Technische Universität Dresden

Skript:

Analysis III

Version vom 2020-02-11

Verfasser

Franziska Kühn
überarbeitet durch Benedikt Bartsch
Typos und Fehler gerne und bitte an Benedikt Bartsch.
E-Mail-Adresse siehe:
https://myfsr.de/dokuwiki/doku.php?id=fsr:mitglieder

Daten

erster und zweiter Teil:
Prof. Dr. Jürgen Voigt
Wintersemester 2009/2010
Grundstudium

zweiter Teil:
Prof. Dr. Stefan Siegmund
Wintersemester 2019/2020

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Einleitung

- Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$
Dabei ist $F\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. (Idee: x unabhängige Variable, y als Funktion von x gesucht.)
- Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$. φ Lösung von (*), falls
  1. φ n-mal stetig differenzierbar
  2. $\forall x \in J : (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in D$
  3. $\forall x \in J : F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$

Beispiele:

1. Differentialgleichung:
$$y' + 2xy = 0$$
Hier $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z + 2xy$. Eine Lösung lautet:
$$\varphi(x) = e^{-x^2}$$
denn
$$\varphi'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$
Damit:
$$\varphi'(x) + 2x \cdot \varphi(x) = -2x \cdot e^{-x^2} + 2x \cdot e^{-x^2} = 0$$
Weitere Lösungen:
$$\varphi(x) = c \cdot e^{-x^2}$$
Eindeutigkeit nur mit weiteren Vorgaben. Meist tritt (*) als explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung auf:
$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$
2. Radiokativer Zerfall:
   - Für $t > 0$ sei $y(t)$ die zur Zeit t noch nicht zerfallene Masse. Zerfallsgesetz: Abnahme der Masse pro Zeiteinheit
$$-\frac{y(t + \triangle t) - y(t)}{\triangle t}$$
ist proportional zur noch vorhandenen Masse, d.h. $\exists \lambda > 0$ (Zerfallskonstante):
$$\begin{aligned} -y'(t) &= \lambda \cdot y(t) \\ \Rightarrow y' &= -\lambda \cdot y \end{aligned}$$

- Behauptung: Jede Lösung ist von der Form

$$y(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Beweis: y Lösung: klar. Ist y Lösung, so sei

$$g(t) := e^{\lambda \cdot t} \cdot y(t)$$

Dann

$$g'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot y(t) + e^{\lambda \cdot t} \cdot \underbrace{y'(t)}_{-\lambda \cdot y(t)} = 0$$

Also g konstant, $g(t) = c$.

- Halbwertszeit T definiert durch

$$y(T) = \frac{y(0)}{2}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y(0) \cdot e^{-\lambda T} &= \frac{1}{2} y(0) \\ -\lambda \cdot T &= \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{\lambda} \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Beispiele:

Material	T
Uran 238	$4,5 \cdot 10^9$a
Plutonium	$2,4 \cdot 10^4$a
C^{14}	$5,4 \cdot 10^3$ a
Kalium	$12,45$ h

3. Harmonische Schwingung mit Reibung:

Newton:

$$m \cdot \ddot{x} = F(t)$$

mit $F(t)$ als die auf den Körper wirkende Gesamtkraft,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -k \cdot x \qquad (k > 0) \\ F_2(t) &= -\gamma \cdot \dot{x} \qquad (\gamma > 0) \end{aligned}$$

Also:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

4. Bevölkerungswachstum:

Bezeichne $y(t)$ die Menge der Affen auf einer Insel (in kg). Bei günstigen Bedingungen: Relativer Zuwachs $= a > 0$,

$$y' = a \cdot y$$

Lösung: $y(t) = y_0 \cdot e^{at}$. Nicht realistisch, s.u. für Korrektur. Allgemeiner: In Lebensraum hat man Tier- und Pflanzenarten $y_1(t), \ldots, y_n(t)$. Interaktion:

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \qquad i = 1, \ldots, n$$

System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bemerkung:

- Ist $y' = f(x, y)$ mit $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$, dann Veranschaulichung durch Richtungsfeld möglich. ($\longrightarrow$ Eulersches Polygonzugverfahren)

2 Einige explizit lösbare Differentialgleichungen

2.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' + g(x) \cdot y = h(x)$$

hierbei g, $h\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$y' + g(x) \cdot y = 0$$

h heißt Inhomogenität.

1. Lösung von homogener Differentialgleichung:
   - Gesucht y mit
     $$y' = -g(x) \cdot y$$
     Sei G eine Stammfunktion von g. Dann
     $$y(x) := c \cdot e^{-G(x)}$$
     Lösung für alle $c \in \mathbb{R}$.
   - Jede Lösung ist von dieser Form: Für Lösung y definiere
     $$f(x) := e^{G(x)} \cdot y(x)$$
     Dann:
     $$\begin{aligned} f'(x) &= e^{G(x)} \cdot (g(x) \cdot y(x) + y'(x)) = 0 \\ \Rightarrow f(x) &= c \\ \Rightarrow y(x) &= c \cdot e^{-G(x)} \end{aligned}$$
2. Lösung von inhomogener Differentialgleichung:
   - Sei $y_h \neq 0$ Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann Variation der Konstanten.
   - Gesucht: Lösung als $y(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ („Ansatz“).
     $$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x) \cdot y_h(x) + c(x) \cdot y_h'(x) \\ \Rightarrow h(x) &= y'(x) + g(x) \cdot y(x) \\ &= c'(x) \cdot y_h(x) + c(x) \cdot \underbrace{y_h'(x)}_{-g(x) \cdot y_h(x)} + g(x) \cdot c(x) \cdot y_h(x) \\ \Rightarrow c'(x) &= (y_h(x))^{-1} \cdot h(x) \end{aligned}$$
   - Sei c eine Stammfunktion von $y_h^{-1} \cdot h$. Dann
     $$y(x) = C \cdot y_h(x) + c(x) \cdot y_h(x)$$
     mit $C \in \mathbb{R}$ die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung. Schreibweise mit G:
     $$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(C + \int e^{G(t)} \cdot h(t)\, dt \right)$$

Beispiele:

1. Gesucht Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{aligned} y' - 2xy &= 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Homogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y' &= 2xy \\ \Rightarrow y &= c \cdot e^{x^2} \qquad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y' - 2xy &= c'(x) \cdot e^{x^2} + 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} - 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} \\ &= c'(x) \cdot e^{x^2} \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow c'(x) &= e^{-x^2} \\ c(x) &= \int_0^x e^{-t^2}\, dt + C \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{x^2} \cdot \left(c + \int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)$$

Wegen Forderung $y(0) = 1$:

$$y(0) = c = 1$$

Lösung:

$$y(x) = e^{x^2} \cdot \left(1 + \int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)$$

