweg. Annahme: M' sei ein Matching mit $|M'| > |M|$.



  Wir betrachten den Untergraphen $G' = (V(G), M \cup M')$ von G. Die Knotengrade in G' können nur Grad 0, Grad 1 oder Grad 2 haben. Die Komponenten von G' sind Kreise (gerader Länge) oder Wege. Es existiert mindestens eine Wegkomponente von G', die mehr Kanten aus M' als aus M enthält. Diese Wegkomponente ist dann ein M-alternierender Weg in G, dessen Anfangs- und Endpunkt nicht mit einer Kante aus M inzidieren, also ein M-Verbesserungsweg. Widerspruch!

□

Maximale Matchings in bipartiten Graphen:

Satz: Heiratssatz

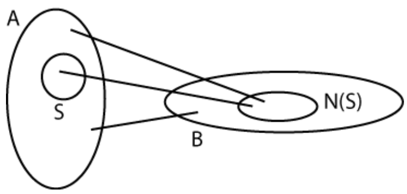
Sei $G(A, B)$ ein bipartiter Graph. Es existiert ein Matching M im Graphen G mit $|M| = A$ genau dann, wenn

$$\forall S \subseteq A : |N(S)| \geq |S|$$

wobei $N(S) = \{b \in B; \exists a \in A : ab \in E(G)\}$ (Heiratsbedingung).

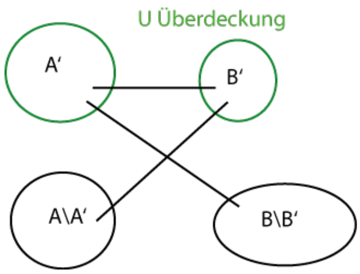
Beweis.

- „$\Rightarrow$“: Klar.



- „$\Leftarrow$“: Satz von König über Knotenüberdeckungen (siehe unten)

  Es gelte die Heiratsbedingung. Annahme: Für ein maximales Matching M gelte $|M| < |A|$. Laut Satz von König existiert eine minimale Knotenüberdeckung U mit $|U| = |M| < |A|$. Es gilt $A = A' \dot\cup B'$ mit $A' \subseteq A, B' \subseteq B$.



Da U Überdeckung ist, existiert keine Kante von G, die von $A \backslash A'$ nach $B \backslash B'$ führt. Setze $S := A \backslash A'$, dann

$$|N(S)| \leq |B'| = |U| - |A'| < |A| - |A'| = |A \backslash A'| = |S|$$

d.h. $|N(S)| < |S|$, also Heiratsbedingung verletzt. Widerspruch! Also existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$.

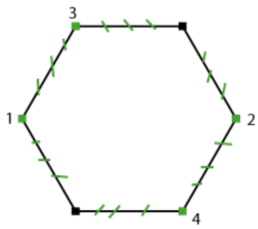
$\square$

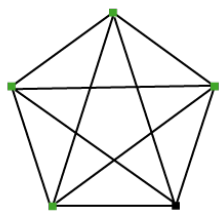
Definition:

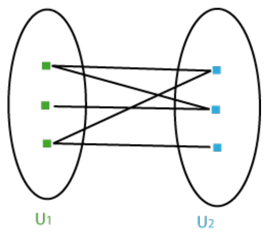
Sei G ein (beliebiger) Graph. Eine Menge $U \subseteq V(G)$ heißt (Knoten-)Überdeckung, wenn jede Kante von G mit einem Knoten aus U inzidiert.

Beispiele:

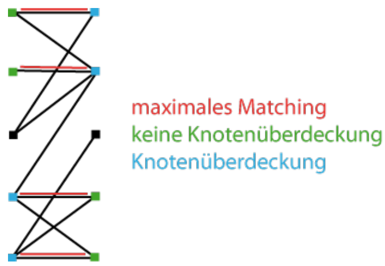
(i). Knotenüberdeckungen







(ii). Gesucht: Überdeckung mit minimaler Mächtigkeit.



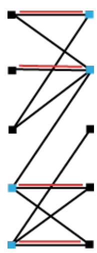
Satz: König

Sei $G(A, B)$ ein bipartiter Graph mit einem Matching M und einer Knotenüberdeckung U. Ist $|M|$ maximal und $|U|$ minimal, dann gilt $|M| = |U|$.

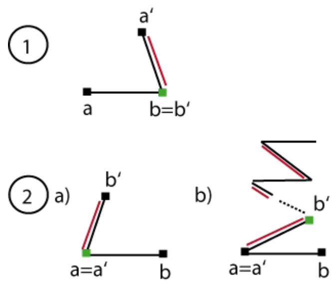
Beweis. (i). $|M_{\max}| \geq |U_{\min}|$:

Zum Beweis der Ungleichung wird eine Überdeckung U von $G(A, B)$ konstruiert, für die $|U| = |M_{\max}|$: Wähle Endpunkte von Kanten aus $M_{\max}$ aus nach folgender Regel $(*)$:

- Man wähle den Endpunkt in B aus, wenn dahin ein $M_{\max}$-alternierender Weg führt, der in A in einem Knoten beginnt, der nicht mit einer Kante aus $M_{\max}$ inzidiert.
- Wähle sonst den Endpunkt in A aus.



