

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Skript:

Geometrie

Verfasser

Franziska Kühn

Daten

Dr. Marco Hamann
Wintersemester 2009/10
Grundstudium

Inhaltsverzeichnis

1	Affine Geometrie & Abbildungen	3
1.1	Affine Räume	3
1.2	Affine Linearkombinationen	4
1.3	Semiaffine Abbildungen	7
1.4	Isometrie und normale Endomorphismen	11
1.5	Kongruente Abbildungen	14
2	Projektive Geometrie	20
2.1	Projektiver Raum über einem Vektorraum	20
2.2	Projektive Koordinaten	24
2.3	Kollineare Abbildungen	27
2.4	Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen	33
2.5	Dualer projektiver Raum und Korrelation	36
2.6	Gruppentheoretische Beschreibung von Geometrien	41
3	Quadriken	42
3.1	Quadratische Formen	42
3.2	Projektive Quadriken	43
3.3	Affine Quadriken	46
3.4	Quadriken im \mathbb{R}^n	49
4	Flächen und Kurven	58
4.1	Elementare Kurven	58
4.2	Krümmung und Windung in \mathbb{R}^3	63
4.3	Kanonische Entwicklung einer Raumkurve in \mathbb{R}^3	66
4.4	Ebene Kurven in \mathbb{R}^2	68
4.5	Computergestützter Kurvenentwurf (CAD)	71
4.6	Flächen und Tangentialebenen in \mathbb{R}^n	81
4.7	Metrik auf Flächenstücken	84
4.8	Weingartenabbildung und Krümmung	86

1

Affine Geometrie & Abbildungen

1.1 Affine Räume

- Sei V ein Vektorraum über K und $s \in V$. Dann ist die Translation zum Vektor s erklärt durch

$$\tau_s : V \rightarrow V : x \mapsto x + s \quad \forall x \in V$$

Für Teilmengen $M \subset V$: $s + M = \tau_s(M)$

- Setze

$$T(V) := \{\tau_s \mid s \in V\}$$

dann bildet $(T(V), \circ)$ mit der Komposition \circ eine abelsche Gruppe (Translationsgruppe). Elemente von $(T(V), \circ)$ werden Translationen (Schiebungen genannt).

$$\tau_s \circ \tau_t : x \mapsto s + (t + x) = s + t + x$$

Zu zeigen: Assoziativität, Existenz neutrales und inverses Element. Gruppenisomorphismus:

$$(V, +) \cong (T(V), \circ) \text{ mit } s \mapsto \tau_s$$

- Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum und $s \in V$, so bildet $(T(U), \circ)$ einen Normalteiler von $(T(V), \circ)$ und $\tau_s \circ T(U)$ eine Nebenklasse von $T(U)$ in $T(V)$, $s+U$.
- Bezeichnung: $s+U$ ist Nebenklasse, affiner Unterraum (später).
- Beispiel: $V, \{x\}$ für $x \in V$ sind Nebenklassen.
- Ist $t \in V$, so gilt:

$$s + U = t + U \Leftrightarrow (t - s) \in U \Leftrightarrow t \in s + U$$

Satz 1.1 Ist \mathcal{N} Nebenklasse eines Unterraums $U \subset V$, so ist U durch die Menge \mathcal{N} eindeutig festgelegt.

Beweis:

- $\mathcal{N} \neq \emptyset$ als Nebenklasse eines Unterraums, also existiert $t \in \mathcal{N}$ mit $\mathcal{N} = t + U$ und

$$\tau_{-t}(\mathcal{N}) = \{x - t \mid x \in \mathcal{N}\} = U$$

Definiton 1.1 Es sei U ein Unterraum eines Vektorraumes V über dem Körper K sowie $s \in V$. Dann heißt die Nebenklasse $s+U$ ein affiner Raum von V über K .

Bezeichnungen:

- $p \in (s + U)$: Punkte
- $r \in U$: Richtungsvektoren
- $\dim(s + U) := \dim U$

- aber: Für Punkte und Vektoren verwenden wir gleiche Symbole, ein Richtungsvektor lässt sich als Differenz zweier Punkte darstellen.

Satz 1.2 Es seien $\mathcal{A}_1 = s_1 + U_1$ und $\mathcal{A}_2 = s_2 + U_2$ zwei in V liegende affine Räume. Es gilt $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ genau dann, falls $s_1 \in \mathcal{A}_2$ und $U_1 \subset U_2$. \mathcal{A}_1 heißt in diesem Fall affiner Unterraum von \mathcal{A}_2 .

Beweis:

1. „ \Leftarrow “: Sei $s_1 \in \mathcal{A}_2$ und $U_1 \subset U_2$. Dann folgt:

$$\mathcal{A}_1 = s_1 + U_1 \subset s_1 + U_2 = s_2 + U_2 = \mathcal{A}_2$$

2. „ \Rightarrow “: Sei $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Da $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ als Nebenklasse von U_1, U_2 nicht leer sind, existieren $u, v \in \mathcal{A}_1$ und $u, v \in \mathcal{A}_2$ mit $u - v \in U_1$ bzw. U_2 . (Es existieren auch $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{A}_2$ mit $\tilde{u}, \tilde{v} \notin \mathcal{A}_1$) Nach Satz 1.1 folgt $U_1 \subset U_2$.

Bemerkungen:

- Jeder Vektorraum bestimmt den affinen Raum $\mathcal{A} = V$. Der Unterschied zwischen beiden besteht in der ausgezeichneten Stellung von $0 \in v$ als neutrales Element.
- Die Lösungsmenge eines linearen inhomogenen Gleichungssystems bildet einen affinen Raum, falls sie \neq leere Menge.

$$\mathcal{A} = \{x \in K^n \mid A \cdot x = b, A \in K^{m \times n}, b \in K^m\}$$

Die Dimension berechnet sich durch

$$\dim \mathcal{A} = n - \text{Rang} A$$

Insbesondere bilden alle $x \in K^n$

$$a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 1$$

mit $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ eine affine Hyperebene von K^n .

Definition 1.2 Zwei affine Unterräume $s_1 + U_1, s_2 + U_2$ eines affinen Raumes \mathcal{A} heißen parallel, falls $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Bemerkung:

- Besitzen zwei parallele Unterräume $s_1 + U_1, s_2 + U_2$ einen nichtleeren Durchschnitt, so ist einer im anderen enthalten, wenn etwa $U_1 \subset U_2$

$$s_1 + U_1 = a + U_1 \subset a + U_2 = s_2 + U_2$$

mit $a \in U_1 \cap U_2$. Speziell $\{a\} = \{a\} + [0]$ und \mathcal{A} sind zu allen affinen Unterräumen von \mathcal{A} parallel.

1.2 Affine Linearkombinationen

Definition 2.1 Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V sowie $\lambda_i \in K$. Eine Linearkombination

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i \text{ mit } \sum_{i \in I} \lambda_i = 1$$

heißt eine affine Linearkombination. (Wegen $\sum \lambda_i = 1$ gilt $I \neq \emptyset$.) Eigenschaft: Invarianz unter Translation τ_s :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i && \text{mit } \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \\ s &= \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot s \\ \Rightarrow \tau_s(x) &= s + x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot (s + x_i) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \tau_s(x_i) \end{aligned}$$

Die Menge aller affinen Linearkombinationen von $(x_i)_{i \in I}$ bildet die affine Hülle $\text{aff}((x_i)_{i \in I})$. Es folgt:

$$\text{aff}(\tau_s(x_i)_{i \in I}) = \tau_s(\text{aff}((x_i)_{i \in I}))$$

für alle $s \in V$.

Satz 2.1 Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Punkten eines affinen Raumes \mathcal{A} . Dann stimmt die affine Hülle $\text{aff}((x_i)_{i \in I})$ mit

$$\mathcal{A}' = x_j + \text{lin}((x_i - x_j)_{i \in I \setminus \{j\}})$$

überein. Der Indexwert j kann willkürlich gewählt werden.

Beweis:

- Schreibe die affine Linearkombination:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i &= x_j \cdot \lambda_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \cdot x_i \\ &= \left(1 - \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i\right) \cdot x_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \cdot x_i \\ &= x_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \cdot (x_i - x_j) \end{aligned}$$

Satz 2.2 Der Durchschnitt einer nichtleeren Familie $(s_i + U_i)_{i \in I}$ von affinen Unterräumen eines affinen Raumes \mathcal{A} ist entweder leer oder wieder ein affiner Unterraum von \mathcal{A} .

Beweis:

- Existiert $a \in \bigcap_{i \in I} s_i + U_i$, so gilt:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} (s_i + U_i) &= \bigcap_{i \in I} (a + U_i) = \bigcap_{i \in I} (\tau_a(U_i)) \\ &= \tau_a \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = a + \bigcap_{i \in I} U_i \end{aligned}$$

Satz 2.3 Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Punkten eines affinen Raumes \mathcal{A} . Dann ist die affine Hülle gleich dem Durchschnitt jener affinen Unterräume, welche $\{x_i | i \in I\}$ enthalten.

Beweis:

- Sei \mathcal{M} die Menge aller affinen Unterräume in \mathcal{A} , die $\{x_i | i \in I\}$ enthalten. Da $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, gilt:

$$X = \bigcap_{\mathcal{A}_j \in \mathcal{M}} \mathcal{A}_j \neq \emptyset$$

Nach Satz 2.2 ist X wieder ein affiner Unterraum. Nach Satz 2.1 ist $\text{aff}((x_i)_{i \in I})$ ein affiner Unterraum, d.h. in \mathcal{M} enthalten.

$$\text{aff}((x_i)_{i \in I}) \supseteq X$$

- Sämtliche Punkte in $\{x_i | i \in I\}$ liegen in allen affinen Unterräumen $\mathcal{A}_j \in \mathcal{M}$, daher auch in X . Da X ein affiner Unterraum ist, liegen auch alle Linearkombinationen in X .

$$\text{aff}((x_i)_{i \in I}) \subseteq X$$

Definition 2.2 Eine nichtleere Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Punkten heißt dann affin abhängig, falls sich für mindestens ein $j \in I$ der Punkt x_j als affine Linearkombination der anderen x_i ($i \in I \setminus \{j\}$) darstellen lässt:

$$x_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \cdot x_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i = 1$$

Eine nicht affin abhängige Familie von Punkten heißt affin unabhängig.

Bemerkung:

- Analog zur Theorie der Vektorräume: affines Erzeugendensystem, affine Basis

Beispiele:

- affine Gerade ($\dim \mathcal{A} = 1$)

$$A = \{x \mid x = \lambda_0 \cdot b_0 + \lambda_1 \cdot b_1; \lambda_0, \lambda_1 \in K, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$$

$\{b_0, b_1\}$ affine Basis

- affine Ebene ($\dim \mathcal{A} = 2$)

$$A = \{x \mid x = \sum_{i=0}^2 \lambda_i \cdot b_i; \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1\}$$

$\{b_0, b_1, b_2\}$ affine Basis.

- Eine Basis eines affinen Raumes der Dimension n besteht aus $(n+1)$ affin unabhängigen Punkten.

Definition 2.3 Der affine Verbindungsraum einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ affiner Unterräume aus \mathcal{A} ist die affine Hülle von $\bigcup_{i \in I} A_i$ und wird mit $\bigvee_{i \in I} A_i$ bezeichnet.

Satz 2.4 Sind $\mathcal{A}_1 = s_1 + U_1$ und $\mathcal{A}_2 = s_2 + U_2$ affine Unterräume eines affinen Raumes \mathcal{A} , so ist

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = s_1 + (U_1 + U_2)$$

für $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Für $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$:

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = s + (\text{lin}(s_2 - s_1) \oplus (U_1 + U_2))$$

Dabei:

- $W + W' = \text{lin}(W \cup W')$ ist die Summe der Untervektorräume (wieder ein Untervektorraum).
- $W \oplus W' := W + W'$ mit $W \cap W' = \{0\}$ heißt direkte Summe.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, d.h. es existiert $s \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Dann spannen alle $(x-s)$ für alle $x \in (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ den Unterraum $U = U_1 + U_2$ auf.
- Sei $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, d.h. $s_1 + a_1 \neq s_2 + a_2$ für alle $a_1 \in U_1, a_2 \in U_2$, also $(s_2 - s_1) \notin U_1 + U_2$. Es folgt:

$$\text{lin}(s_2 - s_1) \oplus (U_1 + U_2) \subseteq U$$

Außerdem

$$U = \text{lin}\{x - s_1 \mid x \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{A}_1 : & \quad (x - s_1) \in U_1 \\ \forall x \in \mathcal{A}_2 : & \quad (x - s_1) = (s_2 - s_1) + (x - s_2) \in \text{lin}(s_2 - s_1) \oplus U_2 \end{aligned}$$

Damit:

$$U \subseteq \text{lin}(s_2 - s_1) \oplus (U_1 + U_2)$$

Satz 2.5 Sind $\mathcal{A}_1 = s_1 + U_1$ und $\mathcal{A}_2 = s_2 + U_2$ endlich dimensionale affine Unterräume eines affinen Raumes \mathcal{A} , so gilt:

$$\dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 = \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) + \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$$

für $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ und

$$\dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) - 1$$

falls $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. (Affiner Dimensionssatz)

Beweis:

- Für $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$:

$$\dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$$

wegen Satz 2.2. Weiter gilt:

$$\dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \dim(U_1 + U_2)$$

wegen Satz 2.4.

- Für $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$:

$$\dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \dim(U_1 + U_2) + 1$$

nach Satz 2.4.

1.3 Semiaffine Abbildungen

Definiton 3.1 Seien $\mathcal{A} = s + U \subset V$ und $\mathcal{A}' = s' + U' \subset V'$ affine Räume, so heißt $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ eine semiaffine Abbildung, falls es einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(K)$ gibt mit

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i \right) = \sum_{i \in I} \varphi(\lambda_i) \cdot \alpha(x_i) \quad \text{mit } \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \in K, x_i \in \mathcal{A}$$

Ist $\varphi = \text{id}_K$: affine Abbildung. Ist α bijektiv: α Affinität

Lemma 3.1 Jeder Restklassenkörper \mathbb{Z}_p , der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen, der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen gestatten nur den trivialen Automorphismus.

Beweis: Übung (1)

Beispiel:

- Die Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein (nicht-trivialer) involutorischer Körperautomorphismus.

Satz 3.2 Die Menge aller semiaffinen Bijektionen eines affinen Raumes \mathcal{A} bilden bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die semi-affine Gruppe von \mathcal{A} . Sie enthält die aus allen Affinitäten gebildete Gruppe als Normalteiler.

Beweis:

- Die Komposition zweier semiaffiner Abbildungen $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ und $\alpha' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} (\alpha' \circ \alpha) \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) &= \alpha' \left(\sum_{i \in I} \varphi(\lambda_i) \cdot \alpha(x_i) \right) \\ &= \sum_{i \in I} \varphi'(\varphi(\lambda_i)) \cdot \alpha'(\alpha(x_i)) \quad (*) \end{aligned}$$

Wegen $\varphi, \varphi' \in \text{Aut}(K)$ ist $\varphi'' = \varphi' \circ \varphi \in \text{Aut}(K)$, woraus folgt:

$$\varphi' \left(\varphi \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \right) \right) = 1$$

d.h. $\alpha' \circ \alpha$ ist erneut semiaffin. Für $\varphi' = \varphi = \text{id}_K$ ist $\alpha' \circ \alpha$ sogar affin.

- $\alpha = \text{id}_{\mathcal{A}}$ ist sicherlich eine affine Abbildung. Für α bijektiv semiaffin ist auch α^{-1}

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_{\mathcal{A}}$$

semiaffin.

- Damit bilden die semiaffinen und affinen Bijektionen bzgl. der Komposition Gruppen, letztere sogar eine Untergruppe der ersten.
- Gilt in (*) zusätzlich $\varphi' = \text{id}_K$, so lässt sich hieraus die Eigenschaft des Normalteilers folgen.

Satz 3.3 Es seien $\mathcal{A} = s + U$ und $\mathcal{A}' = s' + U'$ affine Räume.

1. Sind $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ eine semiaffine Abbildung und $t \in \mathcal{A}$, so ist

$$f : U \rightarrow U' : x - t \mapsto \alpha(x) - \alpha(t)$$

mit $x \in \mathcal{A}$ eine semilineare Abbildung.

2. Sind umgekehrt eine semilineare Abbildung $f : U \rightarrow U'$ und $t \in \mathcal{A}, t' \in \mathcal{A}'$ gegeben, so ist

$$\alpha : \tau_{t'} \circ f \circ \tau_{-t} : x \mapsto f(x - t) + t'$$

eine semiaffine Abbildung mit $t' = \alpha(t)$.

Beweis:

1. Sei zunächst $t \in \mathcal{A}$ fest. Die Abbildung f ist dann wohldefiniert, da sich jeder Vektor aus U eindeutig als $x - t$ mit $x \in \mathcal{A}$ darstellen lässt. Des weiteren ist $(\alpha(x) - \alpha(t)) \in U'$. Sei $(x - t), (y - t) \in U$ und $k \in K$.

$$\begin{aligned} f((x - t) + k \cdot (y - t)) &= f((x + ky - kt) - t) \\ &= \alpha(x + ky - kt) - \alpha(t) \\ &= \alpha(x) - k \cdot \alpha(y) - k \cdot \alpha(t) - \alpha(t) \\ &= f(x - t) + k \cdot f(y - t) \end{aligned}$$

Daher ist f semilinear (1), also

$$\alpha(x) = f(x - t) - \alpha(t)$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ (2). Demnach:

$$\alpha = \tau_{\alpha(t)} \circ f \circ \tau_{-t}$$

Sei $\tilde{\tau} \in \mathcal{A}$ beliebig, so folgt:

$$\begin{aligned} \alpha(x) - \alpha(\tilde{\tau}) &= f(x - t) + \alpha(t) - (f(t - \tilde{\tau}) + \alpha(t)) \\ &= f(x - t + t - \tilde{\tau}) \\ &= f(x - \tilde{\tau}) \end{aligned}$$

2. Jede Abbildung $\tau_{-t} : \mathcal{A} \rightarrow U, f : U \rightarrow U', \tau_t : U' \rightarrow \mathcal{A}'$ ist semiaffin, daher auch ihre Komposition. Es gilt offenbar:

$$\alpha(t) = f(t - t) + t' = t'$$

Beispiele:

1. Sei $\mathcal{A} = s + U \subseteq V$ ein affiner Raum. Des weiteren $f := k \cdot \text{id}_K$ mit $k \in K \setminus \{0\}$ und $z \in \mathcal{A}$. Die Affinität α mit

$$\alpha : \tau_z \circ (k \text{id}_K) \circ \tau_{-z} : x \mapsto k \cdot (x - z) + z$$

ist Streckung mit Zentrum z und Streckfaktor k . Eigenschaften:

- Punkt z ist Fixpunkt.
- Affine Geraden durch z werden unter α auf sich abgebildet.
- Parallele Unterräume haben parallele Bilder.

Punktspiegelung an z für $k = -1$, falls $\text{char}(K) \neq 2$.

$$\alpha : x \mapsto -x + 2z$$

2. Sei $a^* \in V^*$ eine Linearform, d.h.

$$x \mapsto a^*(x) = a \cdot x$$

mit $a = (a_1 \dots a_n)$ und $x = (x_1 \dots x_n)^T$. Des weiteren $v \in V$ und $s \in \mathcal{A}$. Sei vorausgesetzt $a \cdot v \neq 0$.

$$\mathcal{H} = s + \ker(a^*)$$

ist eine affine Hyperebene. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : x &\mapsto (x - s) + (k - 1) \cdot \frac{a(x - s)}{a \cdot v} \cdot v + s \\ &= x + (k - 1) \cdot \frac{a(x - s)}{a \cdot v} \cdot v \end{aligned}$$

mit $k \in K$ eine affine Abbildung, welche \mathcal{H} punktweise fest lässt. Affine Geraden parallel zu $[v]$ sind Fixgeraden unter α , falls $k \neq 0$, da:

- Zerlege $x = c \cdot v + h$ mit $c \in K, h \in \mathcal{H}$.
- Für $x \in g: y = h + \lambda \cdot v, \lambda \in K$. Damit:

$$\begin{aligned} \alpha(y) &= h + \lambda \cdot v + (k - 1) \cdot \frac{(h + \lambda \cdot v - s)}{a \cdot v} \cdot v \\ &= h + \lambda \cdot v + (k - 1) \cdot \lambda \cdot v \\ &= h + k \cdot (\lambda \cdot v) \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ ist α bijektiv,

$$\alpha : x \mapsto \frac{1}{a \cdot v} \underbrace{\begin{pmatrix} av + (k - 1) \cdot a_1 \cdot v_1 & (k - 1) \cdot a_2 \cdot v_1 & \dots & (k - 1) \cdot a_n \cdot v_1 \\ (k - 1) \cdot a_1 \cdot v_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (k - 1) \cdot a_1 \cdot v_n & & & av + (k - 1) \cdot a_n \cdot v_n \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - (k - 1) \cdot \frac{as}{av} \cdot v$$

falls $\det A \neq 0$. (Für $n = 3$: $\det A = (av)^3 \cdot k$). Außerdem:

- Für $k \neq 0$ heißt α perspektivische Affinität mit Achse \mathcal{A} .
- Für $k=1$: $\alpha = \text{id}_{\mathcal{A}}$
- Für $k = -1$: Affinspiegelung ($\text{char}(K) \neq 2$) an \mathcal{H} in Richtung v .

- Für $k = 0$ ist α eine Parallelprojektion von \mathcal{A} auf \mathcal{H} in Richtung $[v]$, da $\alpha(y) = h$ für alle $x \in K$.

Bemerkung: (Darstellende Geometrie— Computergraphik)

- Im technischen und naturwissenschaftlichen Disziplinen werden Parallelprojektionen verwendet für
 1. Analyse und Konstruktionen an realen räumlichen Objekten.
 2. Herstellen von Abbildungen (technische Zeichnungen) der räumlichen Objekte ist wichtiges Speichermedium und Verständigungsmittel.

Eigenschaften für semiaffine Abbildungen $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$

1. Parallele Unterräume werden unter α auf parallele Unterräume abgebildet. (Übung)
2. Jeder affiner Unterraum $s + U \subseteq \mathcal{A}$ wird unter α abgebildet auf

$$\begin{aligned} \alpha(s + U) &\stackrel{3.3}{=} \tau_{\alpha(s)} \circ f_\alpha \circ \tau_{-s}(s + U) \\ &= \alpha(s) + f_\alpha(U) \end{aligned}$$

Speziell: Affine Gerade $g := s + [r]$. Ist $r \in \ker(f_\alpha)$, gilt:

$$\alpha(g) = \alpha(s)$$

Ist $r \notin \ker(f_\alpha)$, dann

$$\alpha(g) = \alpha(s) + [f_\alpha(r)]$$

Satz 3.4: (Angabe einer semiaffinen Abbildung) Seien $(p_i)_{i \in I}$ eine Basis eines affinen Raumes $\mathcal{A} = s + U \subseteq V$, $\mathcal{A}' = s' + U' \subseteq V'$ ein affiner Raum, $\varphi \in \text{Aut}(K)$ und $\beta : (p_i)_{i \in I} \mapsto \mathcal{A}'$ eine beliebige Abbildung. Dann gibt es genau eine semiaffine Abbildung (bzgl. φ) $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ mit $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ für alle $i \in I$.

Beweis:

- Sei $j \in I$ beliebig, aber fest gewählt. Definiere:

$$g : (p_i - p_j)_{i \in I \setminus \{j\}} \rightarrow U'$$

durch

$$g(p_i - p_j) = \beta(p_i) - \beta(p_j)$$

Diese bestimmt $f : U \rightarrow U'$ mit $g(p_i - p_j) = f(p_i - p_j)$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$ eindeutig. Dann ist

$$\alpha := \tau_{\beta(p_j)} \circ f \circ \tau_{-p_j}$$

eine semiaffine Abbildung.

- Für $\bar{\alpha}$ gilt nach Satz 3.3:

$$\bar{\alpha} = \tau_{\beta(p_j)} \circ \bar{f} \circ \tau_{-p_j}$$

und mit $f = \bar{f}$ (Basisbilder bestimmen f eindeutig) ist $\alpha = \bar{\alpha}$.

Beispiele:

- Jedem Paar $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ ist genau eine affine Abbildung $\alpha : K^n \rightarrow K^m : x \mapsto A \cdot x + b$ zugeordnet. α bijektiv $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

- Koordinatisierungsabbildung:

Sei $\mathcal{A} = s + U$ ein n -dimensionaler affiner Raum ($n < \infty$) und $(p_i)_{i=0, \dots, n}$ eine Basis von \mathcal{A} . Dann ist $B = (p_j - p_0)_{j=1, \dots, n}$ eine Basis in U und die Affinität

$$\begin{aligned} \kappa &= B^* \circ \tau_{-p_0} : \mathcal{A} \rightarrow K^n \\ x &\mapsto x - p_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j (p_j - p_0) \\ &\mapsto (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)^T \end{aligned}$$

heißt Koordinatisierung von \mathcal{A} bzgl. des affinen Koordinatensystems (p_0, \dots, p_n) . Dabei: p_0 Ursprung, p_j j -ter Einheitspunkt, $p_0 \vee p_j$ j -te Koordinatenachse. Dabei ist $(0, e_1, \dots, e_n)$ in K^n das zugeordnete Koordinatensystem, denn

$$\begin{aligned} (p_j - p_0) &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \cdot (p_l - p_0) \\ &= 0 \cdot (p_1 - p_0) + \dots + 0 \cdot (p_{j-1} - p_0) + 1 \cdot (p_j - p_0) + \dots \\ &\quad + 0 \cdot (p_{j+1} - p_0) + \dots + 0 \cdot (p_n - p_0) \\ B^*(p_j - p_0) &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T = e_j \end{aligned}$$

- Koordinatendarstellung semiaffiner Abbildungen:

Seien κ, κ' Koordinatisierungen von $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zu affinen Koordinatensystemen (p_0, \dots, p_n) in \mathcal{A} , (p'_0, \dots, p'_m) in \mathcal{A}' und α eine semiaffine Abbildung. Dann

$$\kappa' \circ \alpha \circ \kappa^{-1} = (B^{*'} \circ \tau_{-p'_0}) \circ \alpha \circ (B^* \circ \tau_{-p_0})^{-1} : K^n \rightarrow K^m$$

wieder semiaffin zwischen K^n und K^m und heißt Koordinatendarstellung von α bzgl. affiner Koordinatensysteme in \mathcal{A} und \mathcal{A}' .

- Teilverhältnis:

Sei \mathcal{A} ein affiner Raum mit $\dim \mathcal{A} = 1$ sowie Koordinatisierung $\mathcal{A} \rightarrow K^1$. Wähle in \mathcal{A} ein p_0 als Ursprung sowie $p_1 \neq p_0$. Dann ist $x \in \mathcal{A}$ durch eine einzige Koordinaten beschrieben, denn

$$\begin{aligned} x &= p_0 + \lambda_1 \cdot (p_1 - p_0) \\ &= (1 - \lambda_1) \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 \\ \lambda_1 &= \text{TV}(x, p_1, p_0) \end{aligned}$$

heißt Teilverhältnis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{TV}(p_0, p_1, p_0) &= 0 \\ \text{TV}(p_1, p_1, p_0) &= 1 \end{aligned}$$

1.4 Isometrie und normale Endomorphismen

- Es sei V ausgestattet mit einem Skalarprodukt

$$\sigma : V \times V \rightarrow K : (x, y) \mapsto \sigma(x, y) =: \langle x, y \rangle$$

einer radikalfreien φ -symmetrischen Sesquilinearform.