„error function“:

$$erf(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

2. Zylindrisches Sieb mit geschlossenem Boden, Flüssigkeitseinlass mit konstanter Rate R (in $l \cdot s^{-1}$). Flüssigkeitsablauf proportional zur Fläche $k \cdot 2\pi r x$. Also Zuwachs in x-Richtung bei Höhe h:

$$\frac{1}{\pi r^2} \cdot (R - k \cdot 2\pi r x)$$

Damit Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{\frac{R}{\pi r^2}}_{=:B} - \underbrace{\frac{2k}{r}}_{=:A} \cdot x \\ x' + A \cdot x &= B \end{aligned}$$

Homogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} x' &= -A \cdot x \\ x &= c \cdot e^{-A \cdot t} \end{aligned}$$

Inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} x' + A \cdot x &= c'(x) \cdot e^{-A \cdot t} \overset{!}{=} B \\ \Rightarrow c'(x) &= B \cdot e^{A \cdot t} \\ c(x) &= \frac{B}{A} \cdot e^{A \cdot t} + C \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{B}{A} + C \cdot e^{-A\cdot t} \\ x(0) &= \frac{B}{A} + C \\ \Rightarrow C &= -\frac{B}{A} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{B}{A} \cdot (1 - e^{-A\cdot t}) \end{aligned}$$

2.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$, $g\colon I_2 \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$.

1. Sei $g(y_0) = 0$. Dann $y(x) = y_0$ für alle $x \in I_1$ Lösung von $y' = f(x) \cdot g(y)$ zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$.
2. Sei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in I_2$. Dann gibt es ein offenes Intervall J mit $x_0 \in J \subseteq I_1$ auf dem das Anfangswertproblem
$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad y(x_0) = y_0$$
eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Diese kann man aus
$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$
durch „Auflösen nach y“ berechnen.

Beweis für 2.:

- Sei y eine Lösung. Dann gilt:
$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{g(y(x))} &= f(x) \qquad (x \in J) \\ \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \end{aligned}$$
Variablensubstitution:
$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad (*)$$
- Und: y ist genau dann eine Lösung, wenn (*) gilt und y stetig differenzierbar ist.
- Aus (*) wird Existenz von y bewiesen. Sei $G\colon I_2 \to \mathbb{R}$
$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$$
G stetig differenzierbar, streng monoton, $G'(y) \neq 0$ für alle $y \in I_2$. $G(I_2)$ offenes Intervall und enthält $G(y_0) = 0$. G invertierbar auf $G(I_2)$, G^{-1} stetig differenzierbar. Sei
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$
Dann ist $F(x_0) = 0 \in G(I_2)$. Es gibt ein offenes Intervall $J \subseteq I_1$, sodass $x_0 \in J$ mit $F(J) \subseteq G(I_2)$. Dann
$$y := G^{-1}(F|_J)$$
eindeutige Lösung von (*).

Bemerkung:

- Lösungsschema für getrennte Variablen:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C \;\Rightarrow\; G(y) = F(x) + c$$

  nach y auflösen und c bestimmen.

Beispiele:

1. Affen auf Insel: Korrigierter relativer Zuwachs $a - by$ mit $a, b > 0$. Differentialgleichung:

$$y' = (a - by) \cdot y \qquad \text{Logistische Gleichung}$$

   Dann:

$$f(x) = 1 \qquad g(y) = (a - by) \cdot y$$

   Unterscheidung der beiden Fälle:

   (a) y mit $g(y) = 0$ getrennt behandeln:

$$\begin{aligned} g(y) &= 0 \\ (a - by) \cdot y &= 0 \\ \Rightarrow y_1 &= 0 \qquad y^* := \frac{b}{a} \end{aligned}$$

   Also Lösungen $y(x) = 0$ bzw. $y(x) = y^*$.

   (b) Sonst:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{(a - by) \cdot y} &= dt \\ \frac{1}{b} \cdot \frac{dy}{(y^* - y) \cdot y} &= dt \\ \underbrace{\frac{1}{b \cdot y^*}}_{a} \cdot \left(\frac{1}{y^* - y} + \frac{1}{y} \right) &= dt \\ \frac{1}{a} \cdot \underbrace{(\ln |y| - ln|y^* - y|)}_{\ln\left|\frac{y}{y^* - y}\right|} &= t + c \\ \left| \frac{y}{y^* - y} \right| &= e^{at} \cdot \underbrace{e^{ac}}_{>0} \\ \frac{y}{y^* - y} &= \tilde{c} \cdot e^{at} \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ y \cdot (1 + \tilde{c} \cdot e^{at}) &= y^* \cdot \tilde{c} \cdot e^{at} \\ y &= \frac{y^* \cdot \tilde{c} \cdot e^{at}}{1 + \tilde{c} \cdot e^{at}} \\ &= y^* \cdot \frac{1}{1 + \tilde{\tilde{c}} \cdot e^{-at}} \end{aligned}$$

   Es gilt:

$$y(0) = \frac{y^*}{1 + \tilde{\tilde{c}}}$$

   Anfangswertproblem $y(0) = y_0$ führt zu

$$\begin{aligned} 1 + \tilde{\tilde{c}} &= \frac{y^*}{y_0} \\ \Rightarrow \tilde{\tilde{c}} &= \frac{y^*}{y_0} - 1 = \frac{y^* - y_0}{y_0} \end{aligned}$$

   Fallunterscheidung:

i. Für $y_0 > y^*$: $-1 < \tilde{\tilde{c}} < 0$

ii. Für $0 < y_0 < y^*$: $0 < \tilde{\tilde{c}}$

iii. Für $y_0 < 0$: $\tilde{\tilde{c}} < -1$

2.3 Substitutionsmethoden

2.3.1 Typ: $y' = f(y + ax)$

$$\begin{aligned} y' &= f(y + a \cdot x) \\ \Rightarrow z &= y + a \cdot x \end{aligned}$$

Substitution der „abhängigen“ Variablen:

$$z' = y' + a = f(z) + a$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen für z. Lösen! Dann $y(x) = z(x) - ax$.

Beispiel:

1. Sei

$$y' = (y + 2x)^2$$

Dann:

$$\begin{aligned} z &= y + 2x \\ z' &= y' + 2 = z^2 + 2 \\ \int \frac{dz}{z^2 + 2} = \int dx & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{2}} &= x + c \\ z &= \sqrt{2} \cdot \tan(\sqrt{2} \cdot (x + x)) \\ y(x) &= z(x) - 2x \end{aligned}$$

2.3.2 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

wobei $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Äquivalent dazu, dass f nur von $\frac{y}{x}$ abhängt.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= F\left(\frac{y}{x}\right) \\ y' &= F\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Neue Funktion $z = \frac{y}{x}$. Dann:

$$\begin{aligned} y &= x \cdot z \\ y' &= z + x \cdot z' \\ z + x \cdot z' &= F(z) \\ z' &= \frac{F(z) - z}{x} \end{aligned}$$

hat getrennte Variablen. Lösen! Rücksubstitution. Beispiele:

1. Bestimme die Kurve, für die die Tangente im Punkt (x, y) die y-Achse im Punkt $(0, \sqrt{x^2+y^2})$ schneidet. Differentialgleichung:

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Somit für $x > 0$:

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

Für $x < 0$:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

Keine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung streng genommen. Aber Methode anwendbar.