Die ausgewählten Knoten bilden eine Menge U. Zeige: U ist eine Überdeckung von $G(A, B)$. Es sei $ab \in E(G(A, B))$. Dann gilt $a \in U$ oder $b \in U$, denn: Entweder a oder b inzidiert mit einer Kante aus $M_{\max}$.



- 1.Fall: a inzidiert nicht mit einer Kante aus $M_{\max}$. Dann existiert eine Kante $a'b' \in M_{\max}$ mit $b = b'$. Nach $(*)$ gilt $b' = b \in U$.
- 2.Fall: a inzidiert mit einer Kante aus $M_{\max}$.
  - Fall 2a): $a = a' \in U$.
  - Fall 2b): $b' \in U$, daher existiert ein $M_{\max}$-alternierender Weg, der in A in einem Knoten beginnt, der nicht mit einer Kante aus $M_{\max}$ inzidiert und zu b' führt. b inzidiert mit einer Kante e aus $M_{\max}$, weil $M_{\max}$ maximal ist und deshalb kein $M_{\max}$-Verbesserungsweg existiert. Nach $(*)$ wird von der Kante e der Endpunkt b für U ausgewählt, also $b \in U$.

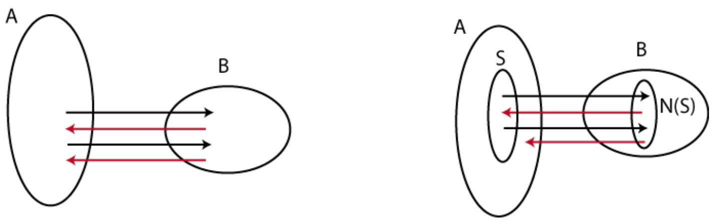
(ii). $|M_{\max}| \leq |U_{\min}|$: Klar nach Definition der Überdeckung.

□

Satz:

Es sei $G(A, B)$ ein r-regulärer $(r > 0)$ bipartiter Graph. Dann ist die Kantenmenge des Graphen in perfekte Matchings zerlegbar.

Beweis. Die Kantenanzahl von $G(A, B)$ ist $r \cdot |A| = r \cdot |B|$, also $|A| = |B|$. Es existiert ein Matching M mit $|M| = |A| (= |B|)$, weil die Heiratsbedingung erfüllt ist, denn:



- Es existieren genau $r \cdot |S|$ Kanten, die von S nach $N(S)$ führen.
- Es existieren genau $r \cdot |N(S)|$ Kanten, von $N(S)$ nach A führen, darunter sind die, die von $N(S)$ nach S führen, also
$$r \cdot |S| \leq r \cdot |N(S)|$$
für jede Teilmenge $S \subseteq A$.

Nach Heiratssatz existiert ein Matching M in $G(A, B)$ mit $|M| = |A| = |B|$. Dieses Matching ist perfekt. Löscht man M in $G(A, B)$, erhält man einen $r - 1$-regulären bipartiten Graphen. Falls $r - 1 > 0$ enthält dieser ein perfektes Matching, ... Auf diese Weise ist die Kantenmenge von $G(A, B)$ in perfekte Matchings zerlegbar. □

Satz:

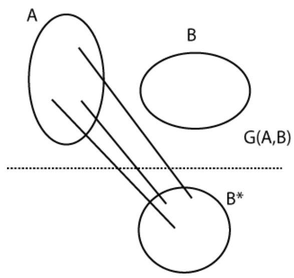
Sei $G(A,B)$ ein bipartiter Graph und M ein maximales Matching in $G(A,B)$. Dann gilt

$$|M| = |A| \underbrace{\max\{|S| - |N(S)|; S \subseteq A\}}_{=:|B^*|}$$

Bemerkung:

(i). $\max\{|S| - |N(S)|; \subseteq A\} \geq 0$, wegen $S = \varnothing$ wählbar

Beweis. (i). $|M| \geq |A| - |B^*|$:



Konstruktion eines Matchings M mit $|M| \geq |A| - |B^*|$: Aus $G(A,B)$ wird ein Graph G^* konstruiert, indem man $|B^*|$ Knoten zur Knotenmenge von $G(A,B)$ hinzufügt und jeden der hinzugefügten Knoten mit allen Knoten aus A verbindet. G^* erfüllt die Heiratsbedingung, denn: Wähle $S \subseteq A$.

$$|N^*(S)| = |N(S)| + \underbrace{|B^*|}_{\geq |S| - |N(S)|} \geq |S|$$

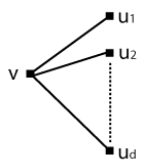
G^* enthält ein Matching M^* mit $|M^*| = |A|$. Löscht man die Kanten aus M^*, die mit Knoten aus B^* inzidieren, dann erhält man ein Matching M in $G(A,B)$ mit $|M| \geq |A| - |B^*|$.

(ii). $|M| \leq |A| - |B^*|$: Klar. Gilt $|S| > |N(S)|$, dann existieren für jedes Matching $|S| - |N(S)|$ Knoten in A, die mit keiner Kante des Matchings inzidieren.