- Ist $K = \mathbb{R}$, σ positiv definite symmetrische Bilinearform $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$: V euklidisch
- Ist $K = \mathbb{C}$, σ positiv definite hermitesche Sesquilinearform $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$: V unitär
- Beispiel:

1. Natürliches (kanonisches) Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.

2. Skalarprodukt für \mathbb{C}^n :

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot y_i$$

Definition 4.1 Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Eine lineare Abbildung f heißt Isometrie, falls

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$$

für alle $x, y \in V$.

Definition 4.2 Seien V, W euklidische bzw. unitäre Vektorräume mit $\dim V, \dim W < \infty$ und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Eine Abbildung $g : W \rightarrow V$ heißt zu f adjungiert, falls

$$\langle x, g(y) \rangle_V = \langle f(x), y \rangle_W$$

für alle $x \in V, y \in W$.

Bemerkung:

- Linearform $x \mapsto \langle y, f(x) \rangle$: g ordnet jedem $y \in W$ den Gradienten in V zu.

$$c = g(y) \mapsto \langle c, x \rangle$$

Proposition 4.1

1. Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ existiert die adjungierte Abbildung g . Falls (b_1, \dots, b_n) eine Orthonormalbasis von V ist, gilt:

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \langle y, f(b_i) \rangle \cdot b_i$$

2. Falls A die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer Orthonormalbasis von V und W ist, dann ist

$$B = \bar{A}^T$$

die Matrix von g bzgl. derselben Basis.

Satz 4.2 Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist genau dann isometrisch, falls f^{-1} zu f adjungiert ist.

Definition 4.3 Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ heißt normal, falls f eine adjungierte Abbildung f^* besitzt und mit dieser kommutiert:

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt normal, falls

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Satz 4.3 (Normalformensatz für normale Endomorphismen in unitären Räumen) Sei V ein unitärer Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $f : V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ orthogonal bzgl. einer Orthonormalbasis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Drehung um $(x_1 - x_2)$ -Ebene mit α

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ unitär mit

$$A = (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

Drehung um 0 mit α .

1.5 Kongruente Abbildungen

Sei V ein euklidischer K -Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$, $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ bezeichne das erklärte Skalarprodukt.

Definition 5.1 Sei $M \subseteq V$.

$$M^\perp := \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M\}$$

M^\perp heißt Orthogonalraum zu M .

Bemerkung:

- $V^\perp = \{0\}$ (gilt für radikalfreie Sesquilinearformen mit $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$)

Satz 5.1 (Rechenregeln für \perp) Sei $M \subseteq V$ ($M \neq \emptyset$). Es gilt:

1. M^\perp ist linearer Unterraum von V .
2. $M^\perp = [M]^\perp$
3. $(M^\perp)^\perp = [M]$
4. Aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$.
5. $V = [M] \oplus M^\perp$ mit $M_1 \oplus M_2 = M_1 + M_2$ mit $M_1 \cap M_2 = \{0\}$

Beweis:

1. Wegen $0 \in M^\perp$ ist $M^\perp \neq \emptyset$. Sei $y \in M^\perp$. Dann

$$\begin{aligned} \langle y, m \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow m^*(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &\in \bigcap_{m \in M} \ker(m^*) \end{aligned}$$

mit

$$m^* : m \mapsto \langle m, \cdot \rangle$$

2. „ \Rightarrow “ Mit Eigenschaften des Skalarprodukts folgen

$$\langle y, m \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \langle y, m \rangle = \langle y, \lambda \cdot m \rangle = 0$$

für alle $\lambda \in K^*$. Außerdem:

$$\langle y, m_1 \rangle = 0 \wedge \langle y, m_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle y, m_1 \rangle + \langle y, m_2 \rangle = \langle y, m_1 + m_2 \rangle = 0$$

„ \Leftarrow “ folgt aus $m_1, m_2 \in [M]$ für alle $m_1, m_2 \in M$, also

$$\langle y, m_1 \rangle = \langle y, m_2 \rangle = 0$$

3. siehe Übung

4. siehe Übung

5. Es gilt:

$$[M] \cap M^\perp = [M] \cap [M]^\perp = \{0\}$$

denn angenommen $m \in [M] \cap [M]^\perp$, dann

$$\langle m, m \rangle = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Also $[M] + M^\perp$ orthogonale (direkte) Summe. Wähle in $[M]$ eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_k)$. Dann spannen $\langle b_j, \cdot \rangle = b_j^*$ einen Unterraum in V^* auf mit

$$b_j^*(b_i) = \delta_{ij}$$

Es gilt: $\bigcap_{j=1, \dots, k} \ker b_j^* = M^\perp$ (siehe 1.) ist Unterraum mit

$$\dim \bigcap_{j=1, \dots, k} \ker b_j^* = n - k$$

Nach Dimensionssatz für lineare Untervektorräume:

$$\dim([M] \oplus M^\perp) = k + (n - k) = n$$

Bemerkung:

- Satz 5.1.5 sichert, dass sich jeder Vektor $x \in V$ eindeutig als $x = u + v$ mit $u \in [M], v \in M^\perp$ darstellen lässt.

Definition 5.2 Sei \mathcal{A} ein affiner Raum als Nebenklasse zum linearen Unterraum $U \subseteq V$. U sei euklidisch vorausgesetzt mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Skalarprodukt. $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt metrisch affiner Raum (euklidischer Raum).

Definition 5.3 Es seien $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ metrische affine Räume über demselben Körper. Dann heißt $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ eine Kongruenzabbildung, falls die lineare Abbildung $f : U \rightarrow U'$ zwischen den zugehörigen Untervektorräumen eine Isometrie ist.

Fixpunktmenge einer Kongruenzabbildung

- Sei $\alpha : V \rightarrow V$ eine Kongruenzabbildung mit

$$\alpha(x) = f(x) + t$$

mit $f(x)$ als lineare Abbildung, $t = \alpha(0)$. Sei desweiteren

$$U := \ker(f - \text{id}_V)$$

Fixraum von f . Nach Satz 5.1 lässt sich t aufspalten als $t = t_1 + t_2$ mit $t_1 \in U, t_2 \in U^\perp$.
Damit:

$$\alpha(x) = f(x - \hat{t}_2) + \hat{t}_2 + t_1$$

mit

$$-f(\hat{t}_2) + \hat{t}_2 = t_2 \Leftrightarrow (\text{id}_V - f)\hat{t}_2 = t_2$$

Das lineare Gleichungssystem ist lösbar, da

$$t_2 \in U^\perp = (\ker(f - \text{id}_V))^\perp = \text{Im}(f - \text{id}_V)$$

- Bestimmung der Fixpunktmenge von α : Sei $x - \hat{t}_2 = u + v$ mit $u \in U, v \in U^\perp$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= f(u + v) + \hat{t}_2 + t_1 \\ &= u + f(v) + \hat{t}_2 + t_1 \\ \alpha(x) - x &= \underbrace{f(v) - v}_{\in U^\perp} + \underbrace{t_1}_{\in U} \\ \Rightarrow \alpha(x) = x &\Leftrightarrow t_1 = 0 \wedge v = 0\end{aligned}$$

Also ist die Fixpunktmenge von α entweder

1. affiner Unterraum $\hat{t}_2 + U$ für $t_1 = 0$
2. \emptyset , falls $t_1 \neq 0$.

Eigenschaften

1. Der Abstand d zwischen affinen Räumen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ ist

$$d := \min\{\|a_1 - a_2\|; a_1 \in \mathcal{A}_1, a_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

Seien $\mathcal{A}_1 = s_1 + U_1, \mathcal{A}_2 = s_2 + U_2$, dann

$$\begin{aligned}d &= \min\{\|s_1 + u_1 - s_2 - u_2\|; u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ &= \|s_1 - s_2 - \Pi_W(s_1 - s_2)\|\end{aligned}$$

mit $W = U_1 + U_2$ und Π_W als Orthogonalprojektion von \mathcal{A} auf W .

2. Der Winkel zwischen zwei Geraden $g_1 = s_1 + [r_1], g_2 = s_2 + [r_2]$ in \mathcal{A} ist

$$\angle(g_1, g_2) = \arccos\left(\frac{|\langle r_1, r_2 \rangle|}{\|r_1\| \cdot \|r_2\|}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Der Winkel zwischen zwei Hyperebenen $\mathcal{H}_i = \{x \in V : \langle u_i, x \rangle = b_i\}$ ist durch den Winkel der Geraden $g_i = \mathcal{H}_i^\perp$ mit $g_i = [u_i]$ bestimmt.

Geometrische Analyse der Isometrien/Kongruenzabbildungen

- Sei $\alpha : V \rightarrow V$ eine Kongruenzabbildung und

$$\alpha(x) = f(x) + t$$

mit $f : V \rightarrow V$ orthogonale Abbildung und $t = \alpha(0)$.

- Zerlege V in direkte Summe von paarweise orthogonalen Unterräumen

$$V = U + W + D_1 + \dots + D_k$$

mit

$$\dim V = n_1 + N - 2 + 2k = n$$

mit $n_1 = \dim U, n_2 = \dim W, \dim D_j = 2$ für $j = 1, \dots, k$. Mit Normalformensatz sei

$$\begin{aligned}f|_U &= \text{id}_U \\ f|_W &= -\text{id}_W \\ f|_{D_j} &= \text{Drehung um orthogonales Komplement von } D_j\end{aligned}$$

Spalte \hat{t}_2 in die Komponenten auf

$$t_2 = w + s_1 + \dots + s_k \quad w \in W, s_j \in D_j$$

Dann lässt sich zeigen: α darstellbar als Komposition von Drehungen (n-2)dimensionalen affinen Unterräumen $D_j^\perp + s_j$, der Spiegelungen (n - n₂)-dimensionale Unterräumen $W^\perp + w$ und der Translation t_1 .

- Bemerkung: Spiegelung an (affinen) Unterräumen, siehe Übung

Satz 5.2 Eine Kongruenzabbildung $\alpha : V \rightarrow V$ mit $\dim V = n$ lässt sich darstellen als Komposition von Spiegelungen an $2k + n_2 = n - n_1$ (affinen) Hyperebenen, falls $t_1 = 0$. Sie lässt sich als Spiegelungsprodukt an $(2k + n_2 + 2) = n + 2 - n_1$ (affinen) Hyperebenen darstellen, falls $t_1 \neq 0$.

Beweis:

1. Es gilt: (Blockschreibweise)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbb{1}$ als Einheitsmatrix. Also n_2 Spiegelungen an Hyperebenen \mathcal{H}_i mit Stellungsvektor

$$h_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, \underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{n_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2k})$$

2. Vereinfachte Schreibweise: $\alpha = \alpha_j$. Dann:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit σ_a (Spiegelung an a):

$$\begin{aligned} \sigma_a(e_1) &= (\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ \sigma_a(e_2) &= (\cos(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha) \quad \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha)) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= (\sin 2\alpha \quad -\cos 2\alpha) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sigma_a &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kann jede Drehung um (n-2)-dimensionalen affinen Unterraum $D_j^\perp + s_j$ durch das Spiegelungsprodukt an Hyperebenen $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = D_j^\perp + s_j$ ersetzt werden kann.

3. Ist $t_1 \neq 0$, so lässt sich die Translation τ_t als Produkt zweier Hyperebenenspiegelungen darstellen mit Stellungsvektor t_1 und Abstand $\frac{\|t_1\|}{2}$.

Isometrie (\mathbb{R}^2)	Kongruenzabbildung	Fixpunkte	Fixgeraden
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Identität	Identität Translation $\tau_t : x \mapsto x + t$	alle keine	alle alle affinen Geraden $\parallel [t]$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an Gerade	Spiegelung an Gerade g Gleitspiegelung an g	alle $p \in g$ keine	alle Geraden $\perp g$ und g g
$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ Drehung um $\alpha \neq 0, \pi$	Drehung um p um $\alpha \neq 0, \pi$	p	keine
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Drehung um π	Spiegelung an p	p	alle Geraden durch p

Isometrie (\mathbb{R}^3)	Kongruenzabbildung	Fixpunkte	Fixgeraden
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Identität	Identität Translation mit t	alle keine	alle alle affinen Geraden $\parallel [t]$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an Ebene	Spiegelung an affiner Ebene \mathcal{H} Gleitspiegelung an \mathcal{H} entlang t_1	alle $p \in \mathcal{H}$ keine	alle Geraden $\perp \mathcal{H}$, Geraden in \mathcal{H} alle Geraden $\parallel [t_1]$ in \mathcal{H}
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an Gerade	Spiegelung an Gerade g Schraubung mit Schraubachse g um π	alle $p \in g$ keine	alle Geraden, die $g \perp$ schneiden und g
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung	Punktspiegelung an p	p	alle Geraden durch p
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ Drehung um $\alpha \neq 0, \pi$	Drehung um Gerade g mit $\alpha \neq 0, \pi$ Schraubung um Achse g mit α , Translation t_1	alle $p \in g$ keine	g g
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ Drehspiegelung mit $\alpha \neq 0, \pi$	Drehspiegelung um g an ε mit Drehwinkel α	$p = g \cap \varepsilon$	g

2

Projektive Geometrie

2.1 Projektiver Raum über einem Vektorraum

Motivation:

1. In einem affinen Raum der Dimension n sind nichtwindschiefe Unterräume entweder parallel oder schneidend. Die Ausnahmestellung der Parallelität soll im Folgenden aufgehoben sein.
2. Die affinen Abbildungen werden durch homogene und inhomogene lineare Gleichungen beschrieben, die projektiven Abbildungen durch homogene lineare Gleichungen.
3. Der affine Raum lässt sich in einen projektiven Raum „einbauen“.

Definition 1.1 Gegeben seien eine Punktmenge $P^n(V^{n+1}, K)$ und $X, Y, Z \in P^n$ Punkte, V^{n+1} ein Vektorraum (mit $-1 \leq n$, $\dim V^{n+1} = n + 1$) über K (kommutativ) mit Vektoren x, y, z . Eine durch eine bijektive Abbildung

$$P^n \rightarrow \{[x] : x \in V^{n+1} \setminus \{0\}\} : X \mapsto [x]$$

in P^n induzierte Struktur heißt n -dimensionaler projektiver Raum über V^{n+1} .

Bezeichnungen:

- $n = \dim P^n$ Dimension des projektiven Raums.
- $n = 0$: projektiver Punkt
- $n = 1$: projektive Gerade
- $n = 2$: projektive Ebene

Bemerkung:

- Als zu $P^n(V^{n+1}, K)$ gehörende Vektorräume kommen alle zu V^{n+1} isomorphen Vektorräume in Frage. Es kann daher o.B.d.A. von K^{n+1} als zugehöriger (arithmetischer) Vektorraum verwendet werden.

Beispiele:

1. $P^n(V^{n+1}, K)$ heißt für $K = \mathbb{R}$ ein reeller projektiver Raum und für $K = \mathbb{C}$ ein komplexer projektiver Raum.
2. Komplexe Erweiterung $\hat{P}^n(\hat{V}^{n+1}, \mathbb{C})$ zu $P^n(V^{n+1}, \mathbb{R})$

- Paarbildung in V^{n+1}

$$(x, y) = x + i \cdot y =: z \quad i^2 = -1$$

für $x, y \in V^{n+1}$ mit

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x', y + y') \\ \lambda \cdot z &= (a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) \end{aligned}$$

- Es gilt:

$$\hat{P}^n(\hat{V}^{n+1}, \mathbb{C}) = \{[z] : z \in \hat{V}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

heißt komplexe Erweiterung zu $P^n(V^{n+1}, \mathbb{R})$. Dieser ist mit

$$P^n(V^{n+1}, \mathbb{R}) = \{[z] : [z] = [\bar{z}]\}$$

als reeller Ausschnitt (v. Staudtsche Kette) eingebettet.

Bemerkung:

- Betrachte $P^n(\mathbb{R}^{n+1})$. Wähle Repräsentanten aus $[x]$,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

Dann mit $S^n_{\pm \text{id}}$ eindeutiger Repräsentant aus $[x]$.

Definition 1.2 Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $U^{k+1} \subseteq V^{n+1}$ mit der durch U^{k+1} induzierten Struktur heißt k-dimensionaler projektiver Unterraum von $P^n(V^{n+1})$,

$$Q^k(U^{k+1}, K) = \{[x] : x \in U^{k+1} \setminus \{0\}\}$$

und $-1 \leq k \leq n$. (\emptyset ist für

$$\{[x] : [x] \subset [0], \dim[x] = 1\} = \emptyset$$

ebenfalls projektiver Raum mit $\dim \emptyset = -1$.) Bemerkung:

- Jeder k-dimensionale projektive Unterraum ist selbst ein k-dimensionaler projektiver Raum.

Bezeichnungen:

- Q^0 : projektiver Punkt
- Q^1 : projektive Gerade
- Q^{n-2} : projektive Hypergerade
- Q^{n-1} : projektive Hyperebene

Satz 1.1 Sei $I \neq \emptyset$, $k_i \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leq k_i \leq n$. Dann gilt:

$$Q_k = \bigcap_{i \in I} Q_i^{k_i} = \{X : \forall i \in I : X \in Q_i^{k_i}\}$$

ist wieder ein projektiver Unterraum der Dimension k ($-1 \leq k \leq n$).

Beweis:

- Mit den zu $Q_i^{k_i}$ zugehörigen Untervektorräumen $U_i^{k_i+1}$ folgt:

$$X \in Q^k \Leftrightarrow [x] \in \bigcap_{i \in I} U_i^{k_i+1} =: U^{k+1}$$

U^{k+1} ist wieder Untervektorraum.

1. Für $k = -1$: $U^{k+1} = [0]$, also $Q^k = \emptyset$.
2. $k \geq 0$: Die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume in U^{k+1} stimmt mit Q^k überein. (Definition 1.2)

Satz 1.2 Sei $I \neq \emptyset$ endlich, $k_i \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leq k_i \leq n$. Dann gilt:

$$Q_k = \sum_{i \in I} Q_i^{k_i} = \{X : x = \sum_{i \in I} q_i, q_i \in U_i^{k_i+1}\}$$

ist wieder ein k-dimensionaler projektiver Unterraum von $P^n(V^{n+1})$, der Verbindungsraum aller $Q_i^{k_i}$. Er ist der kleinste projektive Unterraum, der alle $Q_i^{k_i}$ enthält.

Beweis:

- Theorie der Vektorräume: Die Menge aller

$$x = \sum_{i \in I} q_i \quad q_i \in U_i^{k_i+1}$$

ist selbst wieder ein Untervektorraum, nämlich $\sum_{i \in I} U_i^{k_i+1} =: U^{k+1}$. Nach Definition 1.2 ist die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume aus U^{k+1} wieder ein projektiver Raum.

- Sei R^m projektiver Unterraum, der alle $Q_i^{k_i}$ enthält, d.h. für den zugehörigen Untervektorraum W^{m+1} gilt:

$$\begin{aligned} W^{m+1} &\supseteq U_i^{k_i+1} \quad \forall i \in I \\ \Rightarrow \sum_{i \in I} q_i &\in W^{m+1} \\ \sum_{i \in I} U_i^{k_i} &\subseteq W^{m+1} \\ \sum_{i \in I} Q_i^{k_i} &\subseteq R^m \\ &\Rightarrow k \leq m \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $P^2(\mathbb{Z}_2^3)$ mit

$$\mathbb{Z}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dann:

$$P^2(\mathbb{Z}_2^3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Minimalebene mit 7 projektiven Punkten, Geraden

2. Verbindungsraum $G^1 = X + Y$ zweier verschiedener Punkte $X, Y \in P^n$:

$$\begin{aligned} G^1 &:= \{Z : z = \lambda \cdot x + \mu \cdot y; \lambda, \mu \in K, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\} \\ &= \{[z] : [z] \subseteq ([x] + [y])\} \end{aligned}$$

Folgerung Der Verbindungsraum

$$Q^k := \sum_{i \in I} Q_i^{k_i}$$

lässt sich als Vereinigung aller Verbindungsgeraden $X + Y$ mit $X \in Q_i^{k_i}, Y \in Q_j^{k_j}$ ($j \in I$) erzeugen.

Definition 1.3 Im P^n heißen $(k+1)$ Punkte x_0, \dots, x_k (Hyperebenen H_0, \dots, H_k) projektiv unabhängig, wenn ihr Verbindungsraum (Schnitttraum) k -dimensional ist, anderenfalls projektiv abhängig.

Satz 1.4 In P^n sind $(k+1)$ projektive Punkte genau dann projektiv unabhängig, falls die zugehörigen Vektoren in $X_i \mapsto [x_i]$ linear unabhängig sind. (Anderenfalls projektiv abhängig)

Beweis:

- $\{X_0, \dots, X_k\}$ projektiv unabhängig $\Leftrightarrow \dim([x_0] + \dots + [x_k]) = k + 1 \Leftrightarrow x_0, \dots, x_k$ linear unabhängig.

Bemerkung:

- In V^{n+1} spannen $(k+1)$ linear unabhängige Vektoren einen $(k+1)$ -dimensionalen Unterraum auf. Hierdurch ist ein k -dimensionaler projektiver Unterraum bestimmt,

$$Q^k = X^0 \vee \dots \vee X^k = [X_0, \dots, X^k]$$

Speziell spannen $(n+1)$ projektiv unabhängige Punkte P^n auf.

Satz 1.5 In P^n ist jeder k -dimensional projektive Unterraum der Schnitt von $(n-k)$ projektiv unabhängigen Hyperebenen.

Beweis:

- Sei $Q^k := X_0 \vee \dots \vee X_k$ mit projektiv unabhängigen X_0, \dots, X_k . Ergänze diese zu

$$X_0, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$$

(projektiv unabhängig in P^n). Dann bestimmen

$$\begin{array}{l} X_0 \vee \dots \vee X_k \vee X_{k+1} \vee \dots \vee X_{n-1} \\ X_0 \vee \dots \vee X_k \vee X_{k+1} \vee \dots \vee X_{n-2} \vee X_n \\ \vdots \\ X_0 \vee \dots \vee X_k \vee X_{k+2} \vee \dots \vee X_n \end{array}$$

$(n-k)$ Hyperebenen, die nach Definition 1.3 projektiv unabhängig sind.

Definition 1.4 In P^n heißen $Q^k \subset P^n$, $R^l \subset P^n$ windschief zueinander, falls $Q^k \cap R^l = \emptyset$. Sie heißen komplementär, falls $Q^k \cap R^l = \emptyset$ und $Q^k \vee R^l = P^n$.

Satz 1.6 Seien P^n projektiver Raum und Q^k bzw. R^l projektive Unterräume mit $\dim Q^k = k$, $\dim R^l = l$. Es gilt:

$$k + l = \dim(Q^k \cap R^l) + \dim(Q^k \vee R^l)$$

Beweis:

- Seien U^{k+1} bzw. W^{l+1} die zu Q^k bzw. R^l zugehörigen Unterräume in V^{n+1} .

$$\dim U^{k+1} + \dim W^{l+1} = \dim(U^{k+1} \cap W^{l+1}) + \dim(U^{k+1} + W^{l+1})$$

Wird jede Dimension um eins verringert, folgt die Behauptung.

Beispiele:

1. In P^2 besitzen zwei verschiedene projektive Geraden genau einen gemeinsamen projektiven Punkt, da mit Satz 1.6 gilt:

$$\begin{aligned} \dim Q^1 + \dim R^1 &= \dim(Q^1 \cap R^1) + \dim(Q^1 \vee R^1) \\ 1 + 1 &= \dim(Q^1 \cap R^1) + 2 \\ \Rightarrow \dim(Q^1 \cap R^1) &= 0 \end{aligned}$$

2. In P^3 besitzen zwei verschiedene projektive Ebenen genau eine gemeinsame Gerade.

Bemerkung:

- Aussage von Beispiel 1 wird in einem axiomatischen Zugang zum projektiven Raum als Axiom verwendet.

2.2 Projektive Koordinaten

Sei $P^n(V^{n+1}, K)$ gegeben. Wähle in V^{n+1} eine Basis $B = \{b_0, \dots, b_n\}$, dann ist

$$B^* : V^{n+1} \rightarrow K^{n+1} : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot b_i \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_n)^T = \underline{x}$$

die Koordinatisierungsabbildung.

Satz 2.1 Sei $P^n(V^{n+1}, K)$ gegeben. Bezüglich einer Basis $B = \{b_0, \dots, b_n\}$ beschreibt jeder Vektor $\underline{x} \neq 0$ in K^{n+1} eindeutig ein $X \in P^n$. Umgekehrt ist $X \in P^n$ durch $[\underline{x}] \setminus \{0\}$ beschrieben bis auf einen Faktor, d.h. $\underline{x}, \underline{x}' \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ beschreiben $X \in P^n$, falls $\underline{x}' = \lambda \cdot \underline{x}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Beweis:

- Durch B^* ist jedem $X \in P^n$ ein Untervektorraum $U^1 \subset K^{n+1}$ zugeordnet, $\underline{x} \in U^1 \setminus \{0\}$ bestimmt U^1 eindeutig. Weiter sind alle $\underline{x} \in U^1 \setminus \{0\}$ durch $\underline{x}' = \lambda \cdot \underline{x}$ darstellbar.

Definition 2.1 In $P^n(V^{n+1}, K)$ heißen $(n+2)$ Punkte in allgemeiner Lage, falls je $(n+1)$ Punkte projektiv unabhängig sind.

Satz 2.2 In $P^n(V^{n+1}, K)$ seien $(n+2)$ Punkte $\{P_0, \dots, P_n, P\}$ in allgemeiner Lage; die Repräsentanten $p_i \in V^{n+1}$ in $P_i \mapsto [p_i]$ mit $i = 0(1)n$ so gewählt, dass $p = \sum_{i=0}^n p_i$. Dann gilt: Jedes $X \in P^n$ ist bzgl. $\{P_0, \dots, P_n, P\}$ bis auf $\lambda \in K \setminus \{0\}$ eindeutig bestimmt, d.h. $X \in P^n \mapsto [\underline{x}] \in K^{n+1}$.

Beweis:

- $\{P_0, \dots, P_n, P\}$ in allgemeiner Lage, dann $\{P_0, \dots, P_n\}$ Basis in V^{n+1} . Damit p darstellbar (eindeutig) bzgl. $\{p_0, \dots, p_n\}$, d.h.

$$p = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot p_i$$

mit $\alpha_i \neq 0$ für $i = 0(1)n$. Dann kann wegen $P_i \mapsto [p_i]$ nun $\alpha_i \cdot p_i = p'_i$ gesetzt werden (Repräsentantenwechsel). Dann

$$p = \sum_{i=0}^n p'_i$$

- Sei $\{p''_0, \dots, p''_n\}$ eine weitere Basis von V^{n+1} mit $p''_i = \lambda_i \cdot p'_i$ und

$$\sum_{i=0}^n p''_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^n p'_i = \lambda \cdot p$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot p'_i &= \sum_{i=0}^n \lambda \cdot p'_i \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Wegen linearer Unabhängigkeit der p_i folgen $\lambda_i = \lambda$ für alle i und somit $p''_i = \lambda \cdot p'_i$.