(a) Sei $x > 0$:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{y}{x} \\
\Rightarrow y' &= x \cdot z' + z \\
x \cdot z' + z &= z - \sqrt{1+z^2} \\
\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= -\int \frac{dx}{x} \\
\ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= -\ln x + lnC \qquad C > 0 \\
z + \sqrt{1+z^2} &= \frac{C}{x} \\
1 + z^2 &= \frac{C^2}{x^2} - \frac{2Cz}{x} + z^2 \qquad z = \frac{y}{x} \\
\frac{2Cy}{x^2} &= \frac{C^2}{x^2} - 1 \\
y &= \frac{C}{2} - \frac{x^2}{2C}
\end{aligned}$$

Probe machen, da quadriert wurde.

(b) Für $x < 0$ äquivalente Rechnung. Lösung:

$$y = -\frac{C'}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2C'}$$

Passt bei $x = 0$ mit vorheriger Lösung zusammen für $C' = \frac{1}{C}$.

Kurven lösen das „Scheinwerfer-Problem“.

2.3.3 Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^\alpha = 0 \qquad (\alpha \neq 0)$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
z &= y^{1-\alpha} \\
z' &= (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y' \\
&= -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot y^{1-\alpha} - (1-\alpha) \cdot g(x) \\
z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z &= -(1-\alpha) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

Lineare inhomogene Differentialgleichung.

Bemerkungen:

- Gegeben eine einparametrige Kurvenschar

$$F(x,y,a) = 0 \qquad (*)$$

mit $a \in I \subseteq \mathbb{R}$ (Parameter). Gemeinsame Differentialgleichung für die Kurven gesucht. Methode:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x,y(x),a) \\ &= \partial_1 F(x,y,a) + \partial_2 F(x,y,a) \cdot y' \qquad (**) \end{aligned}$$

Eliminiere a aus (*) und (**). Differentialgleichung: $y' = f(x,y)$

- Finde orthogonale Trajektorien zur Schar, die durch die Differentialgleichung

$$y' = f(x)$$

bzw.

$$G(x,y,y') = 0$$

gegeben ist. Methode: Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

bzw.

$$G\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Beispiel: Parabelschar $y = c \cdot x^2$ mit $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= 2cx \\ c &= \frac{y'}{2x} \\ \Rightarrow y &= \frac{y'}{2x} \cdot x^2 \\ y' &= \frac{2y}{x} \end{aligned}$$

Orthogonale Trajektorien:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \\ \int (2y)\,dy &= \int (-x)\,dx \\ y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + c \\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 &= C \end{aligned}$$

Ellipsenschar für $c > 0$.

Beispiele:

1. Traktrix (Schleppkurve)

$$y' = -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}$$

Integration:

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{l^2 - x^2} + l \cdot \ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 - x^2}}{x}\right) + c \\ y(l) &\overset{!}{=} 0 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

2. Kettenlinie, Catenoide: Betrachte Kräfte für festes (x_0, y_0) und variables (x, y)

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{\eta_0}{\xi_0} \\ y'(x) &= \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}$$

Aus Kräftegleichgewicht folgt: (x-Richtung)

$$\xi_0 = -\xi$$

und (y-Richtung):

$$\begin{aligned} \eta + \eta_0 &= g \cdot \varrho \cdot \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(z)^2}\, dz \\ &= y'(x) \cdot \xi + y'(x_0) \cdot \xi_0 \\ \Rightarrow y'(x) &= y'(x_0) + \underbrace{\frac{g \cdot \varrho}{-\xi_0}}_{>0} \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(z)^2}\, dz \end{aligned}$$

Differenzieren:

$$y''(x) = \frac{g \cdot \varrho}{-\xi_0} \sqrt{1 + y'^2}$$

Löse:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sqrt{1 + y'^2} \qquad z' = y \\ z' &= \sqrt{1 + z^2} \\ \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} &= \int dx \\ \operatorname{arsinh} z &= x + c \\ y' &= z = \sinh(x + c) \\ y(x) &= \cosh(x + c) + C_1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Integration von Differentialgleichungen 2. Ordnung, spezieller Typen:
  1. $y'' = f(y)$
  2. $y'' = f(y, y')$
  3. $y'' = f(x, y')$

  Einfach: Typ 3, $z = y'$ (vgl. Kettenregel). Für Typ 1,2; siehe Kamke, Typ A15.3 a). Beachte, dass Typ 1 Spezialfall von Typ 2.

3 Exakte Differentialgleichungen, konservative Vektorfelder

Betrachte Gleichung

$$\psi(x,y) = c$$

Angenommen, Gleichung definiert y als Funktion von x implizit. Dann

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) \cdot y' = 0$$

(falls...). Die Differentialgleichung

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

heißt exakt, wenn es ψ stetig differenzierbar gibt mit

$$M = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Ist dann $c \in \mathbb{R}$ so, dass durch

$$\psi(x,y) = c$$

implizit eine stetig differenzierbare Funktion y(x) definiert wird. Dann y Lösung.

Beispiele:

1. Sei

   $$2xy^3 + 3x^2y^2 \cdot y' = 0$$

   Wähle

   $$\psi(x,y) = x^2 \cdot y^3$$

   Dann Lösung:

   $$\begin{aligned} x^2 \cdot y^3 &= c \\ y(x) &= \frac{k}{x^{\frac{2}{3}}} \qquad (x \neq 0) \end{aligned}$$

2. $y' = f(x) \cdot g(y)$ hat getrennte Variablen.

   $$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' &= 0 \\ \psi(x,y) &= \int f(x)\,dx - \int \frac{1}{g(y)}\,dy \end{aligned}$$

Allgemeiner: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig (F Vektorfeld). Bedingungen dafür, dass es $\psi \in C^1(U)$ gibt mit $F = \operatorname{grad}\psi$. (Für oben: $F = (M\,N)^T$).

Bemerkung:

- Ist $\psi \in C^2(U)$, $F = \operatorname{grad}\psi$, dann

$$\partial_j F_k = \partial_j \partial_k \psi = \partial_k \partial_j \psi = \partial_k F_j$$

Definitionen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig.

1. F Potentialfeld $:\Leftrightarrow \exists\, \psi \in C^1(U)$ mit $F = \operatorname{grad}\psi$.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $F\colon \operatorname{im}\gamma \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{im}\gamma = \{\gamma(t); a \leq t \leq b\}$ stetig. Dann:

$$\int_\gamma F := \int_a^b (F(\gamma(t))|\gamma'(t))\, dt$$

Wegintegral zweiter Art (Kurvenintegral)

Allgemeiner: γ nur stückweise stetig differenzierbarer Weg $:\Leftrightarrow \gamma$ stetig, $\exists t_0 = a < \ldots < t_k = b$: $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar für $j = 1, \ldots, k$. Dann:

$$\int_\gamma F = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} F$$

3. F heißt konservativ $:\Leftrightarrow$ Sind $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to U$ stückweise stetig differenzierbar, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, dann

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$$

3.1 Satz: Potentialfeld $\Leftrightarrow$ konservativ

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann: F konservativ $\Leftrightarrow$ F Potentialfeld. Ist $F = \operatorname{grad}\psi$, dann

$$\int_\gamma F = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma\colon [a,b] \to U$.