□

Stabile Matchings:

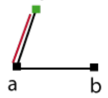
Gegeben sei für jeden Knoten v eine Ordnung auf der Menge der Nachbarn $u_1 >_v u_2 >_v \ldots >_v u_d$ mit $d = d_G(v)$.

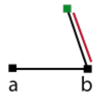


Definition:

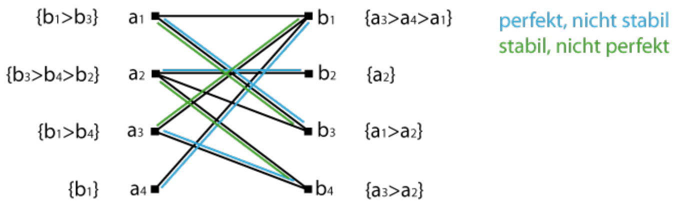
Ein Matching M in $G := G(A,B)$ heißt stabil, wenn

$$ab \in E(G(A,B)) \setminus M \Rightarrow \{\exists b' \in N_G(\{a\}) : b' >_a b \vee \exists a' \in N_G(\{b\}) : a' >_b a\}$$





Beispiel: Es existiert kein perfektes, stabiles Matching, aber ein perfektes Matching (nicht stabil wegen a_3, b_1).



Satz:

Jeder bipartiter Graph $G(A, B)$ enthält ein stabiles Matching.

Beweis. Die Kandidatenmenge K sei $K := A$. In der ersten Runde stellt jeder Knoten aus K seinen ranghöchsten Nachbarn einen Heiratsantrag. Jeder Knoten aus B vergleicht die erhaltenen Anträge und wählt den ranghöchsten Antragsteller vorläufig aus. Die restlichen Knoten werden abgewiesen und bilden die neue Kandidatenmenge.
In der zweiten Runde stellt jeder Knoten aus K seinen nächstbesten Antrag. Die Knoten aus B vergleichen die nun erhaltenen Anträge untereinander und mit der in der vorhergehenden Runde getroffenen Auswahl und wählen den ranghöchsten Antragssteller vorläufig aus. Die restlichen Knoten werden abgewiesen und bilden K. Usw.
Der Algorithmus ist beendet, wenn $K = \emptyset$ ist. Die von b_i ausgewählten ranghöchsten Knoten a_i bilden zusammen mit den b_i ein stabiles Matching. □

Satz:

Ein Graph G enthält ein perfektes Matching genau dann, wenn

$$\forall S \subseteq V(G) : q(G - S) \leq |S|$$

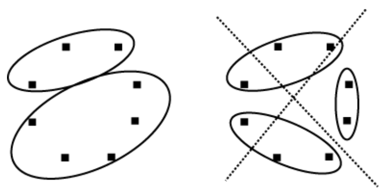
wobei $q(G - S)$ die Anzahl der Komponenten von $G - S$ bezeichnet, die ungerade Knotenanzahl haben.

Beispiel:

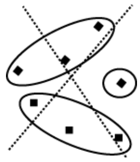
(i). G mit 8 Knoten und Knotenanzahl ≥ 15, $\delta(G) = 2, \Delta(G) \leq 5$. Behauptung: G enthält ein perfektes Matching (vgl. Übung 5).

Beweis: Angenommen, es gibt kein perfektes Matching. Nach obigem Satz existiert dann $S \subseteq V(G)$ mit $q(G - S) > |S|$.

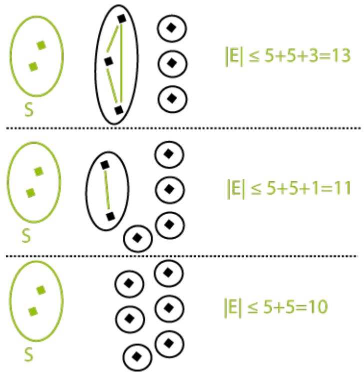
(a) $|S| = 0$: $G - S$ hat 8 Knoten, $\delta(G - S) = 2$, d.h. jede Komponente hat min. 3 Knoten. Also $q(G - S) = q(G) > 0$, d.h. es gibt Komponenten mit ungerader Knotenanzahl. G ist ein Untergraph der gesuchten Vereinigung von K_3 und K_5, also $|E(G)| \leq \binom{3}{2} + \binom{5}{2} = 13 < 15$. Widerspruch!



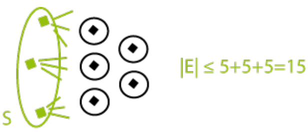
(b) $|S| = 1$: $G - S$ hat 7 Knoten, $\delta(G - S) = 1$, also hat jede Komponente min. 2 Knoten. Nach Annahme gilt $q(G - S) > 1$. Ein solcher Graph existiert nicht!



(c) $|S| = 2$: $G - S$ hat 6 Knoten, $q(G - S) > 2$. Widerspruch!



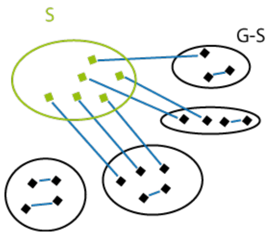
(d) $|S| = 3$: $G - S$ hat 5 Knoten, $q(G - S) > 3$.