Bemerkung:

- $\{p_0, \dots, p_n\}$ Basis von $V^{n+1} \Leftrightarrow \{P_0, \dots, P_n, P\}$ mit $P = P(\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot p_i)$ in allgemeiner Lage

Bezeichnungen:

- $\{P_0, \dots, P_n, P\}$: projektives Koordinatensystem
- P : Einheitspunkt
- $\underline{x} = (\lambda_0 : \dots : \lambda_n)$: projektive (homogene) Koordinaten zu $X \in P^n$
- P_i : Grundpunkte

Beispiel:

1. Koordinatisieren einer projektiven Geraden P^1

Projektives Koordinatensystem:

$$P_0 \mapsto [p_0] \quad P_1 \mapsto [p_1] \quad P \mapsto [p] = [p_0 + p_1]$$

Für $X \in P^1$:

$$x = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 \quad \text{mit } (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$$

Damit:

$$X : (\lambda_0 : \lambda_1 : 1) \quad P_0 : (1 : 0) \quad P_1 : (0 : 1) \quad P : (1 : 1)$$

Definition 2.2 Sei $\{P_0, P_1, P\}$ ein projektives Koordinatensystem auf einer projektiven Geraden sowie $X \in P^1$ mit projektiven Koordinaten $(\lambda_0 : \lambda_1)$. Der Wert

$$DV(X, P, P_0, P_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \in K \cup \{\infty\} \quad \left(\frac{\lambda_1}{0} =: \infty \right)$$

heißt Doppelverhältnis des Punktequadrupels X, P, P_0, P_1 . Insbesondere sind

$$\begin{aligned} DV(P_0, P, P_0, P_1) &= 0 \\ DV(P_1, P, P_0, P_1) &= \infty \\ DV(P, P, P_0, P_1) &= 1 \end{aligned}$$

Doppelverhältnis von 4 verschiedenen kollinearen Punkten

- Doppelverhältnis von 4 verschiedenen kollinearen Punkten in P^n ($n \geq 1$) $P \mapsto [p]$, $Q \mapsto [q]$, $X \mapsto [x]$, $Y \mapsto [y]$.

$$DV(P, Q, X, Y) \hat{=} (\sigma : \tau)$$

projektive Koordinaten von P im Koordinatensystem $\{X, Y, Q\}$,

$$q = \mu \cdot x + \gamma \cdot y \quad \mu, \gamma \in K, (\mu, \gamma) \neq (0, 0)$$

i -te (k -te) Koordinate:

$$\begin{aligned} q_i &= \mu \cdot x_i + \gamma \cdot y_i \\ q_k &= \mu \cdot x_k + \gamma \cdot y_k \end{aligned}$$

Gramersche Regel (Determinantenmethode):

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} q_i & y_i \\ q_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}} =: \frac{\mu'}{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_i & q_i \\ x_k & q_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}} =: \frac{\gamma'}{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} p &= \sigma \cdot \mu' \cdot x + \tau \cdot \gamma' \cdot y \\ \Rightarrow p_i &= \gamma \cdot \mu' \cdot x_i + \tau \cdot \gamma' \cdot y_i \\ p_k &= \sigma \cdot \mu' \cdot x_k + \tau \cdot \gamma' \cdot y_k \end{aligned}$$

Damit:

$$\sigma \cdot \mu' = \frac{\begin{vmatrix} p_i & y_i \\ p_k & q_k \\ x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_i & y_i \\ p_k & q_k \\ x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}} \quad \tau \cdot \gamma' = \frac{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \\ x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \\ x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}}$$

Somit:

$$DV(P, Q, X, Y) = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \\ x_i & q_i \\ x_k & q_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \\ x_i & q_i \\ x_k & q_k \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} q_i & y_i \\ q_k & y_k \\ p_i & y_i \\ p_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_i & y_i \\ q_k & y_k \\ p_i & y_i \\ p_k & y_k \end{vmatrix}}$$

Satz 2.3 Für vier verschiedene kollineare Punkte gilt:

1. Das Doppelverhältnis ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten, aber wohldefiniert.
2. Das Doppelverhältnis genügt den Vertauschungsregeln:

$$\begin{aligned} DV(X, P, P_0, P_1) &= DV(P, X, P_1, P_0) = DV(P_0, P_1, X, P) \\ &= DV(P_1, P_0, P, X) = DV(X, P, P_1, P_0)^{-1} \\ &= 1 - DV(X, P_0, P, P_1) \end{aligned}$$

3. Wird $DV(X, P, P_0, P_1) = w$ gesetzt, so ergeben die 24 Permutationen einen der 6 verschiedenen Doppelverhältniswerte

$$w \quad \frac{1}{w} \quad 1 - \frac{1}{w} \quad \frac{1}{1-w} \quad \frac{w}{w-1}$$

Beweis: Übung

Bemerkung:

- Gilt für vier verschiedene Punkte einer Geraden $P^1 \subseteq P^n(V^{n+1}, K)$ mit $\text{char } K \neq 2$

$$DV(X, P, P_0, P_1) = -1$$

so heißen diese in harmonischer Lage. ((X,P) tennt (P₀, P₁) harmonisch.)

- LAAG: In einer Basis $\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq V^{n+1}$ wird jeder Untervektorraum $U^{k+1} \subseteq V^{n+1}$ durch die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $C \cdot x = 0$ mit $\text{Rang } C = n-k$ beschrieben, $C \in K^{n-k, n+1}$. ((n-k) linear unabhängige Gleichungen in (n+1) Variablen.)

Folgerung 2.4 In $P^n(V^{n+1}, K)$ wird jeder k-dimensionale projektive Unterraum $Q^k(U^{k+1})$ im projektiven Koordinatensystem beschrieben durch die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem $C \cdot x = 0$, $\text{Rang } C = n-k$, $C \in K^{n-k, n+1}$.

Beispiel:

1. Jede Hyperebene $H^{n-1} \subset P^n(V^{n+1}, K)$ wird durch eine homogene lineare Gleichung beschrieben

$$C \cdot y = \lambda_0 \cdot y_0 + \dots + \lambda_n \cdot y_n$$

mit $y = (y_0, \dots, y_n)^T$, $C = (\lambda_0 \dots \lambda_n)$, $\text{Rang } C = 1$.

2. Ein k-dimensionaler projektiver Unterraum ist Schnitt von (n-k) projektiv unabhängigen Hyperebenen.

$$\begin{aligned} C_1 \cdot y &= \lambda_0^1 \cdot y_0 + \dots + \lambda_n^1 \cdot y_n \\ &\vdots \\ C_{n-k} \cdot y &= \lambda_0^{n-k} \cdot y_0 + \dots + \lambda_n^{n-k} \cdot y_n \end{aligned}$$

mit $\text{Rang } C = (C_1 \dots C_{n-k})^T = n-k$.

Bemerkung:

- Für das Enthaltensein (Inzidenz) eines Punktes $X \in P^n$ im $Q^k \subseteq P^n$ gilt:

$$X \in Q^k \Leftrightarrow C \cdot x = 0$$

Die Lösungsmenge $C \cdot x = 0$ hat $(k+1)$ linear unabhängige Lösungsvektoren x_0, \dots, x_k und damit die allgemeine Lösung

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i \cdot x_i$$

(Parameterdarstellung von Q^k).

2.3 Kollineare Abbildungen

Seien $P^n(V^{n+1}, K)$, $Q^k(W^{k+1}, K)$ projektive Räume. Die semilineare Abbildung $f : V^{n+1} \rightarrow W^{k+1}$ induziert eine Abbildung

$$[x] \mapsto [f(x)]$$

falls $x \notin \ker(f)$,

$$[x] \mapsto [0]$$

falls $x \in \ker(f)$. Ausnahmeregel: $\ker f = U^{m+1} \subset V^{n+1}$.

Definition 3.1 Die durch eine semilineare Abbildung $f : V^{n+1} \rightarrow W^{k+1}$ erzeugte Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa : P^n(V^{n+1}, K) \setminus R^m(U^{m+1}, K) &\rightarrow Q^k(W^{k+1}, K) \\ [x] \subset V^{n+1} \setminus U^{m+1} &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

heißt kollineare Abbildung. Ist f linear, so heißt κ eine projektive Abbildung. Eine bijektive Abbildung heißt Kollineation ($n = k$, $m = -1$).

Satz 3.1 Zwei semilineare Abbildungen $f_i : V^{n+1} \rightarrow W^{k+1}$ ($i = 1, 2$) mit $\dim \text{Im}(f_i) \neq 1$ erzeugen dieselbe kollineare Abbildung genau dann, wenn sie proportional sind, d.h.

$$f_2 = \lambda \cdot f_1 \quad \lambda \in K \setminus \{0\}$$

Beweis:

1. „ \Rightarrow “

Sei $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und $f_2 = \lambda \cdot f_1$. Dann folgt:

(a)

$$\begin{aligned} x \in \ker(f_1) &\Rightarrow f_1(x) = 0 \Rightarrow f_2(x) = (\lambda \cdot f_1)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker(f_2) \\ x \notin \ker(f_1) &\Rightarrow x \notin \ker(f_2) \\ \Rightarrow \ker(f_1) &= \ker f_2 \end{aligned}$$

(b) Für $x \notin \ker(f_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} [f_2(x)] &= [\lambda \cdot f_1(x)] = [f_1(x)] \\ \kappa_2(X) &= \kappa_1(X) \end{aligned}$$

für alle $X \in P^n(V^{n+1}, K) \setminus R^m(\ker f_1)$.

2. „ \Leftarrow “

Seien $\kappa_1 = \kappa_2$ auf $P^n(V^{n+1}, K) \setminus R^m(U^{m+1}, K)$. Dann folgt $\ker f_1 = \ker f_2$.

- (a) Für $\text{Rang } f_1 = 0$ folgt $\text{Rang } f_2 = 0$, also $f_1 = f_2$.
 (b) Für $\dim \text{Im}(f_1) \geq 2$: Es existieren $x, y \in V^{n+1}$ mit x, y linear unabhängig und $f_1(x), f_1(y)$ linear unabhängig. Sei $z \in V^{n+1} \setminus \ker f_1$:

$$\begin{aligned} \kappa_1([z]) &= \kappa_2([z]) \\ \Leftrightarrow f_2(z) &= \lambda_z \cdot f_1(z) \end{aligned}$$

Zu zeigen: $\lambda_z = \lambda$ für alle $z \in V^{n+1} \setminus \ker f_1$.

i. $f_1(z)$ und $f_1(x)$ seien linear unabhängig. Dann:

$$\begin{aligned} f_2(x+z) &= \lambda_{x+z} \cdot (f_1(x+z)) \\ &= \lambda_{x+z} \cdot (f_1(x) + f_1(z)) \\ f_2(x+z) &= f_2(x) + f_2(z) \\ &= \lambda_x \cdot f_1(x) + \lambda_z \cdot f_1(z) \\ \Rightarrow \lambda_x &= \lambda_z = \lambda_{x+z} \end{aligned}$$

wegen linearer Unabhängigkeit von $f_1(x)$ und $f_1(z)$.

ii. Falls $f_1(x), f_1(z)$ linear abhängig. Ersetze $f_1(x)$ durch $f_1(y)$. Dann:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$$

Bemerkung:

- Besitzen $\kappa_1 = \kappa_2$ genau einen Bildpunkt, so können die zugehörigen f_1, f_2 bzgl. verschiedenen Körperautomorphismen gebildet sein und müssen daher nicht proportional sind.

Beispiel:

1. Sei $a^* : V^{n+1} \rightarrow K$ eine Linearform, $z \in V^{n+1}$ mit

$$a^*(z) = a \cdot z \neq 0$$

mit $a = (a_0, \dots, a_n)$, $z = (z_0, \dots, z_n)^T$. Für festes $k \in K$ ist

$$f : V^{n+1} \rightarrow V^{n+1}, x \mapsto x + (k-1) \cdot \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z$$

eine lineare Abbildung. Für $k=1$ ist $f = \text{id}_{V^{n+1}}$, für $k \neq 1$ Fixpunktmenge: $x \in \ker a^*$, also $U^n \subset V^{n+1}$. Außerdem:

$$\kappa([z]) = [f(z)] = [k \cdot z]$$

also

- (a) für $k \neq 0$: $\kappa(Z) = Z$
 (b) Z besitzt kein Bild für $k=0$

Fixgeraden:

- $G^1 \subset H^{n-1}(U^n)$ projektiver Unterraum
- $\kappa(X \vee Z) = X \vee Z$
- (a) für $k=0$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x + \mu \cdot z &\mapsto \lambda \cdot x + \mu \cdot z - \frac{a \cdot (\lambda \cdot x + \mu \cdot z)}{a \cdot z} \cdot z \\ &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z \\ &= \lambda \cdot \left(x - \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z \right) = \left[x - \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z \right] \\ \Rightarrow \kappa(X \vee Z) &= (X \vee Z) \cap H^{n-1} \end{aligned}$$

κ ist Projektion auf H^{n-1} von Z , Z ist Projektionszentrum.

- (b) für $k \neq 0$: f bijektiv, $H^{n-1} \cup Z$ fix unter κ (Ausnahmemenge $\{0\} \in V^{n+1}$). Speziell für $k = -1$ mit $\text{char } K \neq 2$ ist:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x - 2 \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z \\ &\mapsto x - 2 \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z - 2 \frac{a \cdot \left(x - \frac{2a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z\right)}{a \cdot z} \cdot z \\ &= x + (4 - 4) \cdot \frac{a \cdot x}{a \cdot z} \cdot z = x \end{aligned}$$

Also $f = f^{-1}$, $\kappa : P^n(V^{n+1}, K) \setminus U^{-1}([0]) \rightarrow P^n$ mit $\kappa = \kappa^{-1}$ ist Projektivspiegelung.

Eigenschaften kollinear Abbildungen Sei $\kappa : P^n(V^{n+1}, K) \rightarrow P^m(W^{m+1})$ eine kollineare Abbildung. Nach Satz 3.1 erzeugt von einer (Klasse proportionaler) semilinearer Abbildung $f : V^{n+1} \rightarrow W^{m+1}$.

- Unter κ geht der projektive Unterraum $Q^k(U^{k+1}) \subseteq P^n$ über in den projektiven Unterraum $\kappa(Q^k) = R^l(f(U^{k+1}))$. Für $k = 1$:
 - $\dim(\ker f \cap U^2) = 0$
 $\kappa(Q^1)$ ist Gerade.
 - $\dim(\ker f \cap U^2) = 1$
 $\kappa(Q^1)$ ist Gerade, geschlitzt in Z .
 - $\dim(\ker f \cap U^2) = 0$
 $f(U^2) = 0$, also $\kappa(Q^1) = \emptyset$.
- Erhalt kollinear Lage von Punkten unter kollinearer Abbildung κ .

Sei $M = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Punkten in P^n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(\text{proj}(M)) &= \text{proj}(\kappa(M)) \\ &= \text{proj}(\{\kappa(x_i) \mid i \in I, x_i \notin \ker f\}) \end{aligned}$$

mit $\text{proj}(M)$ als projektive Hülle (Menge aller Linearkombinationen).

- Speziell Kollineationen, also bijektive kollineare Abbildungen, führen projektive Koordinatensysteme auf projektive Koordinatensysteme über.
- Werden unter κ kollineare Punkte A,B,C,D (voneinander verschieden) auf kollineare Punkte abgebildet, so gilt:

$$DV(\kappa(A), \kappa(B), \kappa(C), \kappa(D)) = \varphi(DV(A, B, C, D))$$

sofern das Doppelverhältnis erklärt ist und φ ist dabei ein Körperautomorphismus von K . Speziell projektive kollineare Abbildungen sind doppelverhältnis-treu (-erhaltend). Für $\text{char } K \neq 2$ gilt außerdem $\varphi(-1) = -1$, daher erhalten kollineare Abbildungen die harmonische Lage von Punktquadrupeln (falls diese verschieden sind).

Beispiel:

- Projektivspiegelung mit Z als Zentrum und $F = H^{n-1} \cap (X \vee Z)$

$$\begin{aligned} w := DV(Z, F, X, X^\kappa) &= DV(Z, F, X^\kappa, X) \\ w &= \frac{1}{w} \\ w^2 &= 1 \Rightarrow w = -1 \end{aligned}$$

Bei einer Projektivspiegelung (harmonische Homologie) trennt jedes Paar (X, X^κ) mit $X, X^\kappa \neq Z$ und $X \notin H^{n-1}$ das Paar (Z, F) harmonisch.

Bemerkung:

- Sei V ein Vektorraum. Dann sind

$$\begin{aligned}\Gamma L(V) &:= \{f : V \rightarrow V; f \text{ semilinear und bijektiv}\} \\ GL(V) &:= \{f : V \rightarrow V; f \text{ linear und bijektiv}\}\end{aligned}$$

die Gruppen der semilinearen Automorphismen von V bzw. lineare Gruppe. Die Gruppe $GL(V)$ ist ein Normalteiler von $\Gamma L(V)$.

Sei $\dim V = n < \infty$ und $f \in \Gamma L(V)$ beschrieben durch $A \in K^{n \times n}$ mit $A = (a_{ij})$, $\text{Rang } A = n$ und $\varphi \in \text{Aut}(K)$. Die inverse Abbildung zu f ist beschrieben durch $B := \varphi^{-1}(A^{-1})$ mit $\varphi(A) := (\varphi(a_{ij}))$, denn:

$$\begin{aligned}B \cdot \varphi^{-1}(A) &= \varphi^{-1}(A^{-1}) \cdot \varphi^{-1}(A) \\ &= \varphi^{-1}(A^{-1} \cdot A) = \varphi^{-1}(E) = E\end{aligned}$$

Satz 3.3 Sei V^{n+1} ein K -Vektorraum. Dann bilden alle Kollineationen in $P^n(V^{n+1}, K)$ bzgl. der Komposition eine Gruppe,

$$P\Gamma L(V) := \{\kappa : P^n \rightarrow P^n : \kappa \text{ kollinear, bijektiv}\}$$

die Kollineationsgruppe.

Beweis:

- Nach Satz 3.1 werden Kollineationen durch proportionale bijektive semilineare Abbildungen erzeugt. Mit $\Gamma L(V)$ wird in $P\Gamma L(V)$ eine Gruppenstruktur erzeugt. Dabei werden $\lambda \cdot \text{id}_V$ ($\lambda \in K \setminus \{0\}$) dem neutralen Element in $P\Gamma L(V)$ zugeordnet, des weiteren folgt aus

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f^{-1} \circ (\mu \cdot f) &= \lambda \cdot \varphi^{-1}(\mu) f^{-1} \circ f \\ &= \lambda \cdot \varphi^{-1}(\mu) \text{id}_V \end{aligned}$$

mit $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}, \varphi \in \text{Aut}(K)$ das inverse Element in $P\Gamma L(V)$.

Bemerkung:

- $\psi : \Gamma L(V) \rightarrow P\Gamma L(V) : f \mapsto \kappa(f)$ ist nach Satz 3.1 ein Gruppenhomomorphismus, dessen Kern

$$\{\lambda \cdot \text{id}_V : \lambda \in K \setminus \{0\}\}$$

entspricht. Die Nebenklasse von $\ker \psi$ bilden die Fasern von ψ .

Satz 3.3 Die Projektivitäten (projektive Kollineationen) des $P^n(V^{n+1}, K)$ bilden bzgl. der Komposition eine Gruppe,

$$PGL(V) := \{\kappa : P^n \rightarrow P^n : \kappa \text{ projektiv, bijektiv}\}$$

(die Normalteiler von $P\Gamma L(V)$ ist).

Beweis: analog zu Satz 3.2

Satz 3.4 Seien $P^n(V^{n+1}, K)$ und $Q^n(W^{n+1}, K)$ projektive Räume und $\{P_0, \dots, P_n, P\}$ sowie $\{Q_0, \dots, Q_n, Q\}$ projektive Koordinatensysteme, $\varphi \in \text{Aut}(K)$. Dann gibt es genau eine durch semilineare Abbildung $f : V^{n+1} \rightarrow W^{n+1}$ (bzgl. φ) bestimmte Kollineation κ mit

$$\kappa : P^n \rightarrow Q^n, X \mapsto \kappa(X)$$

wobei

$$\begin{aligned} P_i &\mapsto \kappa(P_i) = Q_i & i = 0, \dots, n \\ P &\mapsto \kappa(P) = Q \end{aligned}$$

Beweis:

- Seien $\{p_0, \dots, p_n\}$ mit $P_i \mapsto [p_i]$ sowie $\{q_0, \dots, q_n\}$ mit $Q_i \mapsto [q_i]$ Basen in V^{n+1} bzw. W^{n+1} . Des weiteren gelten

$$P \mapsto \left[\sum_{i=0}^n p_i \right] \quad Q \mapsto \left[\sum_{i=0}^n q_i \right]$$

Dann gibt es genau eine semilineare Abbildung

$$f : V^{n+1} \rightarrow W^{n+1} : p_i \mapsto q_i \quad i = 0, \dots, n$$

Dann gilt auch:

$$\left(\sum_{i=0}^n p_i \right) \mapsto \sum_{i=0}^n q_i$$

Die durch f erzeugte Kollineation κ besitzt die geforderten Eigenschaften.

- Für $\tilde{f} : V^{n+1} \rightarrow W^{n+1}$, die $\tilde{\kappa}$ mit gleichen Eigenschaften festlegt, gelten $\tilde{f}(p_i) = \tilde{q}_i$. Dabei existiert nach Satz 3.1 ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $\tilde{q}_i = \lambda \cdot q_i$ für $i = 0, \dots, n$, woraus $\tilde{f} = \lambda \cdot f$ für semilineare \tilde{f} bzgl. gleichem φ folgt.

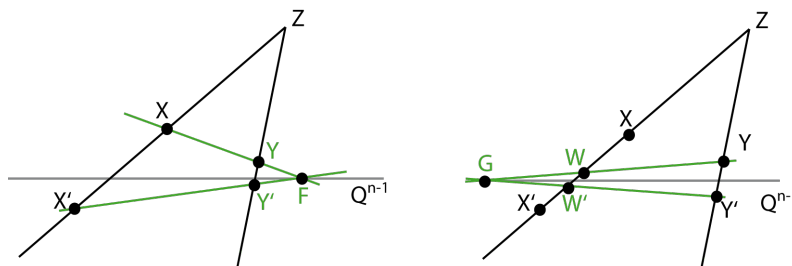
Definition 3.2 Eine projektive Kollineation $\kappa : P^n(V^{n+1}, K) \rightarrow P^n(V^{n+1}, K)$ heißt perspektive Kollineation, falls es eine Hyperebene $Q^{n-1}(H^n) \subset P^n$ (Achse) und einen Punkt $Z \in P^n$ (Zentrum) gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Punkt $X \in Q^{n-1}$ ist Fixpunkt unter κ .
2. Jede Gerade durch Z ist eine Fixgerade unter κ .

Bemerkung:

- Eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum auf der Achse heißt Elation ; eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum nicht auf der Achse heißt Homologie.
- Konstruktive Behandlung für $Z \in Q^{n-1}$: gegeben sei $Q^{n-1} \subset P^n$ (Achse), $Z \notin Q^{n-1}$ (Zentrum), $X \notin Q^{n-1}$, $X \neq Z$, $X' \in (Z \vee X) \setminus \{Z \cup ((Z \vee X) \cap Q^{n-1})\}$, $X' = \kappa(X)$. Dann:

$$Y' = (X' \vee F) \cap (Z \vee X) = \kappa(Y) \quad (F = (X \vee Y) \cap Q^{n-1})$$



$(Z, Q^{n-1}, (X, X'))$ eine Angabe einer perspektiven Kollineation.

Satz 3.5 Sei $P^n(V^{n+1}, K)$ ein projektiver Raum über dem K -Vektorraum V^{n+1} mit $\dim V = n + 1 < \infty$. Dann ist jede projektive Kollineation $\kappa : P^n \rightarrow P^n$ die Komposition von höchstens $(n+1)$ perspektiven Kollineationen.

Beweis:

- Sei $f \in GL(V)$ eine lineare bijektive Abbildung, die κ erzeugt. Wähle Basis $\{p_0, \dots, p_n\}$ von V , sei $k = \dim \text{fix } f$, wobei

$$\text{fix } f := \{x \in V : f(x) = x\}$$

- Es ist durch vollständige Induktion nach $(n+1-k)$ zu zeigen, dass sich f als Komposition von $(n+1-k)$ linearen Abbildungen darstellen lässt, die jeweils eine Hyperebene fest lassen. Diese induzieren perspektive Kollineationen.
- Falls $k = n$ ist die Behauptung erfüllt. Anderenfalls: Sei $y \in V \setminus \text{fix } f$, dann ist $f(y) \notin \text{fix}(f)$. Sei ψ eine lineare Abbildung mit $\psi(f(y)) = y$ und die des weiteren eine Hyperebene $H \supseteq \text{fix } f$ fest lässt. Dann folgt:

$$\text{fix}(f \circ \psi) = [\text{fix } f \cup \{f(y)\}]$$

denn mit $[H \cup \{f(y)\}] = V$ und $h \in H$, $\lambda \in K$ gilt:

$$f \circ \psi(h + \lambda \cdot f(y)) = f(h + \lambda \cdot y) = f(h) + \lambda \cdot f(y)$$

also

$$h + \lambda \cdot f(y) \in \text{fix}(f \circ \psi) \Leftrightarrow h \in \text{fix } f$$

- Also lässt sich $(f \circ \psi)$ nach Induktionsvoraussetzung von $(n+1) - (k+1)$ linearen Abbildungen darstellen, die eine Hyperebene fest lassen. Damit f als Komposition von $(n+1)-k$ solchen Abbildungen.

2.4 Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Seien V^{n+1} ein K -Vektorraum mit $\dim V = n + 1 > 0$ und $H^n \subset V^{n+1}$ eine Hyperebene. Wähle $s \in V \setminus H^n$, $V = [s] \oplus H^n$, d.h. für beliebige $v \in V$ gilt:

$$v = \lambda \cdot s + h \quad (\lambda \in K, h \in H^n)$$

$$V \rightarrow K \times H : v \mapsto (\lambda, h)$$

ist bijektive Abbildung. $(K \times H)$ ist sogar zu V isomorph, da

$$v_1 + v_2 \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2, h_1 + h_2)$$

$$v \in H^n \mapsto (0, v)$$

$$s \in V \setminus H^n \mapsto (1, 0)$$

Satz 4.1 Sei $P^n(K \times H^n, K)$ projektiver Raum und $Q^{n-1}(H^n)$ eine projektive Hyperebene in P^n . Die Abbildung

$$\xi : P^n \setminus Q^{n-1} \rightarrow H^n : (\lambda : h) \mapsto \frac{1}{\lambda} \cdot h$$

ist wohldefinierte Bijektion auf $\mathcal{A} = H^n$. Die Umkehrabbildung:

$$\varepsilon : H^n \mapsto P^n \setminus Q^{n-1} : x \mapsto (1 : x)$$

Beweis:

- ξ liefert für verschiedene Repräsentanten in $X \mapsto [x]$ mit $x = \lambda \cdot s + h$, also $(k \cdot \lambda, k \cdot s)$ mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ denselben Punkt in $\mathcal{A} = H^n$, nämlich

$$\frac{1}{k \cdot \lambda} k \cdot h = \frac{1}{\lambda} \cdot h$$

Wähle aus allen Repräsentanten zu X den mit $(1, y) \in [(\lambda, h)]$, also $y = \frac{1}{\lambda} \cdot h$. Daher gilt:

$$\xi([1, y]) = y$$

Des Weiteren:

$$\xi \circ \varepsilon = \text{id}_{\mathcal{A}}$$

$$\varepsilon \circ \xi = \text{id}_{P^n \setminus Q^{n-1}}$$

ξ ist daher Bijektion und weiterhin $\varepsilon = \xi^{-1}$.