Beweis:

1. „$\Leftarrow$“
   - F ist Potentialfeld, also existiert ψ mit

   $$F = \operatorname{grad}\psi = (\psi')^T$$

   Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann:

   $$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{(\operatorname{grad}\psi(\gamma(t))|\gamma'(t))}_{\psi'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}\, dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d}{dt}\psi(\gamma(t))\, dt \\ &= \sum_{j=1}^k \psi(\gamma(t_j)) - \psi(\gamma(t_{j-1})) \\ &= \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))\end{aligned}$$

2. „$\Rightarrow$“

- Sei $x_0 \in U$. Sei U_0 die Menge aller $x \in U$, für die ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ von x_0 nach x existiert. Dann U_0 offen, da U offen.
- Sei $x_0 \in U_0$ und γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg von x_0 nach x. Dann

$$\psi(x) := \int_\gamma F$$

  unabhängig von γ. (Damit $\psi(x_0) = 0$). Stetigkeit von ψ: leicht. ψ partiell differenzierbar nach x_j in x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \cdot \psi(x + t \cdot e_j) - \psi(x)) &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\gamma \dot{+} \tilde{\gamma}} F - \int_\gamma F \\ &= \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}} F \end{aligned}$$

  Wähle $\gamma\colon [0,t] \to \mathbb{R}^n$, $s \mapsto x + s \cdot e_j$. Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}} F &= \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{F_j(x + s \cdot e_j)}_{(F(\gamma(t))|e_j)} \, ds \\ &\xrightarrow{HSII} F_j(x) \end{aligned}$$

  Damit $\psi \in C^1(U)$ und $F = \operatorname{grad} \psi$. Falls $U_0 = U$: fertig. Wenn nicht: Wähle $x_1 \in U \backslash \{U_0\}$... abzählbar oft wiederholen. (s. Bemerkung)

Bemerkungen:

1. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alle $U \in \mathcal{U}$ offen und $U \neq \emptyset$. Es gelte: $U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V \Rightarrow U \cap V = \emptyset$. Dann $\mathcal{U}$ abzählbar.

   Beweis: $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar. Betrachte

$$A := \{x \in \mathbb{Q}^n, \exists U \in \mathcal{U} : x \in U\}$$

   Dann A abzählbar.

$$\varphi\colon A \to \mathcal{U} : \varphi(x) := U \qquad \text{für}\, x \in U$$

   Dann φ surjektiv, denn $\forall U \in \mathcal{U}$:

$$U \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$$

   Damit $\mathcal{U}$ abzählbar.

2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall x, y \in U \exists \gamma\colon [0,1] \to U$ stetig mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

   $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $x \in U$ definiere Wegzusammenhangskomponente:

$$U_0 := \{y \in U; \exists \text{Weg in } U \text{ von } x \text{ nach } y\}$$

   Dann U_0 wegzusammenhängend, offen. Ist $y \in U \backslash U_0$, U_1 Wegzusammenhangskomponente von y, dann ist $U_1 \cap U_0 = \emptyset$. Definiere $\mathcal{U}$ als Menge der Wegzusammenhangskomponenten. Dann $U = \bigcup \mathcal{U}$. Nach a): $\mathcal{U}$ abzählbar.

3. $U \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow U$ abzählbare disjunkte Vereinigung offener Intervalle.

3.2 Satz: Kriterium Potentialfeld

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sternförmig

$$:\Leftrightarrow \exists x^* \in U : \forall x \in U : \{(1-t) \cdot x^* + t \cdot x; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$$

$F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar,

$$\delta_j F_k = \delta_k F_j$$

für alle j, $k \in \{1, \ldots, n\}$. (Integrabilitätsbedingung) Dann ist F ein Potentialfeld.

3.3 Hilfssatz

Sei $f\colon (a_1, b_1) \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ stetig, stetig differenzierbar nach der ersten Variable,

$$g(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$$

Dann g stetig differenzierbar,

$$g'(x) = \int_{a_2}^{b_2} \partial_1 f(x,y)\,dy$$

($g'(x)$ ist stetig in x nach Satz 33.4).

Beweis:

- Für $a_1 < x' < x'' < b_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{x'}^{x''} \int_{a_2}^{b_2} \partial_1 f(x,y)\,dydx &= \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\int_{x'}^{x''} \partial_1 f(x,y)\,dx}_{f(x'',y)-f(x',y)}\,dy \\ &= g(x'') - g(x') \end{aligned}$$

  Aus „Hauptsatz“: g stetig differenzierbar,

$$g'(x) = \int_{a_2}^{b_2} \partial_1 f(x,y)\,dy$$

Beweis: (Satz 3.2)

- o.E.: $x^* = 0$. Für $x \in U$ sei

$$\psi(x) := \int_0^1 (F(tx)|t)\,dt$$

  mit $\gamma\colon [0,1] \to U : x \mapsto t \cdot x$. Dann:

$$\begin{aligned} \partial_j \psi(x) &\overset{3.3}{=} \int_0^1 \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\partial_j F_k}_{\partial_k F_j}(tx) \cdot t \cdot x_k \right) + F_j(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t \cdot F_j(tx)\right)\,dt \\ &= t \cdot F_j(tx)|_0^1 = F_j(x) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Ohne „sternförmig“: Satz 3.2 nicht richtig, siehe Übung
- „Sternförmig“ kann man durch „einfach zusammenhängend“ ersetzen.

3.4 Folgerung: Exakte Differentialgleichung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, M, $N\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\partial_y M = \partial_x N$. Dann besitzt jeder Punkt von U eine Umgebung, auf der

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

exakt ist. Ist U sternförmig, dann Differentialgleichung exakt.

Beispiele:

1. Differentialgleichung:
$$\underbrace{2x \cdot e^y}_{=:M} + \underbrace{(x^2 \cdot e^y + 2)}_{=:N} \cdot y' = 0$$
Dann:
$$\begin{aligned} \partial_y M(x,y) &= 2x \cdot e^y \\ \partial_x N &= 2x \cdot e^y \end{aligned}$$
Also Integrabilitätsbedingung erfüllt. Finden von ψ:
$$\begin{aligned} \partial_x \psi &= M \\ \Rightarrow \psi(x,y) &= x^2 \cdot e^y + h(y) \\ \Rightarrow \partial_y \psi &= N = x^2 \cdot e^y + h'(y) \\ \psi(x,y) &= x^2 \cdot e^y + 2y \end{aligned}$$
Lösungen gegeben durch:
$$x^2 \cdot e^y + 2y = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. Differentialgleichung:
$$\underbrace{2x}_{=:M} + \underbrace{(x^2 + 2e^{-y})}_{=:N} \cdot y' = 0$$
Dann
$$\partial_y M = 0 \qquad \partial_x N = 2x$$
Also nicht exakt. Aber: Nach Multiplikation mit e^y exakt (siehe 1.). e^y heißt integrierender Faktor.