Aus $|E| \leq 3 \cdot 5 = 15$ und $|E| \geq 15$ folgt, dass $|E| = 15$ und $G = K_{3,5}$. Widerspruch zu $\delta(G) = 2$.

(e) $|S| \geq 4$: $G - S$ hat 4 Knoten, $q(G - S) > 4$. Widerspruch!

Beweis. (i). „$\Rightarrow$“: Sei M ein perfektes Matching in G. Jede Komponente von $G - S$ mit ungerader Knotenanzahl enthält einen Knoten, der über eine Kante aus M mit einem Knoten aus S verbunden ist. Weil M ein Matching ist, gilt $q(G - S) \leq |S|$.

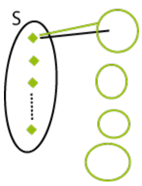


(ii). „$\Leftarrow$“: Sei $q(G - S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V(G)$. Nach Lemma *(bzw. Bemerkung nach Lemma)* existiert $S' \subseteq V(G)$ mit $q(G - S')' \leq |S'| \leq |C(G - S')| = q(G - S')$. Somit $q(G - S') = |S'|$ und aus Lemma (ii) enthält G ein perfektes Matching.

□

Lemma: (i). Jeder Graph G enthält $S \subseteq V(G)$ mit folgenden Eigenschaften

(a) Im (bipartiten) Graphen H mit der Knotenmenge $S \cup C(G - S)$ (mit $C(G - S)$ Menge der Komponenten von $G - S$) und der Kantenmenge $\{sC; s \in S, C \in C(G - S) : \exists v \in C : sv \in E(G)\}$ existiert ein Matching M mit $|M| = |S|$.



(b) Für jede $C \in C(G-S)$ und jeden Knoten v von C gilt: $C-v$ enthält ein perfektes Matching.

(ii). Ist S eine Menge mit den Eigenschaften (a),(b), dann gilt: G enthält ein perfektes Matching $\Leftrightarrow |S| = |C(G-S)|$.

Beweis. Ohne Beweis.

(Konstruktion von S: $q(G-S) \leq |S| + d$ mit $d \in \mathbb{N}_0$. Wähle d minimal. Maximiere die Anzahl der ungeraden Komponenten.) □

Bemerkung:

(i). Für jede Menge S mit den Eigenschaften aus dem Lemma gilt:

$$|S| \overset{(a)}{\leq} |C(G-S)| \overset{(b)}{=} q(G-S)$$

Satz:

Ist G ein Graph und M ein maximales Matching in G, dann gilt

$$|M| = \frac{1}{2} \cdot (|V(G)| - \max\{q(G-S) - |S|; S \subseteq V(G)\})$$

Beweis. Ohne Beweis □

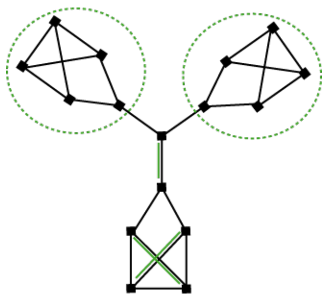
Satz: Petersen

Jeder 3-reguläre brückenlose Graph G enthält ein perfektes Matching.

Beispiel:

(i). Petersen-Graph P ist 3-regulär, brückenlos und enthält perfektes Matching.

(ii). G ist 3-regulär, es existiert kein perfektes Matching, da G Brücken enthält.



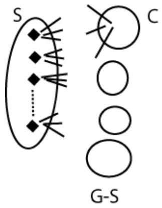
Beweis. (mit Lemma)

- Sei $S \subseteq V(G)$ mit Eigenschaften (a),(b), dann gilt $|S| \overset{(a)}{\leq} |C(G-S)| \overset{(b)}{=} q(G-S)$. Noch zeigen: $3|S| \geq 3|C(G-S)$. Aus Lemma (ii) folgt: G hat ein perfektes Matching.

- Sei m die Anzahl der Kanten von G, die Knoten aus S mit Knoten aus $G-S$ verbinden.

$$\ldots \leq m \leq 3 \cdot |S| \qquad (*)$$

Sei k die Anzahl der Kanten, die Knoten aus $C \in C(G-S)$ mit Knoten von S in G verbinden.



Kantenanzahl von C:

$$|E(C)| = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot |V(C)| - k) \in \mathbb{N}_0$$

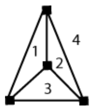
hat also ungerade Knotenanzahl und k muss ungerade sein. Es gilt $k > 1$, da G brückenlos, also $k \geq 3$. Damit folgt $m \geq 3 \cdot |C(G - S)$. Mit $(*)$ folgt $|C(G - S)| \leq |S|$.