Bezeichnungen:

- $X \in Q^{n-1}(0 \times H^n)$: uneigentliche Punkte (Fernpunkte)
- $X \in P^n \setminus Q^{n-1}$: eigentliche Punkte
- Q^{n-1} : Fernhyperebene
- $P^n \setminus Q^{n-1}$: affiner Ausschnitt
- $\varepsilon(\mathcal{A})$: Einbettung von \mathcal{A} in projektiven Abschnitt

Beispiele:

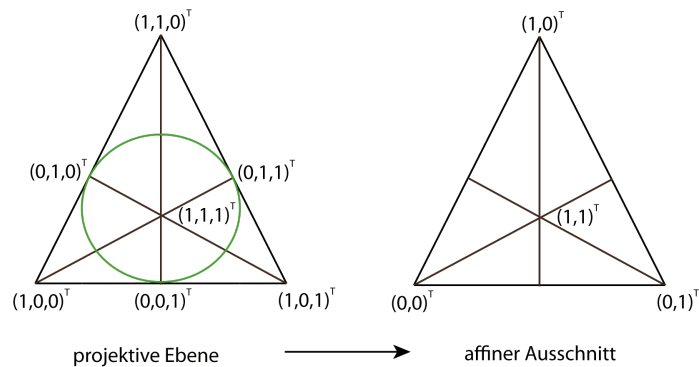
1. $P^n(K^{n+1})$ mit $Q^{n-1} : x_0 = 0$,

$$\xi : (x_0 : \dots : x_n)^T \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

$\mathcal{A} = K^n$ in $P^n(K^{n+1})$ vermittelt

$$\varepsilon : (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)^T$$

2. $P^2(\mathbb{Z}_2^3)$ mit $Q^1 : x_0 = 0$,



3. $P^1(K^2)$ mit $Q^0 : x_0 = 0$: projektive Gerade mit uneigentlichem Punkt \rightarrow affine Gerade
4. Für $K = \mathbb{R}$: $P^1(\mathbb{R}^2)$ mit $Q^0 : x_0 = 0$: projektiver Abschluss der reellen Zahlengerade ($\cong \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)
- Für $K = \mathbb{C}$: $P^1(\mathbb{C}^2)$ mit $Q^0 : x_0 = 0$: projektiver Abschluss der Gaußschen Zahlenebene (\cong projektiv abgeschlossene komplexe Zahlengerade)

Abbildung von Unterräumen:

1. Sei $H^n \subset V^{n+1}$ eine Hyperebene. Des weiteren sei $s \in H^n$, $W^k \subset H^n$ ein Unterraum, $s + W$ affiner Unterraum. Dann ist

$$\varepsilon(s + W) = \{[(1, s + a)] : a \in W\} = \{[(1, s) + (0, a)] : a \in W\}$$

die Menge aller eigentlichen Punkte des projektiven Unterraums $R^k(T)$ mit $T := (1 : s) \oplus (0 \times W)$ und

$$R^k(T) = \varepsilon(s + W) \cup \{[0, a] : a \in W\}$$

ist der projektive Abschluss von $s + W$.

2. Sei $R^k(T)$ projektiver Unterraum mit $T \subset K \times H$ für den gilt $T \cap (0 \times H) \neq \emptyset$, $T \cap (K \times H) \setminus \{0 \times H\} \neq \emptyset$. Dann ist

$$(0 \times W) = T \cap (0 \times H)$$

mit $W \subset H$ und $(1, s) \in T$. Also für $(\lambda, t) \in T$

$$\begin{aligned} (\lambda, t) &= \lambda \cdot (1, s) + (0, a) & a &= t - \lambda \cdot s \in W \\ \Rightarrow T &= [(1, s)] \times (0 \times W) \end{aligned}$$

Somit:

$$\xi(\lambda : t) = \frac{1}{\lambda} \cdot t = s + \frac{1}{\lambda} \cdot a \in s + W$$

für eigentliche Punkte in $R^k(T)$, also den affinen Ausschnitt.

Parallelität:

- $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ in H , falls $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_1 \supseteq U_2$. Also $R_i(T_i)$ mit $T_i = [(1, s_i)] \oplus (0 \times U_i)$ für $i = 1, 2$. Dann

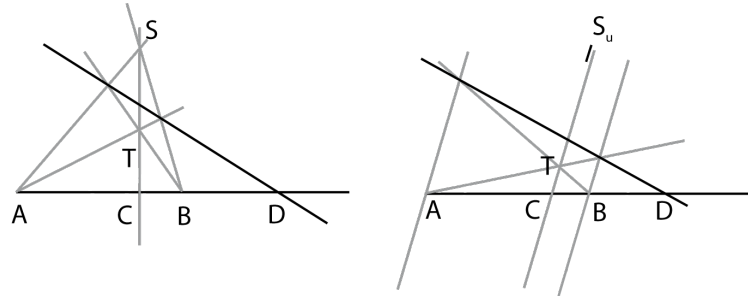
$$R_1 \cap Q^{n-1}(0 \times H) \subseteq R_2 \cap Q^{n-1}(0 \times H)$$

(oder \supseteq). (Menge der Fernpunkte eines $R_i(T_i)$ ist in der Fernpunktmenge des anderen enthalten.)

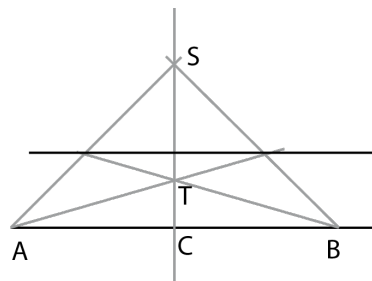
- Beispiel: Parallele affine Geraden besitzen im projektiven Abschluss denselben uneigentlichen Punkt.

Bemerkung:

- Je nach Spezifikation der Fernhyperebene können Figuren im projektiven Raum in einem affinen Ausschnitt ganz unterschiedlich gedeutet werden.



Konstruktion des vierten harmonischen Punktes D zu kollinearen paarweise verschiedenen Punkten A,B,C auf zwei Wegen. Für $TV(C, B, A) = \frac{1}{2}$:



Satz 4.2 Sei H ein K -Vektorraum, ε die Einbettung des affinen Raumes H in $P(K \times H)$. Es gelten:

1. Für drei kollineare Punkte x, p, u von H mit $p \neq u$ ist

$$TV(x, p, u) = DV(\varepsilon(x), \varepsilon(p), \varepsilon(u), (0 : p - u))$$

2. Seien $a, b, c, d \in H$ kollinear mit b, c, d paarweise verschieden, so ist

$$DV(\varepsilon(a), \varepsilon(b), \varepsilon(c), \varepsilon(d)) = \frac{TV(a, b, c)}{TV(a, b, d)}$$

Beweis:

1. Sei

$$TV(x, p, u) = \lambda$$

d.h.

$$x = (1 - \lambda) \cdot u + \lambda \cdot p \quad (\lambda \in K)$$

Es folgt für $(1 : x)$ bzgl. des projektiven Koordinatensystems $\{\varepsilon(u) = (1 : u), (0 : p - u), \varepsilon(p) = (1 : p)\}$ mit

$$(1 : p) = [(1, u) + (0 : p - u)]$$

der Doppelverhältniswert λ , da

$$\begin{aligned} (1 : x) &= [1 \cdot (1, u) + \lambda \cdot (0, p - u)] \\ \Rightarrow DV(\varepsilon(x), \varepsilon(p), \varepsilon(u), (0 : p - u)) &= \frac{\lambda}{1} = \lambda \end{aligned}$$

2. Seien

$$a = (1 - \lambda) \cdot c + \lambda \cdot d \quad b = (1 - \mu) \cdot c + \mu \cdot d$$

Es sind nach Voraussetzung $b \neq c, d$, also $\mu \neq 0, 1$. Es folgt:

$$\begin{aligned} [(1 : a)] &= \left[\frac{1 - \lambda}{1 - \mu} \cdot (1 - \mu) \cdot (1, c) + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \mu \cdot (1, d) \right] \\ \Rightarrow DV(\varepsilon(a), \varepsilon(b), \varepsilon(c), \varepsilon(d)) &= \frac{\lambda \cdot (1 - \mu)}{\mu \cdot (1 - \lambda)} \in K \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

Außerdem folgt mit $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned} a &= (1 - \lambda) \cdot c + \frac{\lambda}{\mu} \cdot (b - (1 - \mu) \cdot c) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot c + \frac{\lambda}{\mu} \cdot b \\ \Rightarrow TV(a, b, c) &= \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

Ebenso für $\mu \neq 1$:

$$TV(a, b, d) = \frac{1 - \lambda}{1 - \mu}$$

2.5 Dualer projektiver Raum und Korrelation

- Dualer Vektorraum,

$$V^* = \{f : V \rightarrow K; f \text{ linear}\}$$

mit $f \in V^*$: dualer Vektor. Definiere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

für $f, g \in V^*, x \in V$. Für $\lambda \in K, f \in V^*, x \in V$:

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

- Untervektorraum:

$$U^{l+1*} := \{f \in V^{n+1*} : f(U^{k+1}) = 0\}$$

mit $U^{k+1} = [b_0, \dots, b_k], 0 \leq k \leq n, V = [b_0, \dots, b_n]$,

$$V^{n+1*} = [f_0, \dots, f_n] \quad \text{duale Basis}$$

mit $f_i(b_j) = \delta_{ij}$. Also

$$\begin{aligned} U^{l+1*} &= [f_{k+1}, \dots, f_n] \\ \Rightarrow l + 1 &= (n + 1) - (k + 1) = n - k \end{aligned}$$

$(n - k)$ heißt Codimension von $U^{k+1} \subseteq V^{n+1}$. Definiere

$$\delta : V^{n+1} \rightarrow V^{n+1*} : U^{k+1} \mapsto U^{l+1*}$$

ist bijektiv.

Definition 5.1 Seien V ein K -Vektorraum mit $\dim V < \infty$, $P(V, K)$ projektiver Raum zu V . Des weiteren sei V^* der zu V isomorphe K -Dualvektorraum. Der projektive Raum $P^*(V^*, K)$ heißt dualer projektiver Raum zu $P(V, K)$.

Bemerkung:

- δ erzeugt Bijektion d der zugehörigen projektiven Unterräume,

$$d : P^n \rightarrow P^{n*} : Q^k(U^{k+1}) \mapsto R^{n-k-1}(U^{n-k*})$$

Diese heißen zueinander dual.

Beispiel:

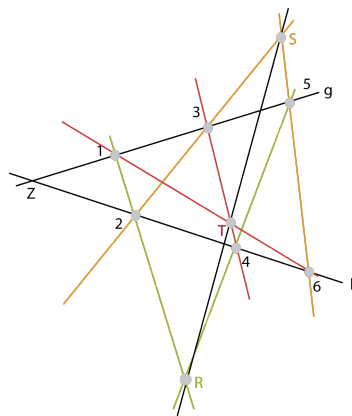
	$\stackrel{d}{\mapsto}$	
\emptyset	$\stackrel{d}{\mapsto}$	P^{n*}
Punkt X	$\stackrel{d}{\mapsto}$	Hyperebene R^{n-1*}
Gerade Q^1	$\stackrel{d}{\mapsto}$	Hypergerade R^{n-2*}
Hypergerade Q^{n-2}	$\stackrel{d}{\mapsto}$	Gerade R^{1*}
Hyperebene Q^{n-1}	$\stackrel{d}{\mapsto}$	Punkt X^*
P^n	$\stackrel{d}{\mapsto}$	\emptyset

Dualitätsprinzip:

- Seien $U_1^{k+1}, U_2^{m+1} \subset V^{n+1}$ Untervektorräume. Dann gelten:
 1. $\delta(U_1^{k+1} + U_2^{m+1}) = \delta(U_1^{k+1}) \cap \delta(U_2^{m+1}) =: W_1^{n-k*} \cap W_2^{n-m*}$
 2. $\delta(U_1^{k+1} \cap U_2^{m+1}) = \delta(U_1^{k+1}) + \delta(U_2^{m+1}) =: W_1^{n-k*} + W_2^{n-m*}$
 3. $U_1^{k+1} \subseteq U_2^{m+1} \Rightarrow \delta(U_1^{k+1}) \supseteq \delta(U_2^{m+1})$
- Seien $Q_1^k(U_1^{k+1}), Q_2^m(U_2^{m+1}) \subset P^n(V^{n+1})$ projektive Unterräume. Dann folgt:
 1. $d(Q_1^k \vee Q_2^m) = d(Q_1^k) \cap d(Q_2^m) =: R_1^{n-k-1*} \cap R_2^{n-m-1*}$
 2. $d(Q_1^k \cap Q_2^m) = d(Q_1^k) \vee d(Q_2^m) =: R_1^{n-k-1*} \vee R_2^{n-m-1*}$
 3. $Q_1^k \subseteq Q_2^m \Rightarrow R_1^{n-k-1*} \supseteq R_2^{n-m-1*}$

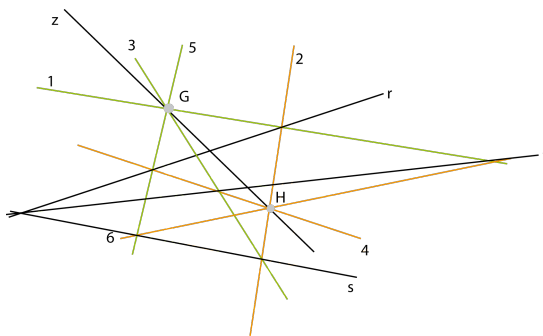
Beispiele:

1. k projektiv unabhängige Punkte $X_1, \dots, X_k \stackrel{d}{\mapsto}$ k projektiv unabhängige Hyperebenen H_1^*, \dots, H_k^* .
2. Q^k als Verbindung von (k+1) projektiv unabhängigen Punkten $\mapsto R^{n-k-1*}$ als Schnitt von (k+1) projektiv unabhängigen Hyperebenen.
3. 1-parametrische Punktmenge \mapsto einparametrische Hyperebenenmenge
4. Aussage von Pappos in $P^2(V^3, K)$,



$$R = (1 \vee 2) \cap (4 \vee 5) \quad S = (2 \vee 3) \cap (5 \vee 6) \quad T = (3 \vee 4) \cap (6 \vee 1)$$

R,S,T sind kollinear. Duale Aussage:



$$r = (1 \cap 2) \vee (4 \cap 5) \quad s = (2 \cap 3) \vee (5 \cap 6) \quad t = (3 \cap 4) \vee (6 \cap 1)$$

r,s,t sind kopunktal.

Definition 5.2 Eine Korrelation ist eine Kollineation in den Dualraum ,

$$\kappa : P^n(V^{n+1}, K) \rightarrow P^n(V^{n+1*}, K)$$

Sie ist durch eine bijektive semilineare Abbildung $f : V^{n+1} \rightarrow V^{n+1*}$ mit $\varphi \in \text{Aut}(K)$ beschrieben.

Koordinatendarstellung:

- Sei $\kappa : P^n(V^{n+1}, K) \rightarrow P^n(V^{n+1*}, K)$ Korrelation, $\text{Aut } K = \text{id}_K$,

$$X \mapsto Q^{n-1*}$$

κ sei bzgl. projektiver Koordinatensysteme $\{P_0, \dots, P_n, P\}$ und $\{G_0, \dots, G_n, G\}$ mit

$$\begin{aligned} P_i &\mapsto [p_i] \subset V^{n+1} \\ P &\mapsto \left[\sum_{i=0}^n p_i \right] \\ G_i &\mapsto [g_i] \subset V^{n+1*} \\ G &\mapsto \left[\sum_{i=0}^n g_i \right] \end{aligned}$$

und $B = \{p_i\}$ Basis in V^{n+1} , $B'^* = \{g_i\}$ Basis in V^{n+1*} . Seien

$$x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot p_i \quad (x_i \in K)$$

$$y = \sum_{i=0}^n y_i \cdot g_i \quad (y_i \in K)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (x_0, \dots, x_n)^T \\ B'^*(y) &= (y_0, \dots, y_n)^T \end{aligned}$$

Dann:

$$\kappa_{B'^*} \circ \kappa \circ \kappa_B^{-1} : \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \varrho \cdot (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $\varrho \in K \setminus \{0\}$, $\text{Rang}(a_{ij}) = n + 1$. (Beschreibung mittels regulärer Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{n+1, n+1}$, die bis auf Proportionalitäten bestimmt sind.)

Definition 5.3 Eine reguläre projektive Abbildung $\kappa^* : P^{n*} \rightarrow P^n$ heißt zur Korrelation $\kappa : P^n \rightarrow P^{n*}$ assoziiert, falls $\forall X, Q^{n-1} \subset P^n$ gilt:

$$X \in Q^{n-1} \Rightarrow \kappa^*(Q^{n-1}) \in \kappa(X)$$

Seien im Folgenden V, V^* auf adjungierte Basen bezogen, d.h. $B = \{p_0, \dots, p_n\}$ in V und $B^* = \{f_0, \dots, f_n\}$ in V^* mit $f_i(p_j) = \delta_{ij}$.

Satz 5.1 Wird eine projektive Korrelation $\kappa : P^n \rightarrow P^{n*}$ durch eine Matrix A beschrieben, so ist die assoziierte Korrelation κ^* durch $C = (A^T)^{-1}$ festgelegt.

Beweis:

- Sei $\kappa : P^n \rightarrow P^{n*}$,

$$\begin{aligned} X &\mapsto X' \\ \underline{x} &\mapsto A \cdot \underline{x} =: \underline{x}' \end{aligned}$$

und $\kappa^* : P^{n*} \rightarrow P^n$,

$$\begin{aligned} Y^* &\mapsto Y' \\ \underline{y} &\mapsto C \cdot \underline{y} = \underline{y}' \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} X \in Q^{n-1} &\Leftrightarrow \underline{a}^*(\underline{x}) = \underline{a}^T \cdot \underline{x} = 0 \\ &= (C^{-1} \underline{a}')^T \cdot (A^{-1} \cdot \underline{x}') \\ &= \underbrace{(\underline{a}')^T \cdot (C^{-1})^T \cdot A^{-1}}_{\stackrel{!}{=} E} \cdot \underline{x}' \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung:

$$(C^{-1})^T \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow C = (A^T)^{-1}$$

Definition 5.4 Eine projektive Korrelation heißt involutorisch $:\Leftrightarrow \kappa^* \circ \kappa = \text{id}_{P^n}$

Satz 5.2 Eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n+1, n+1}$ beschreibt eine involutorische projektive Korrelation $\Leftrightarrow A = \pm A^T$. (A symmetrisch oder schiefsymmetrisch)

Beweis:

- κ ist involutorisch $\Leftrightarrow \kappa^*(\kappa(X)) = X$, also nach Satz 5.1:

$$\begin{aligned} (A^T)^{-1} \cdot (A \underline{x}) &= \lambda \cdot \underline{x} \quad (\lambda \in K \setminus \{0\}) \\ \Leftrightarrow (A^T)^{-1} \cdot A &= \lambda \cdot E \\ A^T \cdot A^{-1} &= \lambda \cdot E \\ A^T &= \lambda \cdot A \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} A &= (A^T)^T = \lambda \cdot A^T = \lambda^2 \cdot A \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Definition 5.5 Eine involutorische projektive Korrelation nach Definition 5.1 und 5.4 heißt für $A = A^T$ Polarität und für $A = -A^T$ Nullkorrelation.

Bemerkung:

- Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n+1, n+1}$ mit $\text{char } K \neq 2$ kann nur für $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, regulär und schiefssymmetrisch sein, da

$$\begin{aligned} \det A &= \det(A^T) = \det(-A) \\ &= \underbrace{(-1)^{n+1}}_{=1} \cdot \det A \end{aligned}$$

Nullkorrelationen existieren demnach nur in P^n mit ungerader Dimension.

Definition 5.6 Sei κ eine projektive Korrelation nach Definition 5.1. Ein Punkt X heißt konjugiert zu einem Punkt Y

$$:\Leftrightarrow X \in \kappa(Y) \Leftrightarrow \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = 0$$

X heißt selbstkonjugiert

$$:\Leftrightarrow X \in \kappa(X) \Leftrightarrow \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0$$

Bemerkung:

- Für Polaritäten und Nullkorrelationen gilt:

$$X \in \kappa(Y) \Leftrightarrow Y \in \kappa(X)$$

Satz 5.3 Bei einer Nullkorrelation ist jeder Punkt selbstkonjugiert (falls $\text{char } K \neq 2$), d.h. $\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0$ für alle $X \in P^n$.

Beweis:

- indirekt: Angenommen es gibt $\underline{x} \neq 0$ mit $\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = r \neq 0$. Dann:

$$\begin{aligned} r^T &= r = (\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x})^T \\ &= \underline{x}^T \cdot A^T \cdot \underline{x} \\ &= -\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = -r \end{aligned}$$

Also $r = 0$. Widerspruch! Daraus folgt für alle $x \neq 0$:

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0$$

Bezeichnung:

- Für Polaritäten (Nullkorrelationen) $\kappa : X \mapsto \kappa(X)$ heißt X Pol (Nullpunkt) und $\kappa(X)$ Polarehyperebene (Nullhyperebene).

Beispiel:

- In projektiv abgeschlossenen euklidischen 3-Raum $\overline{E^3}$ kann in jedem Augenblick einer kontinuierlichen Schraubung jedem X die Ebene $\kappa(X)$ zugeordnet werden, die mit X indiziert und orthogonal zur Bahntangente von X steht. Diese Zuordnung ist eine Nullkorrelation. (Bedeutung für die Momentankinematik)
- Frage nach selbstkonjugierten Punkten bei einer Polarität κ führt nach Definition 5.6 auf

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0 \quad (1)$$

für $\kappa : \underline{x}' = A \cdot \underline{x}$ mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$, $\text{Rang } A = n + 1$. Die Berechnung ergibt:

$$0 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

für $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n)^T$ und $a_{ij} = a_{ji}$.

Definition 5.7 Die Menge aller $X \in P^n$ mit (1) heißt eine Hyperquadrik des P^n . (Für $n = 2$: Kegelschnitt, für $n = 3$: Quadrik).
Falls (1) erfüllt ist und $A = A^T$, $\det A \neq 0$, dann heißt κ die Polarität an der Hyperquadrik.

Beispiel:

1. Polarität an einem Kegelschnitt in \bar{E}^2 (projektiv abgeschlossene euklidische Ebene)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \cdot b^{-2} \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Damit:

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = -x_0^2 + \frac{x_1^2}{a^2} + \varepsilon \cdot \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

Dies ergibt einen Kegelschnitt, der im affinen Ausschnitt (bzgl. $x_0 = 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \cdot \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad x := \frac{x_1}{x_0}, y := \frac{x_2}{x_0}$$

Für $\varepsilon = 1$: Ellipse, für $\varepsilon = -1$: Hyperbel. Die Polarebene X' von X hat den Koordinatenvektor

$$\underline{x}' = \left(-x_0, \frac{x_1}{a^2}, \varepsilon \cdot \frac{x_2}{b^2} \right)$$

2.6 Gruppentheoretische Beschreibung von Geometrien

Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert. (Felix Klein, 1872)

Beispiel:

Raum	Gruppe	Invariante
Affiner Raum	Affine Gruppe	affine Unterräume, Parallelität, Teilverhältnis
	Kongruenzen	Winkel, Abstand, Volumen
Projektiver Raum	Kollineationsgruppe	projektive Unterräume, Doppelverhältnis (proj. Kollineationen)

Definition 6.1 Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine bijektive Selbstabbildung $f : M \rightarrow M$ heißt Transformation. (Ist M endlich, so heißt f Permutation.)

Satz 6.1 Die Menge aller Transformationen bilden bzgl. der Komposition eine Gruppe, die Automorphismengruppe S_M von M . Eine Untergruppe $G \subseteq S_M$ heißt Transformationsgruppe auf M .

Definition 6.2 Die Invariantentheorie bzgl. des Paares (M, G) heißt ein Geometriemodell, darin M ein Raum, dessen Elemente Punkte, jede Menge $F = \{F_j\}$ von Teilmengen F_j ($j \in J$) eine Figur und jede unter G invariante Begriff ein geometrischer Begriff.

3

Quadriken

3.1 Quadratische Formen

Definition 1.1 Sei V ein Vektorraum über K . Eine Abbildung $\varrho : V \rightarrow K$ heißt eine quadratische Form, falls für alle $x, y \in V$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$:

1. $\varrho(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot \varrho(x)$
2. $(x, y) \mapsto \varrho(x + y) - \varrho(x) - \varrho(y)$ ist eine Bilinearform $V \times V \rightarrow K$

Bemerkung:

- Für eine Bilinearform $\sigma : V \times V \rightarrow K$ ist ϱ über

$$\sigma(x, x) := \varrho(x)$$

erklärt. Mit den Rechenregeln für σ folgt:

1. $\varrho(\lambda \cdot x) = \sigma(\lambda \cdot x, \lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot \sigma(x, x) = \lambda^2 \cdot \varrho(x)$
2. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varrho(x + y) &= \sigma(x + y, x + y) \\ &= \sigma(x, x) + \sigma(x, y) + \sigma(y, x) + \sigma(y, y) \\ &= \varrho(x) + \sigma(x, y) + \sigma(y, x) + \varrho(y)\end{aligned}$$

Für $\text{char } K \neq 2$ definiert man vermöge

$$\sigma_\varrho : V \times V \rightarrow K : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} (\varrho(x + y) - \varrho(x) - \varrho(y))$$

eine symmetrische Bilinearform. Für $\text{char } K = 2$ ist in Definition 1.1.2:

$$\forall x \in V : (x, x) \mapsto \varrho(x + x) - \varrho(x) - \varrho(x) = 0$$

Im Folgenden setzen wir $\text{char } K \neq 2$ voraus.

Beispiele:

1. $\varrho : K \rightarrow K : x \mapsto x^2$ erzeugt

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{2} ((x + y)^2 - x^2 - y^2) = x \cdot y$$

2. $\varrho : K^2 \rightarrow K$,

$$(x_1, x_2) \mapsto 2x_1 \cdot x_2$$

erzeugt

$$\begin{aligned}\sigma_\varrho \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} (2(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) - 2x_1 \cdot x_2 - 2y_1 \cdot y_2) \\ &= x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\sigma_\varrho \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Satz 1.1 Jede symmetrische Matrix $A = A^T$ über K mit $\text{char } K \neq 2$ ist zu einer Diagonalmatrix D kongruent, d.h. es gibt eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$D = S^T \cdot A \cdot S$$

Beweis: Lineare Algebra

3.2 Projektive Quadriken

- Sei $P^n(V)$ ein n -dimensionaler projektiver Raum über K mit $\text{char } K \neq 2$. Des weiteren eine quadratische Form $\varrho : V \rightarrow K$ verschieden von der Nullform. Die projektive Quadrik $\varphi(\varrho)$ lässt sich beschreiben als

$$\varphi(\varrho) = \{[x] \in P^n(V) : \varrho(x) = 0\}$$

- Bezeichnung: $\varrho(x) = 0$: Gleichung der Quadrik (Nullstellenmenge der quadratischen Form)
- Koordinatendarstellung:

Nach Auszeichnung eines projektiven Koordinatensystems $\{Q_0, \dots, Q_n, Q\}$ in P^n , $\{q_0, \dots, q_n\} \subset V^{n+1}$ zugehörige Basis mit

$$\sum_{i=0}^n q_i = q$$

gilt:

$$X : x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot q_i \quad (x_i \in K)$$

Unter Verwendung der zu ϱ zugehörigen symmetrischen Bilinearform σ_ϱ und

$$a_{ij} := \sigma_\varrho(q_i, q_j)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho(x, y) &= \sigma_\varrho \left(\sum_{i=0}^n q_i \cdot x_i, \sum_{j=0}^n q_j \cdot y_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i \cdot y_j \cdot a_{ij} \end{aligned}$$

also

$$\sigma_\varrho(x, y) = \underline{y}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

mit $A = A^T$. Demnach

$$\varrho(x) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

Satz 2.1 Die Begriffe Bilinearform und Quadrik sind projektiv invariant, d.h. sie gehen unter projektiven Kollineationen wieder in Begriffe gleichen Typs über. Die beschreibende Matrix in der Gleichung von φ geht über in eine ranggleiche Matrix.