Suche zur gegebenen Differentialgleichung einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$:
$$\begin{aligned} \partial_y(\mu(y) \cdot M(x,y)) &= \mu'(y) \cdot 2x \\ &\stackrel{!}{=} \partial_x(\mu(y) \cdot N(x,y)) = \mu(y) \cdot 2x \\ \Rightarrow \mu'(y) &\stackrel{!}{=} \mu(y) \\ \mu(y) &= e^y \end{aligned}$$

Für Differentialgleichung
$$N(x,y) + M(x,y) \cdot y' = 0$$
heißt eine Funktion $\mu = \mu(xy)$ ein integrierender Faktor, wenn
$$\mu(x,y) \cdot N(x,y) + \mu(x,y) \cdot M(x,y) \cdot y' = 0$$
exakt ist.

4 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

- Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist

  $$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

  ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung.

- Lösung: $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall),

  $$gr(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) | x \in I\} \subseteq D$$

  und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$.

- (*) als System:

  $$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

- Beziehung zwischen Systemen 1. Ordnung und Differentialgleichung n-ter Ordnung (explizit gegeben):
  Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

  $$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (**)$$

  Differentialgleichung n-ter Ordnung. Reduktion auf System 1. Ordnung $(***)$ für $(y_0 \ldots y_{n-1})$:

  $$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

4.1 Hilfssatz: Differentialgleichung n-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ System 1. Ordnung

1. Sei $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (**). Dann

   $$\psi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \varphi^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Lösung von (***).

2. Ist
$$\psi\colon I \to \mathbb{R}^n, \psi := \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}$$
eine Lösung von (***), so ist ψ_0 Lösung von (**).

Beweis:

1. ψ stetig differenzierbar. Oberen $(n-1)$ Gleichungen von (***) klar nach Definition von φ. Letzte Gleichung „eigentliche“ Differentialgleichung.
2. Oberen (n-1) Gleichungen: ψ_0 n-mal stetig differenzierbar mit
$$\psi_k = \psi_0^{(k)} \qquad k = 0, \dots, n-1$$
Letzte Gleichung: Differentialgleichung (**)

4.2 Hilfssatz: Äquivalenz Lösung Anfangswertproblem

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Sei I Intervall, $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann äquivalent:

1. φ Lösung des Anfangwertproblems
$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y^0$$
2. φ stetig, $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq D$ und $\forall x \in I$:
$$\varphi(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

Beweis:

1. „$1 \Rightarrow 2$“

   1. und 2. Eigenschaft klar. Aus
   $$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$
   und $\varphi(x_0) = y^0$ folgt mit Hauptsatz:
   $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt \\ &= y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \end{aligned}$$

2. „$2 \Rightarrow 1$“

   $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq D, \varphi(x_0) = y^0$: Klar. $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ ist stetig. Aus Hauptsatz 2. Teil:
   $$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$
   ist differenzierbar,
   $$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

4.3 Satz von Picard-Lindelöf; 1. Fassung

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$. Die Funktion

$$f\colon [x_0, x_0 + a] \times B_{\mathbb{R}^n}[y^0, b] \to \mathbb{R}^n$$

sei stetig und genüge der Lipschitzbedingung (bzgl. y-Variablen), d.h.

$$\exists L \geq 0 : \forall y, \tilde{y} \in B_{\mathbb{R}^n}[y^0, b] : |f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq L \cdot |\tilde{y} - y|$$

Dann gibt es $\bar{a} \in (0, a]$, sodass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y^0$$

eine eindeutige Lösung $\varphi\colon [x_0, x_0 + \bar{a}] \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

Beweis:

- Bemerke, dass
$$C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n) := \{\varphi : [x_0, x_0 + \bar{a}] \to \mathbb{R}^n; \varphi \,\text{stetig}\}$$
mit
$$\|\varphi\|_\infty := \sup\{|\varphi(x)|; x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}\}$$
ein Banachraum (s. Satz 4.4). Die Menge M,
$$M := \{\varphi : [x_0, x_0 + \bar{a}] \to B[y^0, b]; \varphi \,\text{stetig}\}$$
ist eine abgeschlossene Teilmenge von $C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n)$. Denn: Für (f_k) in M, $f_k \to f$ bzgl $\|\cdot\|_\infty$, dann $\forall x \in [x_0, x_0 + \bar{a}]$: $f_k(x) \to f_x$, also $f(x) \in B[y^0, b]$. Daher M vollständiger metrischer Raum.

- Sei
$$K := \sup\{|f(x, y)|; x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}, y \in B[y^0, b]\}$$
$K < \infty$, da f eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall. Sei $0 < k < 1$. Wir wählen
$$\bar{a} := \min\left\{a, \frac{b}{K}, \frac{k}{L}\right\}$$

- Wir definieren $\Phi\colon M \to C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n)$ durch
$$\Phi(\varphi)(x) := y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \qquad (x \in [x_0, x_0 + \bar{a}])$$

- Ziel: Es existiert ein eindeutiges φ mit $\Phi(\varphi) = \varphi$, dann Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfssatz 4.2. Zu zeigen: $\Phi(M) \subseteq M$ und Φ strikte Kontraktion. (Dann Banachscher Fixpunktsatz).

  1. Sei $\varphi \in M$. Dann $\Phi(\varphi)$ stetig (klar, da stetig differenzierbar). Für $x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}$:
  $$\begin{aligned} |\Phi(\varphi(x) - y^0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))|\, dt \\ &\leq K \cdot \bar{a} \leq K \cdot \frac{b}{K} \\ &= b \end{aligned}$$
  Damit $\Phi(M) \subseteq M$.

2. Seien $\varphi, \psi \in M$. Für $x_0 \le x \le x_0 + \bar{a}$:

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\varphi)(x) - \Phi(\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\right) \, dt \right| \\
&\le \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))| \, dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} L \cdot |\varphi(t) - \psi(t)| \, dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \, dt \\
&= L \cdot \bar{a} \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \\
&\le k \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty
\end{aligned}
$$

Somit:

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty \le k \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$$

Bemerkungen:

1. Satz 4.3 gilt entsprechend auch „nach links“, also für Intervalle $[x_0 - a, x_0]$. Ebenso für $[x_0 - a, x_0 + a]$. Lösung $\varphi_1 \colon [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi_2 \colon [x_0 - a, x_0] \to \mathbb{R}^n$. Dann $\varphi \colon [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi|_{[x_0, x_0+a]} := \varphi_1$, $\varphi|_{[x_0-a, x_0]} := \varphi_2$ Lösung auf $[x_0 - a, x_0 + a]$, denn

$$\varphi_1'(x_0) = f(x_0, y_0) = \varphi_2'(x_0)$$

2. $\bar{a}$ nicht optimal gewählt. Optimales $\bar{a}$ sollte $\min\{a, \frac{b}{K}\}$ sein. (Siehe Satz 5.1)