$\square$

5

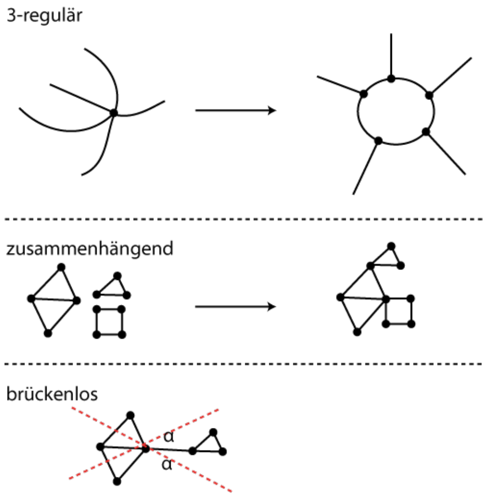
Färbungen von Graphen

- 4-Farben-Problem: Kann man die Länder einer Landkarte so mit 4 Farben färben, dass Länder mit gemeinsamer Grenzlinie stets verschieden gefärbt sind?



- Zur Geschichte:
  - 1852 F.+F. Guthrie: Erste Untersuchung/Entdeckung des Problems
  - 1878 Vorstellung des Problems bei London Math. Society durch A. Cayley
  - 1879 Beweis des 4-Farben-Satzes durch Kempe
  - 1880 Beweis des 4-Farben-Satzes durch Tait
  - 1890 Fehler im Beweis von Kempe gefunden durch Heawood, 5-Farben-Satz bewiesen
  - 1891 Fehler im Beweis von Tait gefunden durch Petersen
  - 1977 Beweis des 4-Farben-Satzes durch Appel, Haken (mit Computer)
  - Entwicklung der Minoren-Theorie
  - 1995 Beweis des 4-Farben-Satzes durch Robertson, Seymour, Sanders, Thomes (mit Computer)

Zur Lösung des 4-Farben-Problems genügt es, zusammenhängende brückenlose 3-reguläre Graphen mit ebenen Diagrammen zu betrachten.



Definition:

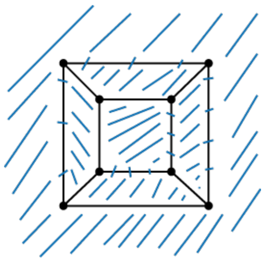
Ein Graphendiagramm heißt eben, wenn es so in die Ebene gezeichnet ist, dass es keine Überkreuzungen von Kanten gibt. Ein Graph heißt planar, wenn er ein ebenes Graphendiagramm besitzt.

Satz: Eulersche Polyederformel

Sei G ein zusammenhängender Graph mit Knotenanzahl n, Kantenanzahl m und einem ebenen Diagramm mit f Gebieten. Dann gilt

$$n + f = m + 2$$

Beweis. Idee:



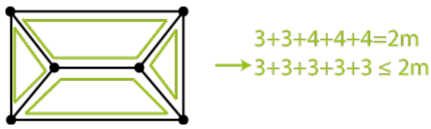
Bilde Gerüst T mit

G	Gerüst T
n Knoten	n Knoten
m Kanten	n-1 Kanten (durch Löschen von $m-(n-1)$ Kanten)
f Gebiete	1 Gebiet ($f-1$ Gebiete weniger)

Es folgt $m-(n-1)=(f-1)$ (Jedes Gebiet wird durch Löschen einer Kante „geflutet“.) □

Beispiele:

(i). K_5 ist nicht planar, denn: Angenommen K_5 planar, dann hat K_5 ein ebenes Diagramm mit $n=5$, $m=10$, $f=m+2-n=7$ Gebieten.



Es gilt:

$$3f \leq 2m = 20 \Rightarrow f = 6$$

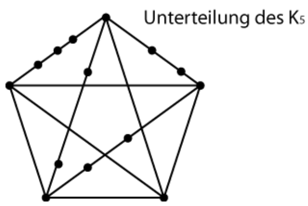
Widerspruch!

(ii). $K_{3,3}$ ist nicht planar, denn: Es gilt $n=6, m=9, f=11-6=5$. Hier gilt $4f \leq 2m = 18$, also $f \leq 4$. (Jedes Land hat min. 4 Außenkanten, sonst Widerspruch zu bipartit). Widerspruch!

(iii). P (Petersen-Graph) ist nicht planar, denn: Es gilt $n=10$, $m=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10$, $f=17-10=7$. Jedes Land hat sogar min. 5 Außenkanten. Daher $5f \leq 2m$, daher $f \leq 6$.

Satz: Kuratowski

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 und keine Unterteilung von $K_{3,3}$ als Untergraph enthält.

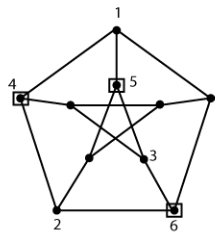


Beweis. „⇒“ Klar. „⇐“ schwieriger. □

Folgerung:

P ist nicht planar.

Beweis. P enthält Unterteilung von $K_{3,3}$ als Untergraph.



□

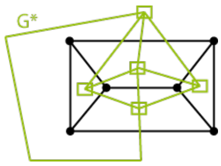
Bemerkung:

(i). Schnelle Algorithmen für Planaritätstests: Hopcraft/Tarjan

Satz:

Jedes ebene Graphendiagramm enthält ein Gebiet mit höchstens 5 Randkanten.

Beweis. Betrachte dualen Graphen. Es gilt $G^{**} = G$.