Beweis:

- Wende auf $\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y}$ und $\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0$ eine projektive Kollineation $\kappa : \hat{x} \mapsto S \cdot \hat{x} = \underline{x}$, Rang $S = n+1$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \underline{y}^T \cdot A \cdot \underline{x} &= \hat{y}^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot \hat{x} && \text{Bilinearform} \\ \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} &= \hat{x}^T \cdot \underbrace{S^T \cdot A \cdot S}_{=: B} \cdot \hat{x} && \text{Quadrikgleichung} \end{aligned}$$

Die Matrizen A und B sind ranggleich, da kongruent (Satz 1.1)

Definition 2.1 Zwei Quadriken, die sich nur um eine projektive Kollineation unterscheiden, heißen projektiväquivalent.

Zwei Quadrikgleichungen heißen äquivalent, falls sie ineinander übergehen durch projektive Koordinatentransformation und Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Satz 2.2 Jede Quadrikgleichung in P^n über K mit $\text{char } K \neq 2$

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0$$

mit $A = A^T \neq 0$ besitzt die projektive Invariante Rang A und ist äquivalent zur Normalform

$$\alpha_{00} \cdot x_0^2 + \dots + \alpha_{r-1,r-1} \cdot x_{r-1}^2 =$$

mit $r = \text{Rang } A$, $1 \leq r \leq n+1$.

Beweis:

- Erste Aussage folgt direkt aus Satz 2.1 mit Definition 2.1, mit der durch S vermittelten Koordinatentransformation folgt auch die zweite.

Folgerung 2.3 Projektiväquivalente Quadriken besitzen die gleiche Normalform.

Definition 2.2 Zwei Körperelemente $a, a' \in K \setminus \{0\}$ heißen quadratisch äquivalent, wenn es ein Element $b \in K \setminus \{0\}$ gibt, sodass $a' = a \cdot b^2$.

Beispiel:

1. Für $K = \mathbb{C}$ ist jede Zahl $a \neq 0$ mit 1 quadratisch äquivalent:

$$a = 1 \cdot (\sqrt{a})^2$$

also Normalform:

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 &= 0 \\ (x_0 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

n	Gleichung	r	Bezeichnung
1	$x_0^2 = 0$	1	Doppelpunkt
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	Punktepaar
2	$x_0^2 = 0$	1	Doppelgerade
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	Geradenpaar
	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	regulärer Kegelschnitt
3	$x_0^2 = 0$	1	Doppelebene
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	Ebenenpaar
	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	Kegel
	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	4	reguläre Quadrik

Satz 2.4 In P^n über \mathbb{C} gibt es genau $(n+1)$ verschiedene Klassen von projektiväquivalenten Quadriken. Der Rang einer Matrix einer Quadrikgleichung ist die einzige individuelle Größe der Normalform.

Bezeichnung:

- Rang einer Quadrik: Für $r = n + 1$ reguläre Quadrik, für $r < n + 1$ singuläre Quadrik

Beispiel:

1. Für $K = \mathbb{R}$ gelten $a = 1 \cdot (\sqrt{a})^2$ für $a > 0$ bzw. $a = -1 \cdot (\sqrt{a})^2$ für $a < 0$, also ist jede symmetrische $(n + 1, n + 1)$ -Matrix kongruent zu

$$\begin{pmatrix} E_m & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad m + l + k = n + 1$$

n	Gleichung	Rang	m	l	Bezeichnung
1	x_0^2	1	1	0	Doppelpunkt
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	2	0	\emptyset
	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	1	1	reelles Punktepaar
2	$x_0^2 = 0$	1	1	0	Doppelgerade
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	2	0	Doppelpunkt
	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	1	1	Geradenpaar
	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	3	0	\emptyset
	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	2	1	regulärer Kegelschnitt

Für $n=3$:

$$\begin{pmatrix} E_3 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_2 & \\ & -E_2 \end{pmatrix}$$

dualer bzw. ringartiger Typ einer regulären Quadrik

Für $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} E_4 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_3 & \\ & -E_2 \end{pmatrix}$$

2 Typen regulärer Quadriken in $P^4(\mathbb{R}^5)$

Satz 2.5 (Trägheitssatz von Sylvester) In der Normalform

$$x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_{m+l}^2$$

mit $r = m + l$ einer quadratischen Form $\varrho : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind die Anzahlen m, l der Koeffizienten 1, -1 gegen reguläre lineare Transformationen invariant.

Beweis:

- (indirekt) Betrachte die quadratische Form

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} =: \varrho(x)$$

mit $r = \text{Rang } A$ und $A = A^T$. Des weiteren $\underline{x} = T \cdot \underline{y}$, $\underline{x} = T' \cdot \underline{y}'$ mit $\text{Rang } T = \text{Rang } T' = n$ reguläre Transformationen, sodass

$$\begin{aligned} \varrho & : y_1^2 + \dots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - \dots - y_r^2 \text{ für Transformation } T \\ \varrho & : y_1'^2 + \dots + y_{m'}^2 - y_{m'+1}'^2 - \dots - y_r'^2 \text{ für Transformation } T' \end{aligned}$$

mit (o.B.d.A) $m > m'$ gelten. Betrachte homogenes lineares Gleichungssystem mit $(m+n-m')$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \dots, y_m = 0 && m \text{ Gleichungen} \\ y_{m'+1}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \dots, y'_r = 0 && n-m' \text{ Gleichungen} \end{aligned}$$

Wegen $n + m - m' < n$ folgen nichttriviale Lösungen x_1, \dots, x_n , also existiert $y'_i \neq 0$ mit $i \in \{1, \dots, m'\}$.

$$\begin{aligned} \varrho(\underline{x}) &= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = \underbrace{y_1^2 + \dots + y_m^2}_0 - y_{m+1}^2 - \dots - y_r^2 \leq 0 \\ \varrho(\underline{x}) &= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = y_1'^2 + \dots + y_{m'}'^2 - \underbrace{y_{m'+1}'^2 - \dots - y_r'^2}_0 < 0 \end{aligned}$$

Widerspruch! Analog für $m > m'$. Also $m = m'$.

3.3 Affine Quadriken

Sei \mathcal{A}^n ein affiner Raum mit zugehörigen Vektorraum V^n der Dimension n über Körper K mit $\text{char } K \neq 2$. Wähle in \mathcal{A}^n einen Ursprung $u \in \mathcal{A}^n$.

Definition 3.1 Sei $\varrho : V^n \rightarrow K$ (von Nullform verschieden) eine quadratische Form und $f : V^n \rightarrow K$ eine Linearform und $b \in K$. Die Punktmenge $\Phi \subset \mathcal{A}^n$,

$$\Phi(\varrho, f, b) := \{x \in \mathcal{A}^n : \varrho(x - u) + 2f(x - u) + b = 0\}$$

heißt affine Hyperquadrik.

Bezeichnung:

- $\varrho(x - u) + 2f(x - u) + b$ heißt quadratische Funktion.
- $\varrho(x - u) + 2f(x - u) + b = 0$ heißt Gleichung der Quadrik
- $\Phi \subset \mathcal{A}^2$: affiner Kegelschnitt

Bemerkung:

- Für $k \in K \setminus \{0\}$ und $\varrho' = k \cdot \varrho$, $f' = k \cdot f$, $b' = k \cdot b$ beschreibt

$$\varrho'(x - u) + 2f'(x - u) + b' = 0$$

die selbe Quadrik. Die quadratische Gleichung von $\Phi(\varrho, f, b)$ ist bis auf Proportionalitäten bestimmt.

Koordinatendarstellung

- Sei in \mathcal{A}^n ein affines Koordinatensystem $\{u, b_1, \dots, b_n\}$ mit $b_i \in \mathcal{A}^n$ für $i = 1, \dots, n$, so lässt sich Φ beschreiben:

$$\Phi : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + b = 0$$

(bzgl. des Koordinatensystems $\{u, b_1, \dots, b_n\}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$, $a_{ij} = a_{ji}$),

$$\Phi : \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} + 2\underline{a}^T \cdot \underline{x} + b = 0$$

Setze $\tilde{x} = (1, x)^T$, dann lässt sich Φ schreiben als

$$(1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} b & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{x}^T \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{x} = 0$$

(Matrixschreibweise, erweiterte Darstellung, $\tilde{A} = \tilde{A}^T$)

Satz 3.1 Der Begriff „Quadrik“ ist affin invariant, d.h. er geht unter Affinitäten in Quadrik über.

Beweis:

- Untersuche Verhalten unter Affinität $\alpha : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ mit

$$\underline{x}' \mapsto T \cdot \underline{x}' + \underline{t} =: \underline{x}$$

und Rang $T = n$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} + 2\underline{a}^T \cdot \underline{x} + b \\ &= (T \cdot \underline{x}' + \underline{t})^T \cdot A \cdot (T \cdot \underline{x}' + \underline{t}) + 2\underline{a}^T \cdot (T \cdot \underline{x}' + \underline{t}) + b \\ &= \underline{x}'^T \cdot \underbrace{T^T \cdot A \cdot T}_{=: A'} \cdot \underline{x}' + \underline{t}^T \cdot A \cdot T \cdot \underline{x}' + (T \cdot \underline{x}')^T \cdot A \cdot \underline{t} + \\ &\quad \underline{t}^T \cdot A \cdot \underline{t} + 2\underline{a}^T \cdot T \cdot \underline{x}' + 2\underline{a}^T \cdot \underline{t} + b \\ &= \underline{x}'^T \cdot A' \cdot \underline{x}' + 2 \underbrace{(\underline{t}^T \cdot A + \underline{a}^T)^T}_{=: \underline{a}'^T} \cdot \underline{x}' + \underbrace{(\underline{t}^T \cdot A + 2\underline{a}^T)}_{=: b'} \cdot \underline{t} + b \end{aligned}$$

mit $A' := T^T \cdot A \cdot T$ kongruent zu A (also ranggleich) und $A' = (A')^T$.

Bemerkung:

- Zum Beweis für erweiterte Schreibweise: Schreibe $\underline{x}' \mapsto T \cdot \underline{x}' + \underline{t}$ als

$$\tilde{\underline{x}}' := \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x}' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ \underline{t} & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x}' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \tilde{\underline{x}}$$

Satz 3.2 Unter α geht die erweiterte Darstellung von Φ , $\tilde{\underline{x}} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{\underline{x}} = 0$ über in $\tilde{\underline{x}}' \cdot \tilde{A}' \cdot \tilde{\underline{x}}' = 0$, \tilde{A} geht über in eine kongruente symmetrische Matrix \tilde{A}' . Es gilt: Rang $\tilde{A} = \text{Rang } \tilde{A}'$. (Zweite Aussage gilt nach Beweis von Satz 3.1 auch für A)

Definition 3.2 Zwei Quadriken heißen affinäquivalent, falls sie durch eine Affinität auseinander hervorgehen, d.h. $\alpha(\Phi) = \Phi'$.

Zwei Quadriken heißen affinäquivalent, falls sie durch eine (inhomogene) reguläre Koordinatentransformation und Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$ auseinander hervorgehen.

Klassifikation bzgl. Rang $A = r$ und Rang $\tilde{A} = \tilde{r}$: Es gilt:

$$r \leq \tilde{r} \leq r + 2$$

Damit drei Typen:

1. $r = \tilde{r}$ ($1 \leq r \leq n$): kegelige Quadrik
2. $r + 1 = \tilde{r}$ ($1 \leq r \leq n$): Mittelpunktquadrik
3. $r + 2 = \tilde{r}$ ($1 \leq r \leq n - 1$): parabolische Quadrik

Normalform(konstruktiv)

- Mit Satz 1.2 folgt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} b & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{nn} = \begin{cases} a_{ii} & i \leq r \\ 0 & i > r \end{cases}$$

$$\tilde{\underline{x}}^T \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{\underline{x}} = 0$$

also

$$a_{11} \cdot x_1^2 + \dots + a_{rr} \cdot x_r^2 + 2a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + b = 0$$

(nur rein quadratische Glieder im quadratischen Teil)

- Wähle Transformation

$$\begin{aligned} x_i &= \hat{x}_i - a_i \cdot a_{ii}^{-1} & i = 1, \dots, r \\ x_i &= \hat{x}_i & i = r + 1, \dots, n \end{aligned}$$

dann folgt mit

$$a_{ii} \cdot (\hat{x}_i - a_i \cdot a_{ii}^{-1})^2 + 2(\hat{x}_i - a_i \cdot a_{ii}^{-1}) \cdot a_i = a_{ii} \cdot \hat{x}_i^2 - a_i^2 \cdot a_{ii}^{-1}$$

die Gleichung

$$a_{11} \cdot \hat{x}_1^2 + \dots + a_{rr} \cdot \hat{x}_r^2 + 2a_{r+1} \cdot \hat{x}_{r+1} + \dots + 2a_n \cdot \hat{x}_n + \hat{b} = 0$$

Drei Fälle:

1. Typ 1 ($r = \tilde{r}$): $a_{r+1} = \dots = a_n = \hat{b} = 0$:

$$a_{11} \cdot x_1^2 + \dots + a_{rr} \cdot x_r^2 = 0$$

2. Typ 2 ($r + 1 = \tilde{r}$): $a_{r+1} = \dots = a_n = 0, \hat{b} \neq 0$:

$$a_{11} \cdot x_1^2 + \dots + a_{rr} \cdot x_r^2 + 1 = 0$$

3. Typ 3 ($r + 2 = \tilde{r}$): Es existiert $a_j \neq 0$ für $j \in \{r + 1, \dots, n\}$, o.B.d.A. $j = r + 1$.
Zusätzliche Transformation

$$x_{r+1} = a_{r+1} \cdot \hat{x}_{r+1} + \dots + a_n \cdot \hat{x}_n + \frac{\hat{b}}{2}$$

Dann:

$$a_{11} \cdot x_1^2 + \dots + a_{rr} \cdot x_r^2 + 2x_{r+1} = 0$$

Satz 3.3 Affgleiche Quadriken besitzen diesselbe Normalform. (Folgt aus Satz 3.2)

Beispiel:

1. $K = \mathbb{C}$: Normalform für Quadriken in \mathcal{A}^n :

- (a) $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$
- (b) $x_1^2 + \dots + x_r^2 + 1 = 0$
- (c) $x_1^2 + \dots + x_r^2 + 2x_{r+1} = 0$

2. Für $K = \mathbb{R}$:

- (a) $x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - x_r^2 = 0$
- (b) $x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0$

$$(c) \quad x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - x_r^2 + 2x_{r+1} = 0$$

Speziell n=2:

Typ	Gleichung	r	\tilde{r}	m	l	Bezeichnung
a)	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2	2	2	0	reeller Punkt
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2	2	1	1	Paar schneidender Geraden
	$x_1^2 = 0$	1	1	1	0	Doppelgerade
b)	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	2	3	2	0	\emptyset
	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	2	3	1	1	Hyperbel
	$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	2	3	0	2	Ellipse
	$x_1^2 + 1 = 0$	1	2	1	0	\emptyset
	$-x_1^2 + 1 = 0$	1	2	0	1	Geradenpaar
c)	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	1	3	1	0	Parabel

3.4 Quadriken im \mathbb{R}^n

- Im Folgenden fasse \mathbb{R}^n auf als euklidischen Raum, in dem das natürliche Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt ist.
- Betrachte die quadratische Funktion

$$x \mapsto \varrho(x) + 2g(x) + b$$

mit $\varrho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quadratische Form, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Linearform ($g(x) = \langle a, x \rangle$) und $b \in \mathbb{R}$.

- Sei $\sigma_\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die zu ϱ gehörende symmetrische Bilinearform mit der Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = A^T$ bzgl. des kanonischen Koordinatensystems. Offenbar gilt:

$$\sigma_\varrho : \langle y, f(x) \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

für die zu A zugeordnete lineare Abbildung f (selbstadjungiert). Nach Satz 4.3 bzw. 4.4 aus Kapitel 1 existiert zu f eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren mit b_1, \dots, b_m zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ und b_{m+1}, \dots, b_r zu Eigenwerten $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r < 0$. Also existiert S mit $S^{-1} = S^T$ mit

$$D = S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

(Hauptachsentransformation) Wähle B so, dass $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle a, x \rangle$ mit $\langle a, b_j \rangle = 0$ für $j = r + 1, \dots, n - 1$ entsprechend affiner Klassifikation gilt. Also:

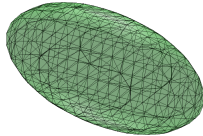
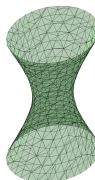
1. Hauptachsentransformation
2. Quadratische Ergänzung (Translation)
3. Falls noch vorhandene Variablen quadratisch vorkommen, können beide Seiten der Gleichung geteilt werden, sodass die Konstante 0 oder 1 ist.
Falls es eine Variable gibt, die nur linear vorkommt, können diese Variablen zusammengefasst werden und dann geteilt.

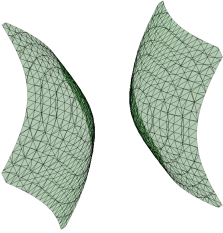
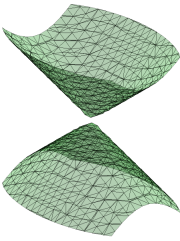
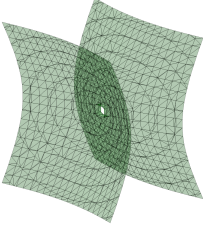
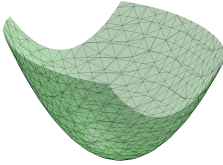
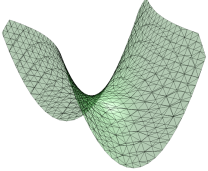
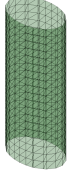
Beispiele:

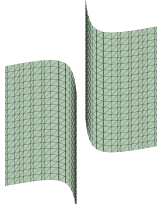
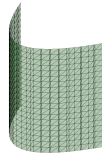
1. Für $n = 2$:

Gleichung	Bezeichnung	Merkmale
$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 0$	\emptyset	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse	a,b: Halbachsenlängen a=b: Kreis
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel	a,b: Halbachsenlängen a=b: gleichseitige Hyperbel
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	Paar paralleler Geraden	
$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Paar schneidender Geraden	
$y^2 = 0$	Doppelgerade	

2. Für $n = 3$:

Gleichung	Bezeichnung
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Ellipsoid
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ einschaliges Hyperboloid

Gleichung	Bezeichnung
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ zweischaliges Hyperboloid
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ elliptischer Kegel
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ elliptischer Kegel (?) [Keine Normalform!]
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ elliptisches Paraboloid
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ hyperbolisches Paraboloid
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elliptischer Zylinder

Gleichung	Bezeichnung
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbolischer Zylinder
	$y^2 = 2px$ parabolischer Zylinder

Einbettung in $\overline{\mathcal{A}^n}$

- Betrachte $(\mathcal{A}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $\mathcal{A}^n = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ natürliches Skalarprodukt, des weiteren die Einbettung von \mathcal{A}^n in den projektiv abgeschlossenen (euklidischen) $\overline{\mathcal{A}^n} := P^n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ vermöge

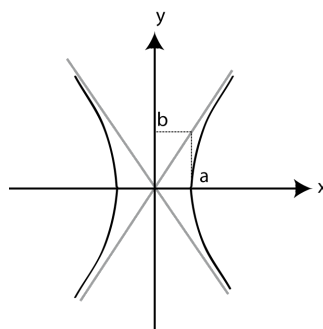
$$\varepsilon : \mathcal{A}^n \rightarrow \overline{\mathcal{A}^n} : x \mapsto (1 : x)^T$$

(vgl. Satz 4.1 in Kapitel 2)

- Jede quadratische Form $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt eine quadratische Form $\tilde{\varrho} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ und umgekehrt (erweiterte Darstellung). Dabei geht die affine Quadrik $\Phi(\lambda)$ über in die eigentliche Punktmenge einer projektiven Quadrik $\psi(\tilde{\varrho})$. Umgekehrt erhält man aus $\psi(\tilde{\varrho})$ unter Wegfall der uneigentlichen Punkte (in Fernhyperebene) $\Phi(\lambda)$.

Beispiele:

1. Hyperbel $\subset \mathbb{R}^2$:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \neq 0)$$

Projektiv eingebettet: regulärer Kegelschnitt ψ

$$a^2 \cdot b^2 \cdot x_0^2 - b^2 \cdot x_1^2 + a^2 \cdot x_2^2 = 0$$

mit uneigentlichen Punkten

$$U_{1/2} = [u_{1/2}] = [(0, a, \pm b)^T]$$

2. Parabel $\subset \mathbb{R}^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

Projektiv eingebettet: regulärer Kegelschnitt $\psi \subset \overline{\mathbb{R}^2}$,

$$x_1^2 + 2a^2 \cdot x_0 \cdot x_2 = 0$$

mit uneigentlichen Punkten

$$U = [u] = [(0, 0, 1)^T]$$

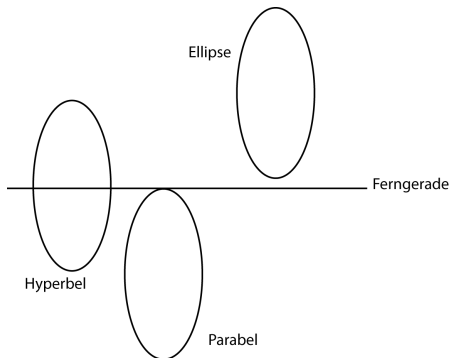
3. Ellipse $\subset \mathbb{R}^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Projektiv eingebettet: regulärer Kegelschnitt $\psi \subset \overline{\mathbb{R}^2}$,

$$a^2 \cdot b^2 \cdot x_0^2 - b^2 \cdot x_1^2 - a^2 \cdot x_2^2 = 0$$

ohne uneigentlichen Punkte über \mathbb{R} .



Nach Einbettung in projektiv abgeschlossene Ebene über \mathbb{C} :

$$[u_{1/2}] = [(0, a, \pm b)^T]$$

für Ellipse. Jeder Kreis in \mathbb{R}^2 enthält unabhängig von seiner Lage und seinem Radius nach projektiver Erweiterung und Einbettung in \mathbb{C} die uneigentlichen Punkte

$$[u_{1/2}] = [(0, 1, \pm i)^T]$$

bezogen auf das gewählte Koordinatensystem („absolute Kreispunkte“).

Satz 4.1 (Geradenscharen auf dem einschaligen Hyperboloid bzw. hyperbolischen Paraboloid) Seien $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ einschaliger Hyperboloid, $\psi \subset \mathbb{R}^3$ hyperbolisches Paraboloid. Es gelten:

1. Durch jeden Punkt von Φ (ψ) verlaufen genau zwei Geraden, die in Φ (ψ) enthalten sind.
2. Die Menge der Geraden auf Φ (ψ) kann in zwei Teilmengen G, G' zerlegt werden, sodass durch jeden Punkt von Φ (ψ) genau eine Gerade aus jeder Schar verläuft.

Ferner gilt:

- Je zwei Geraden $g_1, g_2 \in G$ bzw. $g'_1, g'_2 \in G'$ sind zueinander windschief.
- Je zwei Geraden $g \in G, g' \in G'$ schneiden sich oder sind parallel.

Beweis: (hier für einschaligen Hyperboloid)

- Verwende Koordinatentransformation, sodass Φ in Normalform:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \quad (a, b, c \neq 0) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{y^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

Damit die zu ermittelnden Geradenscharen als Schnitt zweier Hyperebenen:

- G: Es existiert λ mit

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad (1)$$

$$\lambda \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (2)$$

- G': Es existiert μ mit

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (3)$$

$$\mu \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad (4)$$

(für feste λ, μ : Geraden als Schnitt von Ebenen)

- Seien $g_1(\lambda_1), g_2(\lambda_2) \in G$. Dann gilt mit (1):

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \lambda_1 \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \lambda_2 \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

Entsprechend aus (2):

$$\lambda_2 \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Außerdem gilt für $g_2(\lambda_2)$ aus (1) und (2):

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \lambda_2 \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \lambda_2 \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \left(1 - \frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

Also muss gelten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$ für Schnittpunkt.

- Seien $g(\lambda) \in G, g'(\mu) \in G'$. Dann folgt aus (1)=(3):

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) &= \mu \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{y}{b} &= \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \quad (\lambda \neq -\mu)\end{aligned}$$

in (1):

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \frac{1 + \lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} \\ \frac{z}{c} &= \frac{\lambda \cdot \mu - 1}{\lambda + \mu}\end{aligned}$$

Für $\lambda = -\mu$ folgt aus (3),(4):

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \lambda \cdot \left(\frac{y}{b} - 1\right) \\ \lambda \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= -1 - \frac{y}{b}\end{aligned}$$

Vgl. mit (1),(2): $g \parallel g'$.

- Jeder Punkt in Φ liegt genau auf einer $g \in G, g' \in G'$ (Einsetzen, lineares Gleichungssystem für λ, μ). Damit folgt, dass Φ durch eine Schar vollständig erzeugt wird.

Satz 4.2 Sei Φ einschaliges Hyperboloid, ψ hyperbolisches Paraboloid.

1. Je zwei Tripel windschiefer Geraden mit linear unabhängigen Richtungsvektoren sind affinäquivalent.

Die Vereinigung der Menge aller Geraden, die drei paarweise windschiefe Geraden trifft, ist ...

- ... Φ , falls die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.
 - ... ψ falls die Richtungsvektoren linear abhängig sind.
2. Es gibt eine Schar von Affinitäten, welche jede Gerade aus den beiden Geradenscharen kongruent abbildet, d.h. die Einschränkung auf jeder der Geraden aus G und G' ist eine Kongruenzabbildung (bewegliches Stangenmodell).

Beweis:

1. Nach Satz 4.1.1 liegt jeder Punkt von Φ auf genau einer Geraden aus G und G' , also ist Φ durch eine Schar beschrieben. Durch beliebigen Punkt $x \in g$ ($g \in G$) verläuft genau eine Gerade $g' \in G'$, die alle Geraden $g \in G$ schneidet:

- Existenz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + \mu)^2} = 1 \quad (\lambda \neq -\mu)$$

- Eindeutigkeit: Falls zwei Geraden existieren, können diese nicht windschief sein.

Φ als Menge aller Treffgeraden von drei paarweise verschiedenen Geraden eindeutig festgelegt.

2. Übung

Schnitte einer Quadrik im \mathbb{R}^3 mit einer Schar paralleler Geraden

- Sei $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ ein Ellipsoid oder einschaliges Hyperboloid oder zweischaliges Hyperboloid oder eine Kegelfläche mit Rang $A = 3, A \neq \emptyset, A \neq \text{Punkt}$.
- Betrachte Schnitt von Φ mit Schar paralleler Ebenen ε_a ,

$$\{\underline{x} : \langle \underline{x}, \underline{u} \rangle = a\}$$

mit $\|\underline{u}\| = 1$ fest. Durch kongruente Verlagerung kann erreicht werden, dass

$$\underline{u} = \underline{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

ist und dass $\Phi \cap \varepsilon_0$ (neue x-y-Ebene) in Normalform ist.