3. Nimmt man $\varphi \in M$ (s. Satz 4.3), so konvergiert die Folge $\varphi^0 := \varphi$, $\Phi(\varphi) =: \varphi^1, \Phi(\varphi^1) =: \varphi_2, \ldots$ gegen die Lösung. Nimmt man speziell $\varphi^0 = y^0$, so heißen $\varphi^0, \varphi^1, \ldots$ die Picard-Iterierten. Beispiel:

   - Sei das Anfangswertproblem gegeben mit

     $$y' = xy \qquad y(0) = 1$$

     Dann Picard-Iterierte:

     $$
     \begin{aligned}
     y_0(x) &= 1 \\
     y_1(x) &= 1 + \int_0^x t \, dt \\
     &= 1 + \frac{x^2}{2} \\
     y_2(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt \\
     &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \\
     y_3(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!}
     \end{aligned}
     $$

     Auf Intervallen $[-R, R]$ konvergiert

     $$y_k(x) \to e^{\frac{x^2}{2}}$$

     gleichmäßig.

4. Ist $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, so erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung, wenn es $L \ge 0$ gibt, sodass

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L \cdot |y - \tilde{y}|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$.

f erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung, wenn es zu jedem $(x, y) \in D$ eine Umgebung U gibt, sodass f auf U eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

5. Sei $D = I \times V$, I ein Intervall, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, d.h.

$$:\Leftrightarrow (y, \tilde{y} \in V \Rightarrow \{(1-t) \cdot y + t \cdot \tilde{y}; 0 \le t \le 1\} \subseteq V)$$

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar nach den y-Variablen,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right\| \le L$$

für alle $(x, y) \in D$. Dann erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung.

Beweis: Mit Mittelwertsatz (S.20.2)

$$\begin{aligned} |f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| &\le \left\| \frac{\partial}{\partial y} f(x, (1-t_0) \cdot y + t_0 \cdot \tilde{y}) \right\| \cdot |\tilde{y} - y| \\ &\le L \cdot |\tilde{y} - y| \end{aligned}$$

Nachtrag betreffend Vollständigkeit von $C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n)$; allgemein: Sei (M, d) ein metrischer Raum, $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum. Dann ist

$$C_b(M; X) := \{f\colon M \to X; \text{f stetig, beschränkt}\}$$

mit

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\|; t \in M\} < \infty$$

ein normierter Raum.

4.4 Satz: Vollständigkeit von $C_b(M; X)$

$C_b(M; X)$ ist vollständig, also ein Banachraum.

4.5 Hilfssatz: Gleichmäßige Konvergenz & Stetigkeit

Sei (f_n) eine Folge in $C_b(M; X)$, $f\colon M \to X$, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann gilt: $f \in C_b(M; X)$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass

  $$\sup_{t \in M} \|f(t) - f_n(t)\| \le \varepsilon$$

  für alle $n \ge N$. Dann

  $$\begin{aligned} \sup_{t \in M} \|f(t)\| &= \sup_{t \in M} \|f(t) - f_N(t) + f_N(t)\| \\ &\le \sup_{t \in M} \|f(t) - f_N(t)\| + \sup_{t \in M} \|f_N(t)\| \\ &\le \varepsilon + \|f_n\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

  Also f beschränkt.

- Stetigkeit eigentlich schon erledigt (Satz 20.1). Sei $t \in M$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$:

$$\|f_N(t) - f_N(s)\| \le \varepsilon$$

für alle $s \in M$ mit $d(s,t) \le \delta$. Für diese s:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(s)\| &= \|f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(s) + f_N(s) - f(s)\| \\ &\le \|f(t) - f_N(t)\| + \|f_N(t) - f_N(s)\| + \|f_N(s) - f(s)\| \\ &\le 3\varepsilon \end{aligned}$$

Beweis: (Satz 4.4)

- Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $C_b(M;X)$. Sei $t \in M$. Zeige, dass $(f_n(t))_n$ Cauchy-Folge in X ist. Es existiert $N \in \mathbb{N} : \forall m, n \ge N$:

$$\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$$

Daraus:

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \le \|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$$

für alle m, $n \ge N$. Also $(f_n(t))$ Cauchy-Folge in X. Somit existiert

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

Damit $f\colon M \to X$ punktweise konstruiert.

- Noch zu zeigen: $f_n \to f$ gleichmäßig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall m, n \ge N$:

$$\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$$

und für alle $t \in M$:

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \le \varepsilon$$

Für $m \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} f_n(t) - f_m(t) &\to f_n(t) - f(t) \\ \|f_n(t) - f_m(t)\| &\to \|f_n(t) - f(t)\| \end{aligned}$$

Begründung:

1. In X: $x_n \to x$, $y \in X \Rightarrow x_n + y \to x + y$, da

$$\|(x+y) - (x_n + y)\| = \|x - x_n\| \to 0$$

2. In X: $x_n \to X \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$, da

$$\|x| - |x_n\| \le \|x - x_n\| \to 0$$

Daher

$$\|f_n(t) - f(t)\| \le \varepsilon$$

für alle $n \ge N$, $t \in M$.

$$\sup_{t\in M} |f_n - f| \le \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. Also $f_n \to f$ gleichmäßig. Mit Hilfssatz 4.4: $f \in C_b(M;X)$ und $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

5 Existenz und Eindeutigkeit, 2. Teil

5.1 Satz von Picard-Lindelöf, 2. Fassung

Seien Voraussetzungen wie in Satz 4.3. Sei

$$K := \sup\{|f(x,y)|; x_0 \leq x \leq x_0 + a, y \in B[y^0, b]\}$$

Dann gilt die Behauptung von Satz 4.3 mit

$$\bar{a} = \min\left\{a; \frac{b}{K}\right\}$$

Beweis:

- Auf $C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n)$ betrachten wir die Normen $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$\|\varphi\|_{\infty,\alpha} = \sup\{e^{-\alpha x} \cdot |\varphi(x)|; x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}\}$$

  (Morgenstern-Norm). Jede dieser Normen $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ $(= \|\cdot\|_{\infty,0})$: Mit

  $$\begin{aligned} c &:= \min_{x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}} e^{-\alpha x} \\ C &:= \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \bar{a}} e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

  folgt:

  $$c \cdot \|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\infty,\alpha} \leq C \cdot \|\varphi\|_\infty$$

  Daher

  $$M := \{\varphi\colon [x_0, x_0 + \bar{a}] \to B[y^0, b]; \varphi \,\text{stetig}\}$$

  auch vollständig mit der von dieser Norm $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$ erzeugten Metrik.

- Wie in Satz 4.3 folgt:

  $$\Phi\colon M \to C([x_0, x_0 + \bar{a}]; \mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto [x \mapsto y^0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))\, dt]$$

  bildet M nach M ab.