Mit nächstem Satz folgt Behauptung. □

Äquivalent:

Satz:

Jeder planare Graph enthält einen Knoten vom Grad ≤ 5.

Beweis. Annahme: $d(v) \geq 6$ für alle $V(G)$. Handschlag-Lemma:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6 \cdot n \Rightarrow m \geq 3n$$

Jedes Gebiet hat min. 3 Außenkanten, daher $3f \leq 2m$ (siehe Beispiele oben). Eulersche Polyederformel:

$$3 \cdot (m + 2 - n) \leq 2m \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Also $3n \leq 3n - 6$. Widerspruch! □

Satz: Tait

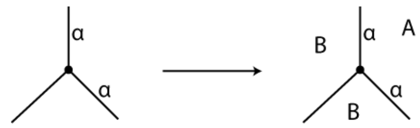
Es sei G ein zusammenhängender brückenloser 3-regulärer Graph mit einem ebenen Diagramm. Die Gebiete von G sind mit 4 Farben zulässig färbbar, genau dann wenn die Kantenmenge von G in 3 perfekte Matchings zerlegbar ist.

Beweis.

- „⇒“: Sei e eine beliebige Kante. Man färbe e mit

(i). α, falls die Nachbarländer von e mit $\{A, B\}, \{C, D\}$ gefärbt sind
(ii). β, falls die Nachbarländer von e mit $\{A, C\}, \{B, D\}$ gefärbt sind
(iii). γ, falls die Nachbarländer von e mit $\{A, D\}, \{B, C\}$ gefärbt sind

Annahme: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege folgende Situation vor:

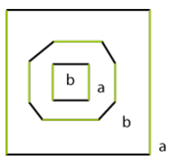


Aus der Färbungsregel folgt ein Widerspruch.

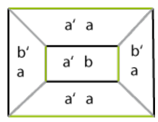
Also bilden die mit α bzw. β bzw. γ gefärbten Kanten jeweils ein Matching im Graphen. Diese Matchings sind perfekt und überdecken $E(G)$.

- „$\Leftarrow$“: Den drei perfekten Matchings werden Farben α, β, γ zugeordnet. Seien $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ die Mengen der mit α bzw. β bzw. γ gefärbten Knoten.

  Die Menge der mit α bzw. β gefärbten Kanten erzeugt eine Zerlegung der Ebene in Gebiete. Diese Gebiete kann man zulässig mit zwei Farben a, b färben.



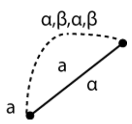
  Analog: Die Menge der mit α bzw. γ gefärbten Kanten erzeugt eine Zerlegung der Ebene in Gebiete. Diese Gebiete kann man zulässig mit zwei Farben a', b' färben.



  Jedes Gebiet im ursprünglichen Graphendiagramm ist mit (a oder b) und (a' und b') gefärbt. Färbe das Gebiet endgültig mit

$$\begin{cases} I \\ II \\ III \\ IV \end{cases} \text{falls ihm die Farben} \begin{cases} \{a, a'\} \\ \{a, b'\} \\ \{a', b\} \\ \{b, b'\} \end{cases} \text{zugeordnet worden sind}$$

  Annahme: Färbung der Gebiete ist nicht zulässig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit:



  Widerspruch!

□

Folgerung:

Es sei G ein zusammenhängender brückenloser 3-regulärer Graph mit einem ebenen Diagramm. Ist $E(G)$ in 3 perfekte Matchings zerlegbar, dann sind die Gebiete mit 4 Farben zulässig färbbar.

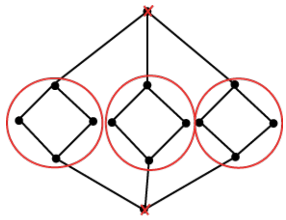
Folgerung:

Es sei G ein zusammenhängender brückenloser 3-regulärer Graph mit einem ebenen Diagramm. Enthält G einen Hamilton-Kreis, dann lassen sich die Kanten in 3 perfekte Matchings zerlegen (und somit die Gebiete mit 4 Farben zulässig färben).

Beweis. Der Hamiltonkreis hat gemäß Handschlaglemma gerade Länge. Färbe Hamiltonkreis alternierend mit α, β und restliche Kanten mit γ. Dann sind E_α, E_β, E_γ 3 perfekte Matchings, in die die Kantenmenge zerfällt. □

Beispiel:

(i). G zusammenhängender brückenloser 3-regulärer Graph mit einem ebenen Diagramm, aber besitzt keinen Hamilton-Kreis (Löschen von zwei Kanten gibt drei Komponenten):



G ist nicht „3-zusammenhängend“.

(ii). Tutte-Graph (s. Übung) ist 3-zusammenhängend und besitzt die gleichen Eigenschaften wie G.

Bemerkung:

(i). Aus 4-Farben-Satz folgt: G zusammenhängender brückenloser 3-regulärer Graph mit einem ebenen Diagramm $\Rightarrow E(G)$ ist in drei perfekte Matchings zerlegbar.