- 1. Fall:

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2a_{13} \cdot xz + 2a_{23} \cdot yz + 2a_3 \cdot z + b = 0$$

mit $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ (wegen gewählten Φ)

- 2. Fall:

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2a_{13} \cdot xz + 2a_{23} \cdot yz + 2a_2 \cdot y + 2a_3 \cdot z = 0$$

mit $a_{11} \neq 0, a_{33} - a_{23}^2 \neq 0$

- zum 1. Fall: Setze $z=a$:

$$0 = a_{11} \cdot \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot a\right)^2 + a_{22} \cdot \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + \underbrace{\left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}\right)}_{b'} \cdot a^2 + 2a_3 \cdot a + b$$

Quadrik in $z=a$. Es sind möglich:

- (homothetische) Ellipsen für $a_{11} \cdot a_{22} > 0, a_{22} \cdot b' > 0$
 - Punkt für $a_{11} \cdot a_{22} > 0, b' = 0$
 - \emptyset für $a_{11} \cdot a_{22} > 0, a_{22} \cdot b' > 0$
 - Hyperbeln mit festem Öffnungswinkel der Asymptote für $a_{11} \cdot a_{22} < 0, b' = 0$
 - Paar schneidender Geraden mit gleichem Winkelmaß für $a_{11} \cdot a_{22} < 0, b' = 0$
- zum 2. Fall: Setze $z=a$:

$$0 = a_{11} \cdot x^2 + a_{13} \cdot ax + (a_{33} \cdot a^2 + 2a_3 \cdot a) + 2(a_{23} \cdot a + a_2) \cdot y$$

Quadrik in $z=a$. Es sind möglich:

- Parabeln für $a_{23} \cdot a + a_2 \neq 0$
- Paar paralleler Geraden für $a_{23} \cdot a + a_2 = 0$, quadratischer Rest besitzt 2 positive Lösungen
- 1 Geraden für $a_{23} \cdot a + a_2 = 0$, quadratischer Rest besitzt 1 positive Lösung
- \emptyset für $a_{23} \cdot a + a_2 = 0$, quadratischer Rest besitzt keine positiven Lösungen

Satz 4.3

1. Φ Kegelfläche. Dann ist $\{\Phi \cap \varepsilon_a\}$ mit Schar paralleler Ebenen entweder
 - Schar homothetischer Ellipsen bzw. 1 Punkt
 - Schar von Parabeln bzw. eine Gerade
 - Schar von Hyperbeln mit festem Winkel ihrer Asymptoten bzw. ein Paar schneidender Geraden mit gleichem Winkel.
2. Φ Ellipsoid: Schar homothetischer Ellipsen bzw. Punkt bzw. \emptyset
3. Φ einschaliges Hyperboloid. $\{\Phi \cap \varepsilon_a\}$ ist entweder
 - Schar von Hyperpeln bzw. 2 Paare schneidender Geraden
 - Schar von Parabeln bzw. Paar paralleler Geraden
 - Schar homothetischer Ellipsen
4. zweischaliges Hyperboloid: Übungsaufgabe

Bemerkung:

1. Die Mittelpunkte der im Fall 1 beschriebenen Ellipsen

$$M_a = \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot a \quad -\frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot a \quad a \right)$$

liegen auf einer Geraden.

2. Die Scheitel der Parabeln S_a im zweiten Fall

$$S_a = \left(-\frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot a \quad -\frac{a_{33} \cdot a^2 + 2a_3 \cdot a}{2(a_{23} \cdot a + a_2)} + \frac{a_{13}^2 \cdot a^2}{a_{11}} \cdot \frac{1}{2(a_{23} \cdot a + a_3)} \quad a \right)$$

liegen auf einem Kegelschnitt.

3. Ist Φ speziell eine Drehkegelfläche mit halbem Öffnungswinkel α , dann ist $\Phi \cap \varepsilon$:

- Ellipse bzw. Punkt für $\beta > \alpha$
- Parabel bzw. Doppelgerade für $\beta = \alpha$
- Hyperbel bzw. schneidendes Geradenpaar für $\beta < \alpha$

mit β als Winkel zwischen Drehachse und Ebene. (Führt zur Figur von Dandelin)

Satz 4.4 Auf den Quadriken $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ mit Φ als Ellipsoid, einschaliges (zweischaliges) Hyperboloid, elliptisches Paraboloid, elliptischer Zylinder, elliptischer Kegel, aber nicht drehsymmetrisch, existieren zwei Scharen paralleler Kreise, sodass durch jeden Punkt $x \in \Phi$ genau ein Kreis jeder Schar verläuft.

Beweis: (Hier für Ellipsoid)

- Φ wird beschrieben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit $a < b < c$ als Halbachsenlängen. Betrachte $\Phi \cap x$ -z-Ebene ($y = 0$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

also Ellipse mit Halbachsenlängen a, c um 0.

- Der Kreis um 0 in $y = 0$ mit Radius b schneidet die Ellipse in 4 Punkten $\pm \underline{u}, \pm \underline{v}$. Der Schnitt des Ellipsoids Φ mit jeder Ebene ε , welche die y -Achse und ein Paar dieser Schnittpunkte enthält, ist eine Ellipse, für die gilt:

$$\|\underline{u}\| = b = \|b \cdot e_2\| \quad \langle \underline{u}, e_2 \rangle > 0$$

Sie ist symmetrisch bzgl. der Gerade durch 0 in Richtung \underline{u} , daher ein Kreis. Nach Satz 4.3 existieren 2 Scharen von Kreisen.

Satz 4.5 Die beiden Scharen von Kreisen auf den Quadriken $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ in Satz 4.4 sind beweglich, d.h. es gibt eine einparametrische Familie von Affinitäten, welche jeden Kreis der beiden Scharen kongruent (isometrisch) abbildet (bewegliches Modell).

Beweis: Übung

4

Flächen und Kurven

4.1 Elementare Kurven

Beispiel: Kurven in \mathbb{R}^2 (E^2)

1. Graph einer Funktion $y = f(x)$,

$$c = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b\}$$

2. (implizite) Gleichung $F(x, y) = 0$ mit $(x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2$

$$c = \{(x, y) \in B; F(x, y) = 0\}$$

speziell: Nullstellenmenge eines Polynoms (algebraische Kurven)

$$F_n(x, y) := \sum_{i,k} a_{ik} \cdot x^i \cdot y^k$$

mit $n := \max(i + k)$ für $a_{ik} \neq 0$. n heißt Ordnung von c_n .

- $n=1$: Gerade
 - $n=2$: Kegelschnitt
 - $n=3$: Kubik
3. Parametrisierte Darstellung $\underline{x} = \underline{x}(u) = (x(u), y(u))^T$ mit $u \in U \subseteq \mathbb{R}$ offen (u : Kurvenparameter),

$$c = \{(x(u), y(u)) \in \mathbb{R}^2; u \in U\}$$

Definition 1.1 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf dem offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$,

$$u \mapsto \underline{x}(u) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}$$

\underline{x} heißt stetig differenzierbar von der Ordnung k , falls es für alle Koordinatenfunktionen gilt ($x_i \in C^k((a, b))$). \underline{x} heißt stückweise differenzierbar, falls $x_i(u)$ stückweise differenzierbar sind ($i = 1, \dots, n$).

Definition 1.2 Ein Kurvenstück ist eine (stetige) Abbildung der Differenzierbarkeitsklasse C^k ($k \geq 0$) über einem offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Eine Kurve ist die Vereinigung von Kurvenstücken.

Bemerkungen:

1. Eine Kurve ist ihrer Natur nach eine Abbildung, sie ist von der durch sie beschriebenen Punktmenge, dem Träger der Kurve, zu unterscheiden. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt durch \underline{x} parametrisiert, falls $I \subset \mathbb{R}$ offen existiert, sodass $\underline{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurvenstück mit $\underline{x}(I) = S$.
2. In der Differentialgeometrie wird oft folgende Definition verwendet: Eine parametrisierte Kurve ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung.

Geschwindigkeit und Tangente:

Beispiele:

1. Kreis c um 0 mit Radius r

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} & r \in \mathbb{R}^+, t \in [0, 2\pi) \\ \underline{\dot{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit $\underline{\dot{x}}(t) \perp \underline{x}(t)$ für alle $t \in [0, 2\pi)$. Bahngeschwindigkeit:

$$\|\underline{\dot{x}}(t)\| = r$$

Tangente:

$$\underline{y}(\lambda) = \underline{x}(t) + \lambda \cdot \underline{\dot{x}}(t) \quad t \in [0, 2\pi)$$

2. Ellipse um 0 mit Halbachsenlängen a, b

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Tangente (über Polarsystem):

$$(1 \quad x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} -a^2 \cdot b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

also

$$b \cdot \cos t \cdot x + a \cdot \sin t \cdot y - ab = 0$$

Geschwindigkeit:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

Bahngeschwindigkeit:

$$\|\underline{\dot{x}}(t)\| = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t}$$

3. Schraubenlinie c

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$$

mit $p \neq 0$ fest. Es gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2 t + r^2 \cdot \sin^2 t = r^2$$

Also liegt für alle t der Grundriss von $\underline{x}(t)$ in der xy -Ebene auf Kreis $k(0, r)$. Außerdem:

$$z(t) = p \cdot t$$

lineare Funktion von t . Der Proportionalitätsfaktor heißt Schraubparameter. Damit:

$$\underline{y}(t) = r \cdot \sin t = r \cdot \sin \left(\frac{z}{p} \right)$$

Kurvensekante in $\underline{x}(t_0) =: \underline{x}_0$:

$$\underline{y} = \underline{x}_0 + \lambda \cdot (\underline{x}(t) - \underline{x}_0) \quad t = t_0 + h$$

Kurventangente in \underline{x}_0 mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t_0 + h) - \underline{x}_0}{h} =: \frac{d}{dt} \underline{x}(t) \Big|_{t=t_0} =: \dot{\underline{x}}(t_0) = \dot{\underline{x}}_0$$

Damit Kurventangente

$$\underline{y} = \underline{x}_0 + \lambda \cdot \dot{\underline{x}}_0$$

für $\dot{\underline{x}}_0 \neq 0$.

Definition 1.3 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit $\underline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. Dann ist die Geschwindigkeitskurve von \underline{x} die durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung. Die vermöge

$$v(t) := \|\dot{\underline{x}}(t)\|$$

definierte Abbildung heißt Bahngeschwindigkeit. Für $v(t_0) \neq 0$ heißt $\underline{x}(t_0)$ regulär ($\dot{\underline{x}}(t_0) \neq 0$), falls $v(t_0) = 0$ heißt $\underline{x}(t_0)$ singular ($\dot{\underline{x}}(t_0) = 0$). Gilt $v(t) \neq 0$ für alle t , dann heißt $\underline{x}(t)$ regulär.

zu Beispiel 3)

- Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ r \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\dot{\underline{x}}(t)$ geht bei Drehung um z-Achse mit t aus $\dot{\underline{x}}(0) = (0, r, p)^T$ hervor. Alle Tangenten haben den gleichen Neigungswinkel α mit $\tan \alpha = \frac{p}{r}$ gegenüber der x-y-Ebene (Böschungslinien).

$$v(t) = \|\dot{\underline{x}}(t)\| = \sqrt{r^2 + p^2}$$

Definition 1.4 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Ist $\|\dot{\underline{x}}(t)\| = v(t) = 1$ für alle $t \in (a, b)$, so heißt $\underline{x}(t)$ Kurve der Geschwindigkeit eins oder auf Bogenlänge parametrisiert.

zu Beispiel 1)

- Kreis c mit Radius r in \mathbb{R}^2 . Wähle Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \underline{y}(s) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|\underline{y}'(s)\| &= 1 \end{aligned}$$

Definition 1.5 Es seien $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\underline{y} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven. $\underline{y}(u)$ heißt positive (negative) Reparametrisierung von $\underline{x}(t)$, falls es eine differenzierbare Funktion $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ mit $h' > 0$ ($h' < 0$) für alle $c < u < d$ mit

$$\underline{y}(u) = (\underline{x} \circ h)(u)$$

gibt.

Lemma 1 Es sei $\underline{y}(u)$ eine Reparametrisierung von $\underline{x}(t)$. Gilt $\underline{y}(u) = (\underline{x} \circ h)(u)$ mit differenzierbarer Funktion $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$, so folgt:

$$\underline{y}'(u) = \underline{x}'(h(u)) \cdot h'(u)$$

Beweis:

- Seien $\underline{x}(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\underline{y}(t) = (y_1, \dots, y_n)^T$. Es gilt:

$$y_j(u) = x_j(h(u))$$

für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt nach Kettenregel:

$$y_j'(u) = x_j'(h(u)) \cdot h'(u)$$

also folgt die Behauptung.

Definition 1.6 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, die auf $I \supset (a, b)$ definiert ist. Dann ist die Länge der Kurve definiert durch

$$s(a, b) := \int_a^b \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt$$

(Bogenlänge)

Satz 1.2 Es sei $\underline{y}(u)$ eine Reparametrisierung von $\underline{x}(t)$. Dann ist

$$s_{\underline{x}}(a, b) = s_{\underline{y}}(c, d)$$

Beweis:

- Es sei hier zunächst

$$\underline{y}(u) = (\underline{x} \circ h)(u)$$

mit $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ mit $h'(u) > 0$ für alle $u \in (c, d)$. Mit Lemma 1.1 folgt:

$$\begin{aligned}\|y'(u)\| &= \|x'(h(u)) \cdot h'(u)\| = \|x'(h(u))\| \cdot |h'(u)| \\ &= \|x'(h(u))\| \cdot h'(u)\end{aligned}$$

Mit Substitutionsformel der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}s_{\underline{x}}(a, b) &= \int_a^b \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \quad t = h(u) \\ &= \int_c^d \|\dot{\underline{x}}(h(u))\| \cdot h'(u) du \\ &= s_{\underline{y}}(c, d)\end{aligned}$$

Für $\underline{y}(u)$ als negative Parametrisierung, betrachte

$$\lim_{u \rightarrow d} h(u) = a \quad \lim_{u \rightarrow c} h(u) = b$$

Bemerkung:

- Betrachte die reguläre Kurve $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $c \in (a, b)$ fest. Dann

$$s(t) := \int_c^t \|\dot{\underline{x}}(\tau)\| d\tau$$

Bogenlängenfunktion.

Satz 1.3 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^1 -Kurve. Dann existiert eine Reparametrisierung \underline{y} durch die Bogenlänge von \underline{x} .

Beweis:

- Nach Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung erfüllt jede Bogenlängenfunktion $s(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}(t) = \|\dot{\underline{x}}(t)\|$$

\underline{x} ist regulär nach Voraussetzung, also $\|\dot{\underline{x}}\| > 0$ und damit $\dot{s}(t) > 0$. Dem Satz über inverse Funktionen zufolge besitzt $t \mapsto s(t)$ eine Umkehrfunktion $s \mapsto t(s)$ mit

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \|\dot{\underline{x}}(t)\|^{-1} > 0$$

Es folgt:

$$\frac{d}{ds}\underline{x}(t(s)) = \frac{d}{dt}\underline{x}(t) \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\underline{x}} \cdot \|\dot{\underline{x}}(t)\|^{-1}$$

also nach Bogenlänge parametrisiert.

Beispiel:

1. Sei

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ist \underline{x} regulär?

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2t \cdot \cos(t^2) \\ -2t \cdot \sin(t^2) \end{pmatrix}$$

Für $t_0 = 0$: $\|\dot{\underline{x}}(0)\| = 0$, also \underline{x} in 0 nicht regulär. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entstehen zwei reguläre Teilkurven. Für $c = 1$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_1^t \|\dot{\underline{x}}(\tau)\| d\tau \\ &= \int_1^t 2\tau d\tau = [\tau^2]_1^t = t^2 - 1 \quad (t > 1) \\ \Rightarrow t &= \sqrt{s+1} \end{aligned}$$

Damit:

$$\underline{y}(s) = \begin{pmatrix} \sin(s+1) \\ \cos(s+1) \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\underline{x} = \underline{x}(s) = \underline{x}(t(s))$$

heißt natürliche Darstellung, da s eine von der Kurve (Träger) abhängige natürliche Größe ist, d.h. invariant gegenüber Transformation des Koordinatensystems und zulässigen Parametertransformationen.

2. $s(t)$ lässt sich nicht immer explizit berechnen.

4.2 Krümmung und Windung in \mathbb{R}^3

Im Abschnitt 1 sind mit Geschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit und Bogenlänge Größen angegeben, die eine Kurve in 1. Differentialordnung beschreiben. Hier werden Eigenschaften der Kurve von höherer Ordnung besprochen, die nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sein soll.

Höhere invariante Ableitungen:

- Sei $\underline{x} = \underline{x}(s) = \underline{x}(t(s)) \in C^3$ eine reguläre Kurve in \mathbb{R}^3 . Es ist nach Satz 1.3:

$$\frac{dt}{ds} = t'(s) = \langle \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle^{-\frac{1}{2}}$$

Es folgen weiter:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} &= t''(s) = -\frac{1}{2} \langle \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot \langle \ddot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= -\frac{\langle \ddot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle}{\langle \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle^2} \\ \frac{d^3t}{ds^3} &= \frac{4 \langle \dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}} \rangle^2 - \langle \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle \cdot (\langle \ddot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}} \rangle + \langle \dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}} \rangle)}{\langle \dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}} \rangle^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Damit sind:

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \dot{\underline{x}} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\underline{x}}}{\|\dot{\underline{x}}\|} \\ \underline{x}'' &= \ddot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\underline{x}} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{\ddot{\underline{x}}}{\|\dot{\underline{x}}\|^2} - \dot{\underline{x}} \cdot \frac{\langle \dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}} \rangle}{\|\dot{\underline{x}}\|^4} \\ \underline{x}''' &= \ddot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{\underline{x}} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \dot{\underline{x}} \cdot \frac{d^3t}{ds^3} \end{aligned}$$

\underline{x}'' heißt Krümmungsvektor.

- Frenetsches Bezugssystem : Verhafte mit dem Träger in jedem Kurvenpunkt ein Koordinatensystem, dessen Koordinatenachsen geometrisch der Kurve angepasst sind. Für Kurvenpunkt $\underline{x}(s_0)$:

– Tangentenvektor $\underline{x}'(s_0) =: \underline{t}(s_0)$ mit $\langle \underline{x}', \underline{x}' \rangle = 1$. Hieraus folgt:

$$2 \langle \underline{x}', \underline{x}'' \rangle (s_0) = 0$$

– Hauptnormalenvektor:

$$\underline{n}(s_0) := \frac{\underline{x}''}{\|\underline{x}''\|}(s_0)$$

– Binormalenvektor:

$$\underline{b}(s_0) := (\underline{t} \times \underline{n})(s_0)$$

Damit: $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ bilden ein orthonormiertes Bezugssystem in $\underline{x}(s_0)$ mit Schmiegebene

$$\underline{y}(\lambda, \mu) = \underline{x} + \lambda \cdot \underline{t} + \mu \cdot \underline{n} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

und Normalebene

$$\underline{y}(\lambda, \mu) = \underline{x} + \lambda \cdot \underline{n} + \mu \cdot \underline{b} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

und Streckebene

$$\underline{y}(\lambda, \mu) = \underline{x} + \lambda \cdot \underline{b} + \mu \cdot \underline{t} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Bemerkung: Für $\underline{x}''(s_0) = 0$ existiert kein solches begleitendes Bezugssystem.

Definition 2.1 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve der Geschwindigkeit Eins. Wird

$$\kappa(s) := \|\underline{x}''(s)\|$$

gesetzt, so heißt $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von \underline{x} . Kurvenpunkt $\underline{x}(s_0)$ mit $\kappa(s_0) = 0$ heißt Wendepunkt.

Definition 2.2 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve der Geschwindigkeit Eins mit $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in (a, b)$. Die Vektorfelder

$$\begin{array}{ll} \underline{t} : s \mapsto \underline{t}(s) & \text{Tangentialeinheitsvektorfeld} \\ \underline{n} : s \mapsto \underline{n}(s) & \text{Hauptnormalenvektorfeld} \\ \underline{b} : s \mapsto \underline{b}(s) & \text{Binormalenvektorfeld} \end{array}$$

bilden das Frenetsche Bezugssystem $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$.

Satz 2.1 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve der Geschwindigkeit Eins mit $\kappa(s) > 0$ mit für $s \in (a, b)$. Dann gilt:

1. $\|\underline{t}\| = \|\underline{b}\| = \|\underline{n}\| = 1$ und $\langle \underline{t}, \underline{n} \rangle = \langle \underline{t}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{n}, \underline{b} \rangle = 0$.

2. Es gelten die Frenetschen Formeln (Ableitungsgleichungen):

$$\begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

mit $\kappa = \|\underline{x}''\|$. Die Funktion $\tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Windung (Torsion) von \underline{x} mit

$$\tau = \tau(s) = \langle \underline{b}, \underline{n}' \rangle = - \langle \underline{b}', \underline{n} \rangle$$

Beweis:

1. Gilt nach Konstruktion bzw. wegen $\underline{t} \perp \underline{n}$, da

$$\begin{aligned} \|\underline{t}\|^2 &= \langle \underline{t}, \underline{t} \rangle = 1 \\ \Rightarrow \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle &= 0 \end{aligned}$$

2. Multipliziere $\underline{t}', \underline{n}', \underline{b}'$ skalar mit $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle & \langle \underline{n}, \underline{t}' \rangle & \langle \underline{b}, \underline{t}' \rangle \\ \langle \underline{t}, \underline{n}' \rangle & \langle \underline{n}, \underline{n}' \rangle & \langle \underline{b}, \underline{n}' \rangle \\ \langle \underline{t}, \underline{b}' \rangle & \langle \underline{n}, \underline{b}' \rangle & \langle \underline{b}, \underline{b}' \rangle \end{pmatrix}$$

Wegen 1) folgt:

$$\langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle = \langle \underline{n}, \underline{n}' \rangle = \langle \underline{b}, \underline{b}' \rangle = 0$$

Nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= \kappa \cdot \underline{n} \\ \Rightarrow \langle \underline{n}, \underline{t}' \rangle &= \kappa \\ \langle \underline{b}, \underline{t}' \rangle &= \langle \underline{b}, \underline{n} \cdot \kappa \rangle = 0 \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus der Orthogonalität des Bezugssystems:

$$\begin{aligned} \langle \underline{t}', \underline{n} \rangle + \langle \underline{t}, \underline{n}' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle \underline{t}', \underline{n} \rangle &= -\langle \underline{t}, \underline{n}' \rangle \\ \Rightarrow a_{12} &= -a_{21} \end{aligned}$$

Entsprechend $a_{23} = -a_{32}$, $a_{13} = -a_{31}$.

Bemerkung: Berechnung von κ und τ :

1. Parametrisierung nach Bogenlänge s , $\underline{x} = \underline{x}(t(s))$

$$\kappa = \|\underline{x}''\| \quad \tau = \langle -\underline{b}', \underline{n} \rangle$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \underline{t} \times \underline{n} = \underline{x}' \times \frac{\underline{x}''}{\|\underline{x}''\|} = \underbrace{\frac{1}{\|\underline{x}''\|}}_{=: \varrho} \cdot (\underline{x}' \times \underline{x}'') \\ \underline{b}' &= \varrho' \cdot (\underline{x}' \times \underline{x}'') + \varrho \cdot (\underline{x}' \times \underline{x}''') \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \tau &= -\langle \underline{b}', \varrho \cdot \underline{x}'' \rangle \\ &= -\varrho^2 \cdot \det(\underline{x}' \quad \underline{x}''' \quad \underline{x}'') \\ &= \frac{1}{\|\underline{x}''\|^2} \cdot \det(\underline{x}' \quad \underline{x}'' \quad \underline{x}''') \end{aligned}$$

2. Umrechnung auf allgemeine Parameter t:

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{x}} &= \dot{s} \cdot \underline{x}' & \dot{s} &= \|\underline{\dot{x}}\| \\
 \underline{\ddot{x}} &= \ddot{s} \cdot \underline{x}' + \dot{s}^2 \cdot \underline{x}'' \\
 &= \ddot{s} \cdot \underline{t} + \dot{s}^2 \cdot \kappa \cdot \underline{n} \\
 \underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}} &= \dot{s}^3 \cdot \kappa \cdot (\underline{t} \times \underline{n}) \\
 &= \dot{s}^3 \cdot \kappa \cdot \underline{b} \\
 \Rightarrow \kappa &= \frac{\|\underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}}\|}{\|\underline{\dot{x}}\|^3} \\
 \underline{\ddot{\ddot{x}}} &= \ddot{\ddot{s}} \cdot \underline{x}' + \ddot{s} \cdot \dot{s} \cdot \underline{x}'' + 2\dot{s} \cdot \ddot{s} \cdot \underline{x}'' + \dot{s}^2 \cdot \underline{x}''' \cdot \dot{s} \\
 &= \ddot{\ddot{s}} \cdot \underline{x}' + 3\dot{s} \cdot \ddot{s} \cdot \underline{x}'' + \dot{s}^3 \cdot \underline{x}''' \\
 \det(\underline{\dot{x}} \ \underline{\ddot{x}} \ \underline{\ddot{\ddot{x}}}) &= \langle \underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}}, \underline{\ddot{\ddot{x}}} \rangle \\
 &= \langle \dot{s}^3 \cdot \kappa \cdot \frac{\underline{x}' \times \underline{x}''}{\|\underline{x}'\|}, \dot{s}^3 \cdot \underline{x}''' \rangle \\
 &= \dot{s}^6 \cdot \det(\underline{x}' \ \underline{x}'' \ \underline{x}''') \\
 \Rightarrow \tau &= \det(\underline{\dot{x}} \ \underline{\ddot{x}} \ \underline{\ddot{\ddot{x}}}) \cdot \frac{1}{\|\underline{\dot{x}}\|^6 \cdot \kappa^2} \\
 &= \det(\underline{\dot{x}} \ \underline{\ddot{x}} \ \underline{\ddot{\ddot{x}}}) \cdot \frac{1}{\|\underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}}\|^2}
 \end{aligned}$$

Beispiel:

1. Getwistete Kubik

$$\begin{aligned}
 \underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, t &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \\
 s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2 + 9\tau^4} \, d\tau
 \end{aligned}$$

Berechnung in allgemeinem Parameter t günstig.