- Zu zeigen: Man kann α so wählen, dass Φ eine strikte Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$ ist:

$$\begin{aligned}
|\Phi(\varphi)(x)-\Phi(\psi)(x)| &\le e^{-\alpha x}\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|\,dt\\
&\le L\cdot e^{-\alpha x}\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\psi(t)|\,dt\\
&= L\cdot e^{-\alpha x}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}\cdot e^{-\alpha t}\cdot|\varphi(t)-\psi(t)|\,dt\\
&\le L\cdot e^{-\alpha x}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}\cdot\|\varphi-\psi\|_{\infty,\alpha}\,dt\\
&= L\cdot\|\varphi-\psi\|_{\infty,\alpha}\cdot e^{-\alpha x}\cdot\frac{e^{\alpha x}-e^{\alpha x_0}}{\alpha}\\
&= \frac{L}{\alpha}\cdot\|\varphi-\psi\|_{\infty,\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha(x-x_0)})\\
&\overset{\alpha>0}{\le} \underbrace{\frac{L}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot\bar a})}_{<1\,\text{für}\,\alpha\ge L}\cdot\|\varphi-\psi\|_{\infty,\alpha}
\end{aligned}$$

Für diese α:

$$\|\Phi(\varphi)-\Phi(\psi)\|_{\infty,\alpha}\le\underbrace{\frac{L}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot\bar a})}<1\cdot\|\varphi-\psi\|_{\infty,\alpha}$$

Weiter siehe Satz 4.3

Bemerkungen:

1. Aus Satz 5.1 folgt: Ist $\bar a_2\le\bar a$ und ψ eine Lösung des Anfangwertproblems $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y^0$ auf $[x_0,x_0+\bar a_2]$, so ist $\psi=\varphi|_{[x_0,x_0+\bar a_2]}$ (mit φ aus Satz 5.1). Ersetzt man nämlich a durch $\bar a_2$ in Satz 5.1, so erhält man die Eindeutigkeit der Lösung ψ auf $[x_0,x_0+\bar a_2]$.
2. Sei $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ stetig, erfülle lokale Lipschitz-Bedingung. Sei $(x_0,y^0)\in D$. Dann folgt aus Satz 4.3, dasss das Anfangswertproblem

$$y'=f(x,y)\qquad y(x_0)=y^0$$

eine Lösung auf einem Intervall J besitzt (mit $x_0\in\dot J$). Die Lösung ist eindeutig.

5.2 Folgerung: Lösbarkeit von DGL n-ter Ordnung

Sei $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f\colon D\to\mathbb{R}$ sei stetig, erfülle lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. der hinteren Variablengruppe. Sei $(x_0,y_0^0,\dots,y_{n-1}^0)\in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= f(x,y',\dots,y^{(n-1)})\\
y(x_0) &= y_0^0\\
&\vdots\\
y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}^0
\end{aligned}$$

in einer Intervallumgebung von x_0 eine eindeutige Lösung.

Beweis:

- Sei $F\colon D\to\mathbb{R}^n$,

$$F(x,Y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n-1\\ f(x,y_0,y_1,\dots,y_{n-1})\end{pmatrix}\ \text{mit}\ Y=\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

Dann F stetig, erfüllt lokale Lipschitz-Bedingung. Nach obiger Bemerkung gibt es Intervall J mit $x_0 \in \dot{J}$ und eindeutige Lösung $\psi\colon J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangwertproblems

$$Y' = F(x, Y) \qquad Y(x_0) = Y^0 := (y_0^0, \dots, y_{n-1}^0)^T$$

Nach Hilfssatz 4.1 ist ψ_0 die behauptete Lösung: Insbesondere:

$$\begin{aligned} \psi_0(x_0) &= y_0^0 \\ \psi_0'(x_0) &= \psi_1(x_0) = y_1^0 \\ &\vdots \\ \psi_0^{(n-1)}(x_0) &= \psi_{n-1}(x_0) = y_{n-1}^0 \end{aligned}$$

5.3 Satz von Picard-Lindelöf auf einem Streifen

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sei $f\colon [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung. Sei $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y^0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[x_0, x_0 + a]$.

Beweis:

- Fixpunktsatz von Banach mit metrischen Raum $C([x_0, x_0 + a]; \mathbb{R}^n)$, Norm $\|\cdot\|_{\infty,L}$, wobei L die Lipschitz-Konstane von f. Für $\varphi \in C([x_0, x_0 + a]; \mathbb{R}^n)$ ist durch

  $$\Phi(\varphi)(x) := y^0 + \int x_0{}^x f(t, \varphi(t))\, dt$$

  eine Funktion $\Phi\colon C([x_0, x_0 + a]; \mathbb{R}^n) \to C([x_0, x_0 + a]; \mathbb{R}^n)$ definiert. Für Kontraktion: Siehe Satz 5.1.

Bemerkungen:

1. „Zusammenstückeln“ von Lösungen: Ist $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\varphi_1\colon (x_0 - a_1, x_0] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : [x_0, x_0 + a_2) \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von

   $$y' = f(x, y) \qquad \varphi(x_0) = y^0 = \varphi_2(x_0)$$

   Dann ist $\varphi\colon (x_0 - a_1, x_0 + a_2) \to \mathbb{R}^n$,

   $$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für } x_0 - a_1 < x \le x_0 \\ \varphi_2(x) & \text{für } x_0 \le x < x_0 + a_2 \end{cases}$$

   Lösung. In x_0 ist φ differenzierbar, da $\varphi_1'(x_0) = \varphi_2'(x_0)$.

2. Zu Satz 5.3: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, $f\colon [x_0, x_0 + a) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und für jedes $\bar{a} \in (0, a)$ erfülle f eine Lipschitz-Bedingung auf $[x_0, x_0 + \bar{a}] \times \mathbb{R}^n$. Sei $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangwertproblems

   $$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y^0$$

   auf $[x_0, x_0 + a)$.

   Beweis:

   - Sei $0 < a_1 < \ldots < a$ mit $a_k \to a$ $(k \to \infty)$. Mit Satz 5.3: Lösung φ_1 des Anfangwertproblems $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y^0$ auf $[x_0, x_0 + a_1]$. Lösung φ_2 des Anfangwertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0 + a_1) = \varphi_1(x_0 + a_1)$ auf $[x_0 + a_1, x_0 + a_2]$. Uswusf. Zusammenkleben.