Definition:

- Eine Kantenfärbung φ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $\varphi : E \to \Phi$ von E in eine Menge Φ von Farben, sodass adjazente Kanten stets verschieden gefärbt sind.
- Der chromatische Index $\chi'(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die man zu einer Kantenfärbung von G benötigt.

$$E_\alpha = \{e \in E; \varphi(e) = \alpha\}$$

heißt Farbmatching. Eine $\alpha\beta$- Kante ist eine Komponente von $(V, E_\alpha \cup E_\beta)$ für $\alpha \neq \beta$.

Bemerkung:

(i). Es gilt $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Beispiele:

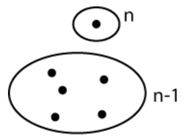
(i). G sei zusammenhängend, brückenlos, 3-regulär und planar. Dann $\chi'(G) = 3$ nach 4-Farben-Satz und Satz von Tait.

(ii). $\chi'(P) = 4$ (Übung 1). Allgemeiner für verallgemeinerten Petersen-Graph:

$$\chi'(P(n,k)) = \begin{cases} 4 & (n,k) = (5,2) \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

(iii). $\chi'(C_n) = 2 + n \mod 2$ (Kreis der Länge n)

(iv). $\chi'(K_n)$ =? Für n ungerade gilt $\chi'(K_n) \geq n - 1$. Ein Farbmatching enthält höchstens $\frac{n-1}{2}$ Kanten.,



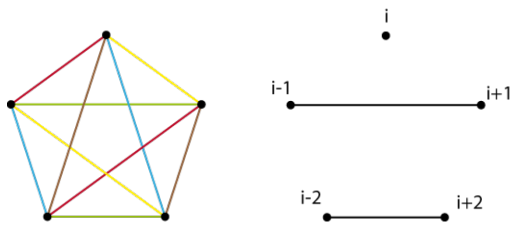
$$(n-1)\cdot\frac{n-1}{2} < \frac{1}{2}n\cdot(n-1) = |E(K_n)|$$

also $\chi(K_n) \geq n$. Konstruktion einer Färbung mit n Farben. Für n gerade gilt ebenfalls $\chi'(K_n) \geq n-1$, Konstruktion einer Färbung mit $n-1$ Farben. Daher

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n & n \mod 2 = 1 \\ n-1 & n \mod 2 = 0 \end{cases}$$

Konstruktion:

- n ungerade:



  Sei $V = \{0,\dots,n-1\} = \mathbb{Z}_n$ und $E = \bigcup_i E_{\alpha_i}$ mit

$$E_{\alpha_i} = \left\{\{i-s; i+s\}; s = 1,\dots,\frac{n-1}{2}\right\}$$

  Differenz: $(i+s)-(i-s) = 2s$, daher $2s = 2s' \mod n \Rightarrow s = s' \mod n$ da n ungerade.

- n+1 gerade: Sei $V = V(K_n)\cup\{n\}$ und $E = E(K_n)\cup\{\{n,i\}, i = 0,\dots,n-1\}$. Farbmatchings für K_{n+1}:

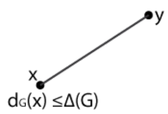
$$E'_{\alpha_i} = E_{\alpha_i}\cup\{n,i\} \qquad i = 0,\dots,n-1$$

Satz:

Ist G ein bipartiter Graph, dann gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Beweis. Induktion über $|E|$

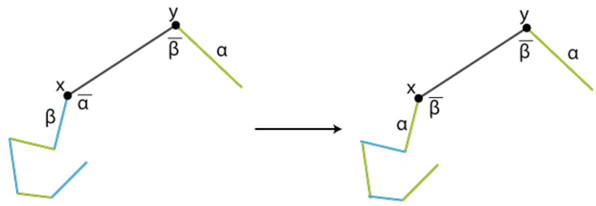
- Induktionsanfang: Klar für $|E| = 0$
- Induktionsschritt: Behauptung gelte für alle bipartiten Graphen mit $< n$ Kanten. Sei $G = (V,E)$ bipartit, $|E| = n$, $\{x,y\} = e \in E$ (fest). Der Graph $G - e$ ist mit $\Delta(G-e) \leq \Delta(G)$ Farben färbbar (laut Induktionsvoraussetzung). Diese Färbung wird auf G übertragen, Kante e bleibt ungefärbt. Sei die Farbmenge $\Phi = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{\Delta(G)}\}$, dann gibt es in Φ eine Farbe α, sodass x nicht mit einer α-Kante inzidiert (kurz: α ist Fehlfarbe an x).



  Ebenso existiert $\beta\in\Phi$, dass Fehlfarbe an y ist.

  (i). 1. Fall: Es existiert $\gamma\in\{\alpha,\beta\}$ mit γ Fehlfarbe an x und y, d.h. es gibt eine gemeinsame Fehlfarbe. Dann kann $e = \{x,y\}$ mit dieser Farbe gefärbt werden.

  (ii). 2.Fall:



Es gibt keine gemeinsame Fehlfarbe an x und y, also $\alpha \neq \beta$. Daher inzidiert mit x eine β-Kante und mit y eine α-Kante. Betrachte die $\alpha\beta$-Kempe-Kette in G, die x enthält. Diese Kempe-Kette enthält nicht den Knoten y (sonst existiert eine Komponente der Kempe-Kette, die ein Kreis ungerader Länge ist). Vertausche die Farben in der $\alpha\beta$-Kempe-Kette, die x enthält. Es entsteht eine Kantenfärbung von G, bei der β-Fehlfarbe an x und y ist. Färbe in G die Kante $\{x, y\}$ mit β.