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{x}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} & \underline{\ddot{x}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix} & \underline{\ddot{\ddot{x}}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}} &= \begin{pmatrix} -6t^2 \\ -6t \\ 2 \end{pmatrix} \\
 \kappa(t) &= \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \\
 \tau &= \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}
 \end{aligned}$$

4.3 Kanonische Entwicklung einer Raumkurve in \mathbb{R}^3

- Sei $\underline{x} = \underline{x}(s) \in C^n$ mit $n \geq 4$ vorausgesetzt. Mit Hilfe der Taylorentwicklung in der Umgebung von $\underline{x}(s_0)$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}(s) &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \cdot \underline{x}^{(k)}(s_0) \cdot (s - s_0)^k + R_3(s) \\
 &= \underline{x}(s_0) + \underline{x}'(s_0) \cdot (s - s_0) + \frac{1}{2} \underline{x}''(s_0) \cdot (s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \underline{x}'''(s_0) \cdot (s - s_0)^3 + R_3(s)
 \end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \underline{x}(s_0) &:= \underline{x}_0 \\ \underline{x}'(s_0) &= \underline{t}(s_0) \\ \underline{x}''(s_0) &= \kappa \cdot \underline{n}(s_0) \\ \underline{x}'''(s_0) &= \kappa' \cdot \underline{n}(s_0) + \kappa \cdot \underline{n}'(s_0) \\ &= \kappa' \cdot \underline{n}(s_0) + \kappa \cdot (-\kappa \cdot \underline{t} + \tau \cdot \underline{b})(s_0) \\ &= (-\kappa^2 \cdot \underline{t} + \kappa' \cdot \underline{n} + \kappa \cdot \tau \cdot \underline{b})(s_0) \end{aligned}$$

Wähle $s_0 = 0$, $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ als angepasstes Koordinatensystem in \underline{x}_0 :

$$\underline{y}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \frac{\kappa^2 \cdot s^3}{6} \\ \frac{1}{2} \kappa \cdot s^2 + \frac{1}{6} \cdot \kappa' \cdot s^3 \\ \frac{1}{6} \cdot \kappa \cdot \tau \cdot s^3 \end{pmatrix} + R_3(s)$$

(kanonische Entwicklung)

Bemerkung:

1. Je zwei der Koordinatenfunktionen beschreiben das Bild des Trägers von \underline{x} in der Schmiegeebene, der Normalebene und Streckebene unter Normalprojektion.

Satz 3.1 Sei $\underline{y}(s)$ die kanonische Entwicklung einer Raumkurve \underline{x} in der Umgebung von \underline{x}_0 , für die $\kappa, \tau \neq 0$ vorausgesetzt sind. Der Normalriss auf die

1. Schmiegeebene besitzt in \underline{x}_0 regulären Punkt mit Tangentenrichtung \underline{t}_0
2. Normalebene besitzt in \underline{x}_0 Spitze 1.Art mit Grenztangente \underline{n}_0
3. Streckebene besitzt in \underline{x}_0 Wendepunkt mit Tangentenrichtung \underline{t}_0

Beweis:

1. Sei

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} =: \underline{r}_1(s)$$

Dann:

$$\begin{aligned} \underline{r}'_1(s) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \cdot \kappa^2 \cdot s^2 \\ \kappa \cdot s + \frac{1}{2} \kappa' \cdot s^2 \end{pmatrix} \\ \underline{r}'_1(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

2. Später
3. Analog (1)

Bemerkung:

1. Wird die Taylorentwicklung nach der k -ten Stelle abgebrochen, so beschreibt das Taylorpolynom k -ter Ordnung eine Näherungskurve $\tilde{\underline{x}}_k$ von \underline{x} in \underline{x}_0 . Eigenschaften:
 - (a) $\tilde{\underline{x}}_1 = \underline{x}_0 + s \cdot \underline{t}_0$ beschreibt Tangente in \underline{x}_0 .
 - (b) $\tilde{\underline{x}}_2 = \underline{x}_0 + s \cdot \underline{t}_0 + \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot s^2 \cdot \underline{n}_0$ beschreibt Kurve mit Träger in Schmiegeebene.
 - (c) Erst in $\tilde{\underline{x}}_3$ taucht τ von \underline{x} in \underline{x}_0 auf, die damit ein Maß für die Abweichung von \underline{x} aus der Schmiegeebene ist.

Satz 3.2 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2 -Kurve. Es gilt $\kappa = 0$ genau dann, wenn $\underline{x}((a, b))$ auf einer Geraden liegt. Es gilt $\tau = 0$ genau dann, wenn $\underline{x}((a, b))$ in einer Ebene liegt.

Beweis:

- Ist $\kappa = 0$, so ist

$$\frac{d}{ds} \underline{t} = 0$$

und somit $\underline{t} = \underline{t}_0 = \text{const.}$ Für beliebigen Parameter u ist

$$\dot{\underline{x}}(u) = v(u) \cdot \underline{t}_0$$

mit Bahngeschwindigkeit v .

$$\underline{x}(u) = \underline{x}_0 + \int_{u_0}^u v(\tau) d\tau \cdot \underline{t}_0$$

also $\underline{x}((a, b)) \subset (\underline{x}_0 + [t_0])$. Die Umkehrung folgt offensichtlich.

- 2. Aussage: siehe Übung

4.4 Ebene Kurven in \mathbb{R}^2

- Betrachte zunächst die Ebene $z=0$ in \mathbb{R}^3 als Trägerebene der zu betrachteten Kurve, d.h. fasse diese als Spezialfall einer Raumkurve auf.
- Parameterdarstellung einer Kurve in $z=0$:

$$\underline{x}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor:

$$\underline{t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{\underline{x}}\|} \cdot \dot{\underline{x}}(u)$$

Normalenvektor (Drehung um $\frac{\pi}{2}$ von $\underline{t}(u_0)$)

$$\underline{n}(u) = \frac{1}{\|\dot{\underline{x}}\|} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{y}(u) \\ \dot{x}(u) \end{pmatrix}$$

- Für die vorzeichenbehaftete Krümmung κ_2 folgt mit $z=0$ aus der Berechnung von κ :

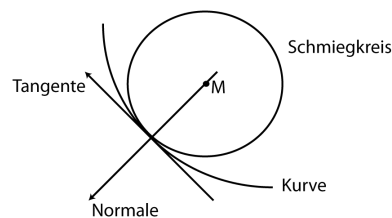
$$\kappa_2(u) := \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\|\dot{\underline{x}}\|^3}(u)$$

Frenet-Ableitungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_2 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix}$$

für $\underline{x} = \underline{x}(s)$ Kurve der Geschwindigkeit Eins.

- Krümmungskreis (Schmiegekreis) einer ebenen Kurve:



Definition 4.1 Sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\kappa_2 \neq 0$ für $u \in (a, b)$. Dann heißt $|\varrho|$ mit

$$\varrho(u) = \frac{1}{\kappa_2}(u)$$

Krümmungsradius,

$$\underline{m} = \underline{x}(u) + \varrho(u) \cdot \underline{n}(u)$$

der Mittelpunkt des Krümmungskreises $k(\underline{m}, |\varrho|)$ zu \underline{x} in u .

Bemerkung:

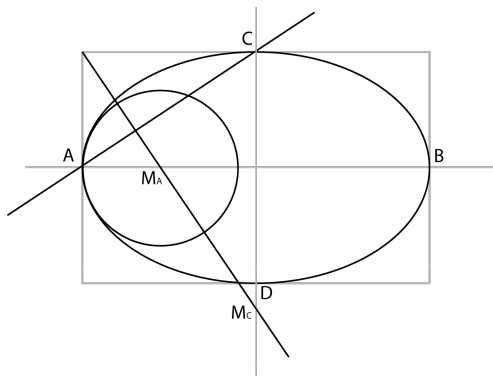
1. Tatsächlich gilt in $u = u_0$:

$$\begin{aligned} k : \underline{r}(\varphi) &= \underline{m}_0 + \varrho_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{\underline{r}}(\varphi) &= -\varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \ddot{\underline{r}}(\varphi) &= \varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \kappa_2(\varphi) &= \frac{\ddot{\underline{y}} \cdot \dot{\underline{x}} - \ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{y}}}{\|\dot{\underline{x}}\|^3} = \frac{1}{|\varrho_0|} \end{aligned}$$

Der Krümmungskreis approximiert die Kurve \underline{x} in u_0 : dieser besitzt die gleiche Tangente, Normale sowie Krümmung κ_2 .

Beispiel:

1. Ellipse: Konstruktion der Krümmungskreise in den Scheiteln



$k_1(M_C, \overline{M_C C})$, $k_2(M_A, \overline{M_A A})$ sind die Krümmungskreise in C, A.

Definition 4.2 Die Menge der Krümmungsmittelpunkte einer regulären ebenen Kurve heißt Evolute c^* . Für $\kappa_2 \neq 0$ lässt sich diese parametrisieren:

$$c^* : \underline{m}(u) = \underline{x}(u) + \frac{1}{\kappa_2(u)} \cdot \underline{n}(u)$$

Lemma 4.1 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $y : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Reparametrisierung von \underline{x} , $\underline{y} = \underline{x} \circ h$ mit $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\kappa_{2,y}(u) = \text{sgn}(h'(u)) \cdot \kappa_{2,x}(h(u))$$

Beweis:

- Es ist

$$\begin{aligned}\underline{y}' &= \underline{x}'(h(u)) \cdot h'(u) \\ \underline{y}'' &= \underline{x}''(h(u)) \cdot h'(u)^2 + \underline{x}'(h(u)) \cdot h''(u)\end{aligned}$$

Somit folgt für $\kappa_{2,\underline{y}}$ mit $\underline{y} = (y_1, y_2)^T$:

$$\begin{aligned}\kappa_{2,\underline{y}} &= \frac{y_1' \cdot y_2'' - y_2' \cdot y_1''}{\|\underline{y}'\|^3} \\ &= \frac{x_1' \cdot h' \cdot (x_2'' \cdot h'(u)^2 + x_2' \cdot h'') - x_2' \cdot h' \cdot (x_1'' \cdot h'^2 + x_1' \cdot h'')}{|h'|^3 \cdot \|\underline{x}'\|^3} \\ &= \frac{x_1'(h(u)) \cdot x_2''(h(u)) - x_2'(h(u)) \cdot x_1''(h(u))}{|h'(u)|^3 \cdot \|\underline{x}'\|^3} \cdot h'(u)^2 \\ &= \operatorname{sgn}(h'(u)) \cdot \kappa_{2,\underline{x}}(h(u))\end{aligned}$$

Satz 4.2 Die Tangenten an \underline{m} fallen mit den Kurvennormalen von \underline{x} zusammen.

Beweis:

- Wegen Lemma 4.1 verwende $\underline{x}(s)$ nach Bogenlänge s , da Evolute unabhängig von der Parametrisierung ist.

$$\begin{aligned}\underline{m}'(s) &= \underline{x}'(s) - \kappa_2(s)^{-2} \cdot \kappa_2'(s) \cdot \underline{n}(s) + \kappa_2^{-1} \cdot \underline{n}'(s) \\ &= \underline{t}(s) - \frac{\kappa_2'(s)}{\kappa_2^2} \cdot \underline{n}(s) - \frac{1}{\kappa_2(s)} \cdot \kappa_2'(s) \cdot \underline{t}(s) \\ &= -\frac{\kappa_2'(s)}{\kappa_2^2(s)} \cdot \underline{n}(s)\end{aligned}$$

Definition 4.3 Eine Parallelkurve \underline{y} zu einer regulären ebenen Kurve $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\underline{y}(u) = \underline{x}(u) + r \cdot \underline{n}(u) \quad (r \neq 0)$$

definiert.

Bemerkung:

- Die Parallelkurven zu einer gegebenen Kurve \underline{x} kann Spitzen aufweisen und muss nicht notwendigerweise den Abstand r zu \underline{x} besitzen.

Lemma 4.3 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve und $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ differenzierbar, dann gilt für die Parallelkurve

$$\underline{y}(\underline{x}, r, u) = \underline{y}(\underline{x} \circ h, \operatorname{sgn}(h'(u)), t)$$

Satz 4.4 Es sei $\underline{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve. Dann berechnet sich die Krümmung der Parallelkurve $\underline{y}(r)$:

$$\kappa_{2,\underline{y}}(u) = \kappa_{2,\underline{x}} \cdot \frac{1}{|1 - r \cdot \kappa_{2,\underline{x}}|}(u)$$

Beweis:

- Sei $\underline{x} = \underline{x}(s)$ eine Kurve der Geschwindigkeit Eins. Mit den Ableitungsgleichungen gilt:

$$\underline{x}'' = \kappa_2 \cdot \underline{n}$$

Für die Parallelkurve zu \underline{x} gilt:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{x} + r \cdot \underline{n} \\ \underline{y}' &= \underline{x}' + r \cdot \underline{n}' \\ &= \underline{x}' + r \cdot (-\kappa_2) \cdot \underline{x}' = \underline{x}' \cdot (1 - r \cdot \kappa_2) \\ \underline{y}'' &= \underline{x}'' \cdot (1 - r \cdot \kappa_2) - r \cdot \underline{x}' \cdot \kappa_2' \\ \Rightarrow \kappa_{2,\underline{y}}(u) &= \frac{y_1' \cdot y_2'' - y_1'' \cdot y_2'}{\|\underline{y}'\|^3}(u) = \dots \\ &= \kappa_{2,\underline{x}} \cdot \frac{1}{|1 - r \cdot \kappa_{2,\underline{x}}|}(u) \end{aligned}$$

4.5 Computergestützter Kurvenentwurf (CAD)

- Aufgabenstellung: klassische Polynominterpolation mit gegebenen (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, n$ paarweise verschiedene Stützstellen
- gesucht: eindeutig bestimmtes Polynom $p(x)$ mit $p(x_i) = y_i$.
- Lösung:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$$

mit

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beachte: Wahl des Koordinatensystems beeinflusst Interpolationsergebnis.

- Hier sollen Sequenzen von Punkten aus \mathbb{R}^3 interpoliert werden. Vorgegeben werden können:
 - Stützpunkte:

$$\underline{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad i = 0, \dots, n$$

- Stütztangentenvektoren:

$$\underline{p}_i^1 = (x_i^1, y_i^1, z_i^1)^T \quad \|\underline{p}_i^1\| = 1$$

- Stützkrümmungsvektoren:

$$\underline{p}_i^2 = (x_i^2, y_i^2, z_i^2)^T \quad \|\underline{p}_i^2\| =: \kappa_i \quad \underline{p}_i^2 \perp \underline{p}_i^1$$

Die Zusammenfassung $(\underline{p}_i, \underline{p}_i^1)$ heißt Stütztangentenelement, $(\underline{p}_i, \underline{p}_i^1, \underline{p}_i^2)$ heißt Stützkrümmungselement.

- Bestimmung einer interpolierenden Vektorfunktion, $\underline{x} = \underline{x}(u)$, sodass zu vorgegebenen $u_0 < \dots < u_n$ gilt:

$$\underline{x}(u_i) = \underline{p}_i \quad i = 0, \dots, n$$

eventuell:

$$\begin{aligned} \underline{x}'(u_i) &= \underline{p}_i^1 \cdot \lambda_i \\ \underline{x}''(u_i) &= \underline{p}_i^2 \cdot \mu_i + \underline{p}_i^1 \cdot \lambda_i \end{aligned}$$

- Bemerkung: Die Wahl der Stützparameter u_i ist im obigen Ansatz geometrisch nicht festgelegt. Es sind jedoch denkbar:

1. äquidistante Parameter $a < u_0 < \dots < u_n < b$ mit $u_j - u_{j-1} = \text{const.}$ für $j = 1, \dots, n$

2. akkumulierte Sehnenlänge:

$$u_i = \sum_{j=1}^i \|\underline{p}_j - \underline{p}_{j-1}\|$$

(chordale Parametrisierung)

3. Soll eine vorhandene reguläre Kurve $\underline{p} = \underline{p}(t)$ mit $\underline{p}_i = \underline{p}(t_i)$ in diesen Punkten interpoliert werden, ist eine Parametrisierung nach Bogenlänge möglich.

$$u_i = s(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} \|\dot{\underline{p}}(\tau)\| d\tau$$

- Damit liegt in jeder Komponente eine klassische Interpolationsaufgabe vor, welche günstigerweise mit dem gleichen Verfahren für alle Komponenten gelöst werden sollten.

Lagrange Interpolationskurve

- gegeben: Stützpunkte \underline{p}_i für $i = 0, \dots, n$ zu Stützstellen u_0, \dots, u_n .
- Die Lagrange-Polynome lauten:

$$L_i^n(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - u_j)}{\prod_{j \neq i} (u_i - u_j)}$$

mit $L_i^n(u_j) = \delta_{ij}$. Wird gesetzt

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \cdot \underline{p}_i$$

erfüllt dies die Interpolationsbedingungen.

- Beispiel:

1. In \mathbb{R}^2 soll interpoliert werden:

u_i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	3	2	3

Lagrange-Polynome:

$$\begin{aligned} L_0^2(t) &= \frac{(t-1) \cdot (t-2)}{2} \\ L_1^2(t) &= -t \cdot (t-2) \\ L_2^2(t) &= \frac{t \cdot (t-1)}{2} \end{aligned}$$

Damit:

$$\underline{x}(t) = \frac{(t-1) \cdot (t-2)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - t \cdot (t-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{t \cdot (t-1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Bemerkung: Das Berechnen einer Lagrange-Interpolationskurve ist für große Anzahlen von Stützstellen nicht zu empfehlen, da
 - Veränderungen eines Stützpunktes die Neuberechnung von allen $L_i^n(t)$ nötig machen
 - starke Oszillationen des Kurvenverlaufs zwischen Stützstellen (die glatten Verlauf suggerieren)

C^r - und G^r -Verbindungen von Kurvenstücken

Betrachtet werden im Folgenden aus Kurvenstücken zusammengesetzte (segmentierte) Kurven. Von besonderem Interesse (für CAD) ist die Gestaltung in einem gemeinsamen Kurvenpunkt.

Definition 5.1 Zwei Kurvenstücken $\underline{x} = \underline{x}(t)$, $\underline{y} = \underline{y}(u)$ bilden im gemeinsamen Punkt $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$ eine C^r -Verbindung, falls $\underline{x} \in C^k$, $\underline{y} \in C^m$, $r = \min\{m, k\}$,

$$\frac{d^l}{dt^l} \underline{x}(t_0) = \frac{d^l}{du^l} \underline{y}(u_0)$$

für alle $l = 0, \dots, r$.

Bemerkung:

- Die Bedingungen in Definition 5.1 sind hinreichend für eine C^r -Verbindung in Umgebung eines Kurvenpunktes $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$, hängen aber von der Parametrisierung ab.

Beispiel:

1. Zwei Viertelkreisböen mit verschiedenem Radius mit gemeinsamen Punkt P, dort gemeinsame Tangente.

$$\begin{aligned} k : \underline{x} = \underline{x}(t) &= b \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ c : \underline{y} = \underline{y}(u) &= (b+e) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} & u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= b \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{\underline{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\underline{y}}(u) &= (b+e) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{\underline{y}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (b+e) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es liegt also für diese Parametrisierung keine C^1 -Verbindung im Punkt P vor. Weiterhin:

$$\begin{aligned} s_k(t) &= b \cdot t \\ s_c(t) &= (b+e) \cdot t \end{aligned}$$

Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$\begin{aligned} (\underline{x} \circ h)(s) &= b \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{b}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{b}\right) \end{pmatrix} \\ (\underline{y} \circ g)(s) &= (b+e) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{b+e}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{b+e}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (\underline{x} \circ h)' \left(\frac{\pi}{2} \cdot b\right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\underline{y} \circ g)' \left(\frac{\pi}{2} \cdot (b+e)\right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit für diese Parametrisierung C^1 -Verbindung in P.

Definition 5.2 Zwei Kurvenstücke $\underline{x} = \underline{x}(t)$, $\underline{y} = \underline{y}(u)$ besitzen in einem gemeinsamen Punkt $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$ eine G^r -Verbindung - sie schließen geometrisch stetig von der Ordnung r aneinander -, falls ihre invarianten Ableitungen nach Bogenlänge bis zur r -ten Ableitung übereinstimmen, d.h.

$$\frac{d^k}{ds_x^k} \underline{x}(t_0) = \frac{d^k}{ds_y^k} \underline{y}(t_0)$$

für $k = 0, \dots, r$.

Beispiel:

1. gegeben: $(A, t_A), (B, t_B)$ mit t_A, t_B als Stütztangenten in A bzw. B. Gesucht: Kreisbögen zu Stütztangentelementen, dass Verbindung dieser G^1 mit t_D und $t_D \parallel AB$.

Für $\underline{x} = \underline{x}(t)$, $\underline{y} = \underline{y}(u)$ die auf allgemeine Parameter bezogen sind, ergeben sich unter Verwendung der invarianten Ableitungen:

Satz 5.1 Zwei Kurven $\underline{x}, \underline{y}$ in \mathbb{R}^3 besitzen im gemeinsamen Punkt $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$

1. eine G^1 -Verbindung genau dann, wenn mit $\alpha > 0$:

$$\underline{\dot{y}}(u_0) = \alpha \cdot \underline{\dot{x}}(t_0)$$

2. eine G^2 -Verbindung genau dann, wenn zusätzlich mit $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\ddot{y}}(u_0) = \alpha^2 \cdot \underline{\ddot{x}}(t_0) + \beta \cdot \underline{\dot{x}}(t_0)$$

3. eine G^3 -Verbindung genau dann, wenn zusätzlich mit $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\dddot{y}}(u_0) = \alpha^3 \cdot \underline{\dddot{x}}(t_0) + 3\alpha\beta \cdot \underline{\ddot{x}}(t_0) + \gamma \cdot \underline{\dot{x}}(t_0)$$

Beweis:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{\dot{x}} \cdot \frac{dt}{ds} = \underline{\dot{x}} \cdot \frac{1}{\|\underline{\dot{x}}\|} \\ \underline{y}' &= \underline{\dot{y}} \cdot \frac{du}{ds} = \underline{\dot{y}} \cdot \frac{1}{\|\underline{\dot{y}}\|} \end{aligned}$$

$\underline{x}, \underline{y}$ besitzen in $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$ eine G^1 Verbindung

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underline{y}'(u_0) &= \underline{x}'(t_0) \\ \Leftrightarrow \underline{\dot{y}}(u_0) &= \underbrace{\frac{\|\underline{\dot{y}}(u_0)\|}{\|\underline{\dot{x}}(t_0)\|}}_{=: \alpha} \cdot \underline{\dot{x}}(t_0) \end{aligned}$$

2. Entsprechend:

$$\begin{aligned} \underline{x}'' &= \frac{\underline{\ddot{x}}}{\|\underline{\dot{x}}\|^2} - \frac{\langle \underline{\dot{x}}, \underline{\ddot{x}} \rangle}{\|\underline{\dot{x}}\|^4} \cdot \underline{\dot{x}} \\ \underline{y}'' &= \frac{\underline{\ddot{y}}}{\|\underline{\dot{y}}\|^2} - \frac{\langle \underline{\dot{y}}, \underline{\ddot{y}} \rangle}{\|\underline{\dot{y}}\|^4} \cdot \underline{\dot{y}} \\ \Rightarrow \underline{\ddot{y}}(u_0) &\stackrel{!}{=} \|\underline{\dot{y}}\|^2 \cdot \left(\frac{\underline{\ddot{x}}}{\|\underline{\dot{x}}\|^2} - \frac{\langle \underline{\dot{x}}, \underline{\ddot{x}} \rangle}{\|\underline{\dot{x}}\|^4} \cdot \underline{\dot{x}} + \frac{\langle \underline{\dot{y}}, \underline{\ddot{y}} \rangle}{\|\underline{\dot{y}}\|^4} \cdot \underline{\dot{y}} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \alpha^2 \cdot \underline{\ddot{x}}(t_0) + \beta \cdot \underline{\dot{x}}(t_0) \end{aligned}$$

3. Analog

Folgerung 5.2 Eine G^2 -Verbindung in einem gemeinsamen Punkt liegt vor, wenn in diesem die Frenet-Bezugssysteme und die Krümmungen übereinstimmen.

Beweis:

- Ergibt sich direkt aus der Konstruktion des Frenetschen Bezugssystems bzw. der Definition von κ .

Satz 5.3 Seien $\underline{x}, \underline{y}$ zwei reguläre C^1 -Kurvenstücke in \mathbb{R}^2 mit $\kappa_2 \neq 0$. Eine G^2 -Verbindung dieser im gemeinsamen Punkt $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$ liegt genau dann vor, wenn eine G^1 -Verbindung vorliegt und die Krümmungsmittelpunkte von $\underline{x}, \underline{y}$ in $\underline{x}(t_0) = \underline{y}(u_0)$ übereinstimmen.

Hermite Interpolationskurven

- gegeben: Stütztangentelemente $(p_0, p_0^1), (p_1, p_1^1)$

- gesucht: Verbindungskurve $\underline{x} = \underline{x}(u)$ (mit $u \in [0, 1]$) mit beliebigen $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}\underline{x}(0) &= \underline{p}_0 & \dot{\underline{x}}(0) &= \underline{p}_0^1 \cdot \lambda_0 \\ \underline{x}(1) &= \underline{p}_1 & \dot{\underline{x}}(1) &= \underline{p}_1^1 \cdot \lambda_1\end{aligned}$$

(Interpolationspolynom von möglich kleinem Grad)

- Wir setzen an:

$$\underline{x}(u) = f_0(u) \cdot \underline{p}_0 + f_1(u) \cdot \underline{p}_1 + g_0(u) \cdot \lambda_0 \cdot \underline{p}_0^1 + g_1(u) \cdot \lambda_1 \cdot \underline{p}_1^1$$

Forderungen:

u	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$g_0(u)$	$g_1(u)$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0

u	$\dot{f}_0(u)$	$\dot{f}_1(u)$	$\dot{g}_0(u)$	$\dot{g}_1(u)$
0	0	0	1	0
1	0	0	0	1

Mit den Lagrange-Polynomen $L_i^n(u)$ kann eine Lösung für $(n+1)$ Stütztangentelemente angegeben werden:

$$\begin{aligned}f_i(u) &= (1 - 2 \cdot L_i^n(u_i) \cdot (u - u_i)) \cdot L_i^n(u)^2 \\ g_i(u) &= (u - u_i) \cdot L_i^n(u)^2\end{aligned}$$

Für $n = 1$ mit $u_0 = 0, u_1 = 1$:

$$\begin{aligned}L_0^1 &= 1 - u & \dot{L}_0^1 &= -1 \\ L_1^1 &= u & \dot{L}_1^1 &= 1 \\ \Rightarrow f_0(u) &= (1 - 2 \cdot 1 \cdot u) \cdot (1 - u)^2 = 1 - 3u^2 + 2u^3 \\ f_1(u) &= (1 - 2 \cdot 1 \cdot (u - 1)) \cdot u^2 = 3u^2 - 2u^3 \\ g_0(u) &= u + u^3 - 2u^2 \\ g_1(u) &= u^3 - u^2\end{aligned}$$

(Hermite-Polynome 3. Grades)

- Bezeichnung: λ_0, λ_1 heißen Formparameter. Für $\lambda_1 = \lambda_0 = \|\underline{p}_0 - \underline{p}_1\|$: chordal parametrisiert

Satz 5.4 Eine Sequenz von $(n+1)$ Stütztangentelementen $(\underline{p}_j, \underline{p}_j^1)$ kann für jede Wahl von $\lambda_{0_i}, \lambda_{1_i}$ für $i = 0, \dots, n - 1$ durch eine Hermite-Interpolationskurve 3. Grades

$$\underline{x}_j(u) = f_0(u) \cdot \underline{p}_i + f_1(u) \cdot \underline{p}_{i+1} + g_0(u) \cdot \lambda_{0_i} \cdot \underline{p}_i^1 + g_1(u) \cdot \lambda_{1_i} \cdot \underline{p}_{i+1}^1$$

mit $u \in [0, 1], i \in \{0, \dots, n - 1\}$ besteht, die an den Stützpunkten \underline{p}_i eine G^1 -Verbindung besitzen, d.h.

$$\begin{aligned}\underline{x}_{i-1}(1) &= \underline{x}_i(0) = \underline{p}_i \\ \dot{\underline{x}}_{i-1}(1) &= \dot{\underline{x}}_i(0) \cdot \frac{\lambda_{0_i}}{\lambda_{1_i}}\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Bei ungünstigen Vorgaben der Stütztangentelemente oder Formparameter kann die Interpolationskurve ungünstige Eigenschaften besitzen.

Bézier-Kurven

Definition 5.3 Die in der binomischen Formel

$$1 = (u + (1 - u))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i \cdot (1 - u)^{n-i}$$

auftretenden Polynome n-ten Grades

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n$$

heißen Bernstein-Polynome. Eigenschaften:

1. $B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0$ für $i \neq 0, i \neq n$
2. $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1, B_0^n(1) = B_n^n(0) = 0$
3. $B_i^n(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1]$
4. $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1 - t)$ (Symmetrie)
5. $B_i^n(t) = (1 - t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t)$, wobei $B_i^n(t) = 0$ für $i > n$ oder $i < 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} & (1 - t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= \binom{n-1}{i} \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-1-i} \cdot (1 - t) + \binom{n-1}{i-1} \cdot t^{i-1} \cdot (1 - t)^{n-i} \cdot t \\ &= \underbrace{\left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right)}_{=\binom{n}{i}} \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-i} \end{aligned}$$

Definition 5.4 Eine polynomiale Funktion $\underline{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \underline{b}_i$$

heißt eine Bézier-Kurve, die Koeffizienten \underline{b}_i Kontrollpunkte. Die Sequenz $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n$ bildet das Kontrollpolygon der Bézier-Kurve.

Satz 5.5 Sei $\underline{x}(t)$ eine Bézier-Kurve n-ten Grades, $t \in [0, 1]$. Für die Differentiation nach t gilt:

$$\underline{x}^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} \underline{x}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \underline{b}_i \cdot B_i^{n-k}(t)$$

für $k = 1, \dots, n$ mit den rekursiv definierten Vorwärtsdifferenzen

$$\begin{aligned} \Delta^0 \underline{b}_i &= \underline{b}_i \\ \Delta^1 \underline{b}_i &= \underline{b}_{i+1} - \underline{b}_i \\ \Delta^k \underline{b}_i &= \Delta^{k-1} \underline{b}_{i+1} - \Delta^{k-1} \underline{b}_i \end{aligned}$$

Beweis: (per Induktion nach Differentiationsordnung k)

- Induktionsanfang: $k = 0$, klar
- Induktionsvoraussetzung: Behauptung gelte für k

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt}\underline{x}^{(k)}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \underline{b}_i \cdot \frac{d}{dt} B_i^{n-k}(t)\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} \cdot (i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot (n-i)) \\ &= \begin{cases} -n \cdot B_0^{n-1}(t) & i=0 \\ n \cdot B_{n-1}^{n-1}(t) & i=n \\ n \cdot (B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1})(t) & i=1, \dots, n-1 \end{cases}\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(k+1)}(t) &= \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-k} \Delta^k \cdot \underline{b}_i \cdot B_{i-1}^{n-k-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \underline{b}_i \cdot B_i^{n-k-1}(t) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} \underbrace{(\Delta^k \underline{b}_{i+1} - \Delta^k \underline{b}_i)}_{=: \Delta^{k+1} \underline{b}_i} \cdot B_i^{n-k-1}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} \Delta^{k+1} \underline{b}_i \cdot B_i^{n-k-1}(t)\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Speziell für $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ ergeben sich:

$$\begin{aligned}\underline{x}(0) &= \underline{b}_0 \\ \dot{\underline{x}}(0) &= n \cdot (\underline{b}_1 - \underline{b}_0) \\ \ddot{\underline{x}}(0) &= n \cdot (n-1) \cdot (\underline{b}_2 - 2\underline{b}_1 + \underline{b}_0) \\ \underline{x}(1) &= \underline{b}_n \\ \dot{\underline{x}}(1) &= n \cdot (\underline{b}_n - \underline{b}_{n-1}) \\ \ddot{\underline{x}}(1) &= n \cdot (n-1) \cdot (\underline{b}_n - 2\underline{b}_{n-1} + \underline{b}_{n-2})\end{aligned}$$

Folgerung 5.6 Eine Bézierkurve $\underline{x} = \underline{x}(t)$ mit $t \in [0, 1]$ beginnt im Anfangspunkt \underline{b}_0 des Kontrollpolygons, endet im Endpunkt \underline{b}_n . Die Vektoren $\underline{b}_1 - \underline{b}_0$ bzw. $\underline{b}_n - \underline{b}_{n-1}$ sind Richtungsvektoren in $\underline{x}(0)$ bzw. $\underline{x}(1)$.

Bemerkung:

1. $\underline{x}^{(k)}(0)$ bzw. $\underline{x}^{(k)}(1)$ hängen nur von den Kontrollpunkten $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_k$ bzw. $\underline{b}_n, \dots, \underline{b}_{n-k}$ ab.

Beispiele:

1. Für $n = 0$: (Punkt)

$$\underline{x} = \underline{b}_0$$

Für $n = 1$: (affine Gerade)

$$\underline{x}(t) = (1-t) \cdot \underline{b}_0 + t \cdot \underline{b}_1$$

Für $n = 2$: ebene Kurve

2. Zusammensetzen von Bézier-Kurvenstücken: Bézier-Polygon $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n$ und $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_m$,

$$\underline{x} := \sum_{i=0}^n \underline{b}_i \cdot B_i^n(t)$$
$$\underline{y} := \sum_{j=0}^m \underline{a}_j \cdot B_j^m(u)$$

Gilt:

- (a) $\underline{a}_0 = \underline{b}_n$, dann besitzen $\underline{x}, \underline{y}$ in $\underline{a}_0 = \underline{b}_n$ einen G^0 -Übergang
- (b) Liegen $\underline{b}_n = \underline{a}_0, \underline{b}_{n-1}, \underline{a}_1$ kollinear mit $\underline{b}_{n-1}, \underline{a}_1$ auf verschiedenen Seiten von $\underline{b}_n = \underline{a}_0$, so besitzen $\underline{x}, \underline{y}$ einen G^1 -Übergang in $\underline{a}_0 = \underline{b}_n$.
- (c) wie b), aber gleiche Seiten, dann Spitze mit gemeinsamer Spitztangente.
- (d) Übung: Schmiegebene

De Casteljau-Algorithmus

- Berechnung von $\underline{x}(t_0)$ einer Bézierkurve durch fortgesetzte Konvexkombinationen (affine Linearkombinationen mit $t \in [0, 1]$)

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \underline{b}_i$$

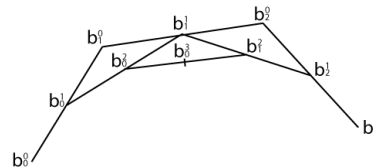
Sei $\underline{b}_i^0 := \underline{b}_i$. Unter Verwendung der Eigenschaft 5 (Rekursion) der Bernsteinpolynome:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= B_0^n(t) \cdot \underline{b}_0^0 + B_1^n(t) \cdot \underline{b}_1^0 + \dots + B_n^n(t) \cdot \underline{b}_n^0 \\ &= \underline{b}_0^0 \cdot (B_0^{n-1}(t) \cdot (1-t) + B_{-1}^{n-1}(t) \cdot t) + \underline{b}_1^0 \cdot (B_1^{n-1}(t) \cdot (1-t) + B_0^{n-1}(t) \cdot t) \\ &\quad + \dots + \underline{b}_n^0 \cdot (B_n^{n-1}(t) \cdot (1-t) + B_{n-1}^{n-1}(t) \cdot t) \\ &= B_0^{n-1} \cdot \underbrace{(\underline{b}_0^0 \cdot (1-t) + \underline{b}_1^0 \cdot t)}_{=: \underline{b}_0^1} + B_1^{n-1} \cdot \underbrace{(\underline{b}_1^0 \cdot (1-t) + \underline{b}_2^0 \cdot t)}_{=: \underline{b}_1^1} + \\ &\quad + \dots + B_{n-1}^{n-1} \cdot \underbrace{(\underline{b}_{n-1}^0 \cdot (1-t) + \underline{b}_n^0 \cdot t)}_{=: \underline{b}_{n-1}^1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1} \cdot \underline{b}_j^1(t) \\ &= \dots = \sum_{j=0}^0 B_j^0(t) \cdot \underline{b}_j^n = \underline{b}_0^n \end{aligned}$$

mit

$$\underline{b}_j^k = (1-t) \cdot \underline{b}_j^{k-1} + t \cdot \underline{b}_{j+1}^{k-1}$$

- Für $n = 3$, $t_0 = \frac{1}{2}$:



Bemerkung:

1. Geometrische Interpretation: Die Seiten des k -ten Kontrollpolygons $\underline{b}_0^k, \dots, \underline{b}_{n-k}^k$ werden im festen Verhältnis (Teilverhältnis bzgl. affiner Koordinatensysteme) geteilt und ergeben das $(k+1)$ -te Polygon $\underline{b}_0^{k+1}, \dots, \underline{b}_{n-k-1}^{k+1}$. Das Verfahren wird wiederholt bis nur noch eine Strecke übrigbleibt, deren Teilungspunkt der zu t_0 gehörende Kurvenpunkt ist.

Satz 5.7 Ein Bézier-Kurvenstück $\underline{x} = \underline{x}(t)$ mit $t \in [0, 1]$ liegt in der konvexen Hülle des Kontrollzugpolygons.

Satz 5.8 (Affine Invarianz) Das Bild einer Bézier-Kurve unter einer affinen Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Bézierkurve \underline{x}^α vom gleichen Grad zum Bild des Kontrollzugpolygons von \underline{x} unter α .

Beweis:

- affine Abbildung

$$\underline{x}^\alpha = A \cdot \underline{x} + \underline{b}$$

Dann

$$\begin{aligned} \underline{x}^\alpha(t) &= A \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \\ &= A \cdot \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \underline{b}_i \right) + \underline{b} \cdot \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \underbrace{(A \cdot \underline{b}_i + \underline{b})}_{=: \underline{b}_i^\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \underline{b}_i^\alpha \end{aligned}$$

4.6 Flächen und Tangentialebenen in \mathbb{R}^n

Definition 6.1 Ein (lokales) Flächenstück ist eine differenzierbare Abbildung $\underline{x} \in C^m(U)$ mit $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen,

$$(u, v) \mapsto \underline{x}(u, v)$$

Die Jacobi-Matrix $J(\underline{x})$ zu $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für $(u, v) \in U$ die durch

$$J(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_u \underline{x}_1 & \partial_v \underline{x}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \partial_u \underline{x}_n & \partial_v \underline{x}_n \end{pmatrix} =: (\underline{x}_u \quad \underline{x}_v)$$

gegebene matrixwertige Funktion.

Definition 6.2 Ein Flächenstück $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt in $(u_0, v_0) \in U$ regulär, wenn $J(\underline{x})$ in (u_0, v_0) den Rang 2 hat.

Bemerkung:

- Gilt $\text{Rg } J(\underline{x}) = 2$ für alle $(u, v) \in U$, so heißt \underline{x} regulär.

Lemma 6.1 Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Flächenstück und $(u_0, v_0) \in U$. Dann sind äquivalent:

1. $\underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0)$ sind linear abhängig.
2. Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle & \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle \\ \langle \underline{x}_v, \underline{x}_u \rangle & \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle \end{pmatrix}$$

3. $\text{Rg } J(\underline{x})(u_0, v_0) = 2$.

Beweis:

1. $1 \Rightarrow 2$:

Seien $\underline{x}_u, \underline{x}_v$ linear abhängig, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{x}_v = \lambda \cdot \underline{x}_u$$

Damit:

$$\begin{aligned} w &:= \det \begin{pmatrix} \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle & \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle \\ \langle \underline{x}_v, \underline{x}_u \rangle & \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle & \lambda \cdot \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle \\ \lambda \cdot \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle & \lambda^2 \cdot \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 \cdot \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle - \lambda^2 \cdot \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle = 0 \end{aligned}$$

2. $2 \Rightarrow 3$:

$$\begin{aligned}
 0 &= w = \|\underline{x}_u\|_2^2 \cdot \|\underline{x}_v\|_2^2 - \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u}
 \end{aligned}$$

Definition 6.3 Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Flächenstück und $(u_0, v_0) \in U$. Die Kurven

$$\begin{aligned}
 u &\mapsto \underline{x}(u, v_0) && \text{u-Koordinatenlinie} \\
 v &\mapsto \underline{x}(u_0, v) && \text{v-Koordinatenlinie}
 \end{aligned}$$

heißen Koordinatenlinien von \underline{x} in $\underline{x}(u_0, v_0)$.

Bemerkung:

- Das Flächenstück sei hierfür im Folgenden injektiv vorausgesetzt, d.h. aus $\underline{x}(u_1, v_1) = \underline{x}(u_0, v_0)$ folgt $(u_1, v_1) = (u_0, v_0)$.

Definition 6.4 Sei $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$ mit $\underline{x} \in C^m$ ($m \geq 1$) ein reguläres Flächenstück sowie $h : t \rightarrow (u(t), v(t))$ eine Kurve im Parametergebiet U mit $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$. Der an die Kurve

$$\underline{y}(t) := (\underline{x} \circ h)(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$$

in t_0 gebildete Vektor

$$\dot{\underline{y}}(t_0) = \left(\underline{x}_u \cdot \frac{du}{dt} + \underline{x}_v \cdot \frac{dv}{dt} \right) (t_0)$$

heißt Tangentialvektor an \underline{x} in $\underline{x}(u_0, v_0)$.

Bemerkung:

- \underline{x}_u bzw. \underline{x}_v sind Richtungsvektoren der Tangenten an Parameterlinie.

Lemma 6.2 Die Menge aller Tangentialvektoren an ein reguläres Flächenstück $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $\underline{x}_0 := \underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(U)$ bildet einen Vektorraum $T_{\underline{x}_0}$, der von $\underline{x}_u(u_0, v_0)$ und $\underline{x}_v(u_0, v_0)$ aufgespannt wird.

Beweis:

- Sei $\underline{y}(t)$ eine Kurve auf $\underline{x}(U)$ wie in Definition 6.4 mit $\underline{y}(t_0) = \underline{x}_0$ und $\dot{\underline{y}}(t_0) \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}}(t) &= (\underline{x}_u \cdot \dot{u} + \underline{x}_v \cdot \dot{v})(t) \\ \Rightarrow \dot{\underline{y}}(t_0) &= \underline{x}_u(u_0, v_0) \cdot \dot{u}(t_0) + \underline{x}_v(u_0, v_0) \cdot \dot{v}(t_0) \end{aligned}$$

mit $(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0)) \neq 0$ für reguläre Kurven im Parametergebiet.

- Wähle umgekehrt $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit

$$\underline{y}^1 := \lambda_1 \cdot \underline{x}_u(u_0, v_0) + \lambda_2 \cdot \underline{x}_v(u_0, v_0)$$

Sei außerdem

$$h \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} u_0 + \lambda_1 \cdot t \\ v_0 + \lambda_2 \cdot t \end{pmatrix} \in U$$

dann existiert $\underline{y}(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ mit

$$\dot{\underline{y}}(t_0) = \underline{x}_u(u_0, v_0) \cdot \lambda_1 + \underline{x}_v(u_0, v_0) \cdot \lambda_2 = \underline{y}^1$$

Definition 6.5 Sei $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ ein reguläres Flächenstück und $(u_0, v_0) \in U$ ein Punkt im Parametergebiet. Dann heißt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\underline{x}_0} &:= \underline{x}(u_0, v_0) + T_{\underline{x}_0}(u_0, v_0) \\ &= \underline{x}(u_0, v_0) + [\underline{x}_u, \underline{x}_v](u_0, v_0) \end{aligned}$$

Tangentialebene an \underline{x} in $\underline{x}(u_0, v_0)$.

Beispiel:

1. Torus in \mathbb{R}^3 , $\underline{x} = \underline{x}(u, v) : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$k : \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} (u) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$$

Kreis um $(a, 0)$ in x-z-Ebene mit Radius $a > b > 0$. Rotation um z-Achse mit Winkelmaß v :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (u, v) &= \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + b \cdot \sin u \\ 0b \cdot \cos u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a + b \cdot \sin u) \cdot \cos v \\ (a + b \cdot \sin u) \cdot \sin v \\ b \cdot \cos v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $\underline{x} \in C^\infty(U)$ mit

$$\underline{x}_u = \begin{pmatrix} b \cdot \cos u \cdot \cos v \\ b \cdot \cos u \cdot \sin v \\ -b \cdot \sin u \end{pmatrix} \quad \underline{x}_v = \begin{pmatrix} -(a + b \cdot \sin u) \cdot \sin v \\ (a + b \cdot \sin u) \cdot \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

\underline{x} regulär, falls vermöge Lemma 6.1.2:

$$\begin{vmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cdot \sin u)^2 \end{vmatrix} = b^2 \cdot (a + b \cdot \sin v)^2 \neq 0$$

nach Voraussetzungen. Tangentialebene:

$$\begin{aligned}\underline{x}_u \times \underline{x}_v &= \begin{pmatrix} b \cdot (a + b \cdot \sin u) \cdot \sin u \cdot \cos v \\ b \cdot (a + b \cdot \sin u) \cdot \sin u \cdot \sin v \\ b \cdot (a + b \cdot \sin u) \cdot \cos u \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \underline{n} &= \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Um die Forderung nach einem injektiven Flächenstück für alle Punkte von $\underline{x}(U)$ zu betrachten, wähle man zur Punktmenge Parametrisierung über Überdeckung der Punktmenge eines Torus mit injektiven Flächenstücken.

Definition 6.6 Es sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein reguläres Flächenstück, $\underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(U)$ und $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ in $\underline{x}(u_0, v_0)$. Dann heißt \underline{w} normal zu \underline{x} in $\underline{x}(u_0, v_0)$, falls für alle Tangentialvektoren \underline{x}^1 in $\underline{x}(u_0, v_0)$ gilt:

$$\langle \underline{w}, \underline{x}^1 \rangle = 0$$

Bemerkung:

- $T_{\underline{x}_0}^\perp$ bezeichnet den Unterraum aller zu $T_{\underline{x}_0}$ normalen Vektoren.

4.7 Metrik auf Flächenstücken

- Abstand zweier Punkte $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{R}^n$ (euklidischer Raum)

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2$$

- Abstand zwischen $\underline{p}, \underline{q} \in \underline{x}(U)$ auf Flächenstück vermöge Bogenlänge von Flächenkurven: Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläres, injektives Flächenstück, $t \mapsto (u, v) \in U$ eine reguläre C^1 -Kurve, also $\underline{y}(t) := \underline{x}(u(t), v(t))$ reguläre Flächenkurve,

$$s(t) = \int_c^t \|\underline{\dot{y}}(\tau)\| d\tau$$

Bogenlängenfunktion. Damit:

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_c^t \left(\langle \underline{x}_u \cdot \dot{u} + \underline{x}_v \cdot \dot{v}, \underline{x}_u \cdot \dot{u} + \underline{x}_v \cdot \dot{v} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ \Rightarrow \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle \cdot \dot{u}^2 + 2 \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle \cdot \dot{v}^2\end{aligned}$$

Definition 7.1 Es sei \underline{x} ein reguläres Flächenstück. Die Funktionen $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}E(u, v) &:= \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle \\ F(u, v) &:= \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle \\ G(u, v) &:= \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle\end{aligned}$$

heißen Grundgrößen der ersten Fundamentalform auf T_u von \underline{x} ,

$$ds^2 = E du^2 + F du dv + G dv^2$$

Vorstellung: Für ein reguläres Flächenstück \underline{x} sowie $\underline{y}(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ reguläre Flächenkurve ist infinitesimaler Abstand bzgl $t + dt$:

$$\underline{x}(u(t+dt), v(t+dt)) = \underline{x}(u(t), v(t)) + \dot{\underline{x}}(u(t), v(t)) dt$$

also

$$\begin{aligned} \underline{x}(u, v)(t + dt) - \underline{x}(u, v)(t) &= \dot{\underline{x}}(u, v)(t) dt \\ \Rightarrow \|\underline{x}(u, v)(t + dt) - \underline{x}(u, v)(t)\| &= \|\underline{x}_u \cdot \dot{u} + \underline{x}_v \cdot \dot{v}\| dt \\ &= \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} dt \end{aligned}$$

Definition 7.2 Seien $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (reguläres) Flächenstück sowie $\varphi : V \rightarrow U$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen eine Parametertransformation mit φ als Diffeomorphismus. φ heißt orientierungstreu, falls $\det J(\varphi) > 0$. φ heißt orientierungsumkehrend, falls $\det J(\varphi) < 0$.

Satz 7.1 Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (reguläres) Flächenstück.

1. Sei $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung (Isometrie). Dann ist auch $\tilde{\underline{x}} = \kappa \circ \underline{x}$ ein (reguläres) Flächenstück, für dessen 1. Fundamentalform gilt:

$$ds_{\tilde{\underline{x}}}^2 = ds_{\underline{x}}^2$$

2. Sei $\varphi : \hat{U} \rightarrow U$ eine Parametertransformation und $\hat{\underline{x}} = \underline{x} \circ \varphi$, dann gilt für die 1. Fundamentalform:

$$ds_{\hat{\underline{x}}}^2 = ds_{\underline{x}}^2$$

Beweis:

1. Sei $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, $f(\underline{z}) = \kappa(\underline{z}) - \kappa(0)$ die zugehörige orthogonale Abbildung. Dann gilt mit zugehöriger Matrix A sowie

$$d\tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}}_u \cdot du + \tilde{\underline{x}}_v \cdot dv$$

dass

$$\begin{aligned} d(\kappa(\underline{x})) &= d(f(\underline{x})) \\ \Rightarrow ds_{\tilde{\underline{x}}}^2 &= \langle d\tilde{\underline{x}}, d\tilde{\underline{x}} \rangle \\ &= \langle d(f(\underline{x})), d(f(\underline{x})) \rangle \\ &= \langle A d\underline{x}, A d\underline{x} \rangle = \langle d\underline{x}, d\underline{x} \rangle = ds_{\underline{x}}^2 \end{aligned}$$

2. Es gilt:

$$ds_{\hat{\underline{x}}}^2 = \langle d\hat{\underline{x}}, d\hat{\underline{x}} \rangle$$

Mit

$$d\hat{\underline{x}}(\hat{u}, \hat{v}) = (d\hat{u}, d\hat{v}) = d\hat{u}_{\hat{u}}(d\hat{u})$$

folgt:

$$\begin{aligned} ds_{\hat{\underline{x}}}^2 &= \langle d(\underline{x} \circ \varphi), d(\underline{x} \circ \varphi) \rangle \\ &= \langle d\underline{x} \circ d\varphi, d\underline{x} \circ d\varphi \rangle \\ &= \langle d\underline{x}(d\varphi), d\underline{x}(d\varphi) \rangle \\ &= ds_{\underline{x}}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Winkel- und Längenmessung bzgl. Basis: Sei hierfür $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^m -Flächenstück ($m \geq 1$), regulär, mit 1. Fundamentalform $ds_{\underline{x}}^2$ auf T_u . Des Weiteren $I \ni t \mapsto (u, v) = h(t)$ eine reguläre C^m -Kurve, $\underline{y}(t) = (\underline{x} \circ h)(t)$ eine Flächenkurve.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}}(t_0) &= \frac{d(\underline{x} \circ h)}{dt}(t_0) = d\underline{x}_{h(t_0)}(h'(t_0)) \neq 0 \\ \Rightarrow \|\dot{\underline{y}}(t_0)\| &= \left(\langle d\underline{x}_{h(t_0)}(h'(t_0)), d\underline{x}_{h(t_0)}(h'(t_0)) \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Länge von \underline{y} :

$$s_{\underline{y}}(a, b) = \int_a^b \|\dot{\underline{y}}\| dt$$

Schnittwinkel zweier Kurven in $\underline{y}_1(t_0) = \underline{y}_2(t_2)$:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\langle \dot{\underline{y}}_1, \dot{\underline{y}}_2 \rangle}{\|\dot{\underline{y}}_1(t_1)\| \cdot \|\dot{\underline{y}}_2(t_2)\|} \right)$$

4.8 Weingartenabbildung und Krümmung

Ziel: Beschreibung der Krümmung von Flächenstücken in \mathbb{R}^3

Definition 8.1 Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück. Es bezeichnet $\underline{N} : U \rightarrow S_2$ die durch folgende Bedingungen eindeutig definierte Abbildung (Gauß-Bild)

1. Für alle $(u, v) \in U : \|\underline{N}(u, v)\| = 1$
2. Für alle $(u, v) \in U : \underline{N}(u, v) \in T_{\underline{x}}^\perp(u, v)$
3. $\underline{x}_u \times \underline{x}_v$ und $\underline{N}(u, v)$ sind gleich orientiert.

Bemerkung:

1. Berechnung von \underline{N} (Einheitsnormalenvektorfeld) mittels

$$\underline{N}(u, v) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u\| \cdot \|\underline{x}_v\|}(u, v)$$

Für reguläre Flächenstücken \underline{x} mit $\underline{x} \in C^m$ folgt $\underline{N} \in C^{m-1}$, d.h. im Folgenden $m \geq 2$.

Betrachte nun die Änderung von \underline{N} in Richtung eines Tangentialvektors als Maß für die Verbiegung von \underline{x} in diese Richtung.

Definition 8.2 Sei $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit $\underline{x} \in C^m$ ($m \geq 2$) und $\underline{N} : U \rightarrow S_2$ das Gaußbild. Für eine reguläre C^1 -Kurve $h(t) := (u(t), v(t)) \in U$ in $h(t_0) = (u_0, v_0)$ setze

$$\begin{aligned} L(\dot{\underline{x}}(t_0)) &:= -d\underline{N}_{\underline{x}_0} \\ &= - \left(\frac{\partial \underline{N}}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \underline{N}}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{dv}{dt}(t_0) \right) \end{aligned}$$

L heißt die Weingartenabbildung von \underline{x} in \underline{x}_0 . Eigenschaften:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} L(\underline{x}_u) &= -\frac{\partial \underline{N}}{\partial u} =: -\underline{N}_u \\ L(\underline{x}_v) &= -\frac{\partial \underline{N}}{\partial v} =: -\underline{N}_v \end{aligned}$$

2. L ist in jedem $\underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(U)$ eine lineare Abbildung $L : T_{\underline{x}_0} \rightarrow T_{\underline{x}_0}$
3. Für eine reguläre C^2 -Kurve $h(t) = (u(t), v(t))$ gilt mit $\underline{y}(t) = (\underline{x} \circ h)(t)$:

$$\langle \dot{\underline{y}}, \underline{N} \rangle = \langle L(\dot{\underline{y}}), \dot{\underline{y}} \rangle$$

Definition 8.3 Sei \underline{x} ein reguläres Flächenstück, $\underline{y} = (\underline{x} \circ h)$ eine Flächenkurve wie in Definition 8.2. Außerdem sei $\|\dot{\underline{y}}\| = 1$ (Bogenlängenparametrisierung). Dann ist

$$k(\dot{\underline{y}}) := \langle L(\dot{\underline{y}}), \dot{\underline{y}} \rangle$$

die Normalkrümmung von \underline{x} in Richtung $\dot{\underline{y}}$.

Satz 8.1 Seien $\underline{x}, \underline{y} = \underline{x} \circ h$ wie zuvor, $\underline{y}(t_0) = \underline{x}(u_0, v_0)$ sowie durch $\underline{N}(u_0, v_0)$ und $\dot{\underline{y}}(t_0)$ ein Normalschnitt von \underline{x} , in dem \underline{y} liegt. Dann gilt:

$$k(\dot{\underline{y}}(t_0)) = \pm \kappa_{2\underline{y}}(t_0)$$