□

Satz: Vizing

Für jeden Graph G gilt $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

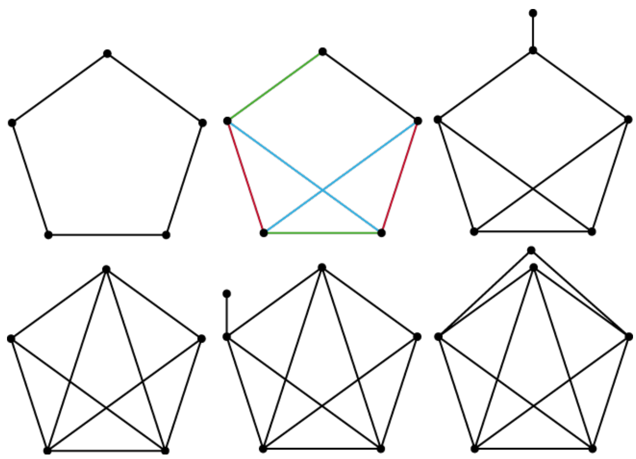
Beweis. Ohne Beweis □

Bemerkung:

(i). G ist in Klasse 1 $:\Leftrightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$, G ist in Klasse 2 $:\Leftrightarrow \chi'(G) = \Delta(G) + 1$

Beispiel:

(i). Es gibt bis auf Isomorphie genau 143 zusammenhängende Graphen mit höchstens 6 Knoten. Davon liegen 8 Graphen in Klasse 2: K_3, K_5 und



Bemerkung:

(i). Sei $P(n)$ Wahrscheinlichkeit für Zufallsgraphen mit n Knoten in Klasse 1 zu liegen. Dann $P(n) \to 1$ $(n \to \infty)$.

Folgerung: (i). Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Gilt $|E| > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{1}{2}|V| \rfloor$, dann G in Klasse 2.

Bemerkung: $|E| > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{1}{2}|V| \rfloor$ kann nur für $|V|$ ungerade erfüllt sein. (Denn: Ist $|V|$ gerade, dann $2|E| = \sum_v d_G(v) \le \Delta(G) \cdot |V|$, also $|E| \le \frac{|V|}{2} = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$.)

(ii). Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit ungerader Knotenanzahl. Gilt

$$\sum_{v\in V}(\Delta(G) - d_G(v)) \leq \Delta(G)$$

dann ist G in Klasse 2.

(iii). Sei G ein regulärer Graph mit ungerader Knotenanzahl. Dann ist G in Klasse 2,d.h. $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Beweis. (i). $\Delta(G)$ Farben zum Färben. Es ist $\lfloor \frac{1}{2}|V|\rfloor$ die maximale Anzahl von Kanten in einem Farbmatching.

(ii). Es gilt:

$$\sum_{v\in V}(\Delta(G) - d_G(v)) = |V|\cdot\Delta(G) - \sum_{v\in V} d_G(v) = |V|\cdot\Delta(G) - 2|E|$$
$$< \Delta(G)$$
$$\Rightarrow |E| > \frac{1}{2}\cdot|\Delta(G)|\cdot(|V|-1) = \Delta(G)\cdot\lfloor\frac{1}{2}|V|\rfloor$$

also G in Klasse 2 nach (i).

(iii). Klar mit (ii).

□

Definition: • Eine Knotenfärbung von $G = (V,E)$ ist eine Abbildung $\varphi : V \to \Phi$ von V in eine Farbmenge Φ mit der Eigenschaft, dass adjazente Knoten verschieden gefärbt sind.

- Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die man für eine Knotenfärbung von G benötigt.

Bemerkung:

(i). Es gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Es gilt $\chi(G) = 2$ für bipartite Graphen.

Satz: Heawood, 5-Farben-Satz

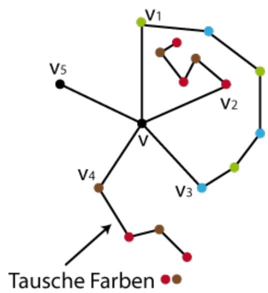
Ist G planar, dann gilt $\chi(G) \leq 5$.

Beweis. Induktion über $|V|$

- Induktionsanfang: Klar (Graphen mit ≤ 5 Knoten)
- Induktionsschritt: Sei G ein Graph mit n Knoten, Behauptung gelte für alle Graphen mit $< n$ Knoten. G enthält einen Knoten v vom Grad ≤ 5 (G planar). Nach Induktionsvoraussetzung ist $G - v$ mit 5 Farben färbbar. Übertrage diese Färbung auf G, dann ist v der einzige nichtgefärbte Knoten.

  (i). 1. Fall: Zur Färbung der Nachbarn von v wurden höchstens 4 Farben verwendet, dann färbe v mit der fünften Farbe.

  (ii). 2.Fall:



$\square$