6 Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Dann ist

  $$y' = A(x) \cdot y$$

  ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Sei $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann

  $$y' = A(x) \cdot y + b(x)$$

  inhomogenes lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

- Für später: Auch Lösungen $\varphi\colon I \to \mathbb{C}^n$ betrachten. φ heißt stetig (differenzierbar), falls dies für

  $$\begin{pmatrix} \Re(\varphi) \\ \Im(\varphi) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{2n}$$

  gilt. Entsprechend $A\colon I \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{C}^n$ zugelassen. Einheitliche Behandlung durch $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$

- Beispiel:

  1. Sei $a = a_1 + \imath \cdot a_2 \in \mathbb{C}$,

     $$y' = a \cdot y$$

     Bedeutet:

     $$\begin{aligned} y_1' + \imath \cdot y_2' &= (a_1 + \imath \cdot a_2) \cdot (y_1 + \imath \cdot y_2) \\ &= (a_1 \cdot y_1 - a_2 \cdot y_2) + \imath \cdot (a_2 \cdot y_1 + a_1 \cdot y_2) \end{aligned}$$

     Als System reeller Differentialgleichungen:

     $$\begin{aligned} y_1' &= a_1 \cdot y_1 - a_2 \cdot y_2 \\ y_2' &= a_2 \cdot y_1 + a_1 \cdot y_2 \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

     Lösung:

     $$\begin{aligned} y(x) &= c \cdot e^{ax} \\ &= c \cdot e^{a_1 \cdot x} \cdot (\cos a_2 \cdot x + \imath \cdot \sin a_2 \cdot x) \end{aligned}$$

     Verifikation durch Ableitung.

6.1 Satz: Lösbarkeit lineares System DGL 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Seien $x_0 \in I$, $y^0 \in K^n$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n$ des Anfangwertproblems

$$y' = A(x)\cdot y + b(x) \qquad y(x_0) = y^0$$

Beweis:

- Benutze Satz 5.3 auf Intervallen der Form $[x_0, x_0 + a] \subseteq I$ mit

  $$f\colon [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, f(x, y) = A(x)\cdot y + b(x)$$

  . Wegen der Kompaktheit von $[x_0, x_0 + a]$ ist

  $$L := \max\{\|A(x)\|; x \in [x_0, x_0 + a]\} < \infty$$

  Begründung: $x \mapsto A(x)$ stetig, daher $x \mapsto \|A(x)\|$ stetig; $\mathbb{K}^{n\times n} \ni B \mapsto \|B\|$ stetig, $|\|B\| - \|C\|| \leq \|B - C\|$

- Für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$ gilt:

  $$\begin{aligned} |f(x,\tilde{y}) - f(x,y)| &= |A(x)\cdot(\tilde{y} - y)| \\ &\leq \|A(x)\|\cdot|\tilde{y} - y| \\ &\leq L\cdot|\tilde{y} - y| \end{aligned}$$

  Aus Satz 5.3: Anfangswertproblem lösbar auf $[x_0, x_0 + a]$. Rest „zusammenstückeln“.

6.2 Satz: Lösungsraum linearer homogener Systeme DGL 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Sei

$$L := \{\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n; \varphi \text{ Lösung von } y' = A(x)\cdot y\}$$

Dann ist L ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim L = n$. Seien $\varphi^1, \dots, \varphi^k \in L$. Dann sind äquivalent:

1. $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ linear unabhängig
2. $\exists x_0 \in I : \varphi^1(x_0), \dots, \varphi^k(x_0) (\in \mathbb{K}^n)$ sind linear unabhängig
3. $\forall x \in I : \varphi^1(x), \dots, \varphi^k(x) (\in \mathbb{K}^n)$ sind linear unabhängig.

Beweis:

- L ist Vektorraum: Die Abbildung

  $$T\colon C^1(I; \mathbb{K}^n) \to C(I; \mathbb{K}^n), \varphi \mapsto \varphi' - A(.)\cdot\varphi$$

  ist linear. Es gilt: $L = \ker(T)$. Also L Vektorraum.

- Für alle $x_0 \in I$ gilt: Die Abbildung

  $$R\colon L \to \mathbb{K}^n, \varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

  ist linear und bijektiv.

  1. Linear: Klar (Punktweise Addition)
  2. Surjektivität: Ist $y \in \mathbb{K}^n$, so gibt es eine Lösung φ des Anfangwertproblems

     $$y' = A(x)\cdot y \qquad y(x_0) = y^0$$

     Dann $R\varphi = \varphi(x_0) = y^0$.

3. Injektivität: Ist $R\varphi = 0$ mit $\varphi \in L$, dann φ Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = A(x) \cdot y \qquad y(x_0) = 0$$

   Also $\varphi = 0$ wegen Eindeutigkeit.

- Damit $\dim L = n$, da L und $\mathbb{K}^n$ isomorph sind.
- Äquivalenz von (1)-(3): Vektorraumisomorphismen erhalten lineare Unabhängigkeit.

Bemerkungen:

1. Basis von L: Wähle $x_0 \in I$, löse Anfangswertproblem

$$y' = A(x) \cdot y \qquad y(x_0) = e_k$$

   Damit φ_k. Dann $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ Basis von L.

2. Seien $\varphi, \psi \in C([0,1];\mathbb{R})$. Dann möglich: φ, ψ linear unabhängig, aber $\varphi(x), \psi(x)$ linear abhängig für alle $x \in [0,1]$.

   Beispiel: $\varphi(x) = 0$ für $x \geq \frac{1}{2}$, $\psi(x) = 0$ für $x \leq \frac{1}{2}$, aber $\varphi, \psi \neq 0$.

Definitionen:

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Lösungsbasis (Fundamentalsystem von Lösungen) der Differentialgleichungen $y' = A(x)\dot{y}$: Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ von L.
- Fundamentalmatrix: $\Phi = (\varphi^1 \ldots \varphi^n)$, wobei $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ Lösungsbasis
- Sei $x_0 \in I$, Φ Fundamentalmatrix mit $\Phi(x_0) = E_n$ heißt Lösungsmatrix für $y' = A(x) \cdot y$ zum Anfangswertproblem in x_0

Bemerkungen:

- Sei Φ eine Fundamentalmatrix zu $y' = A(x) \cdot y$. Dann

$$L = \{\Phi(.) \cdot c; c \in \mathbb{K}^n\}$$

- Sei Φ eine Lösungsmatrix zum Anfangswertproblem in x_0. Dann für $y^0 \in \mathbb{K}^n$,

$$\varphi\colon x \mapsto \Phi(x) \cdot y^0$$

- Ist Φ Fundamentalmatrix, dann

$$x \mapsto \Phi(x) \cdot \Phi(x_0)^{-1}$$

  Lösungsmatrix zum Anfangswertproblem in x_0. ($\Phi(x_0)$ invertierbar nach Satz 6.2)

  Beweis: $\Phi(x_0) \cdot \Phi(x_0)^{-1} = E_n$. Spalten $\Phi(.) \cdot \Phi(x_0)^{-1}$ sind Lösungen.

6.3 Satz: Lösungsraum linearer inhomogener Systeme DGL 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Sei L wie oben. Sei

$$L_i = \{\varphi : \varphi \text{ Lösung von } y' = A(x) \cdot y + b(x)\}$$

Sei $\psi_0 \in L_i$. Dann gilt:

$$L_i = \psi_0 + L \ (= \{\psi_0 + \varphi_i; \varphi_i \in L\})$$

Beweis: Klar. (Lineare Algebra)

6.4 Satz: Variation der Konstanten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetig, Φ eine Fundamentalmatrix von $y' = A(x)\cdot y$. Dann erhält man eine Lösung ψ von $y' = A(x)\cdot y + b(x)$ durch den Ansatz:

$$\psi(x) = \Phi(x)\cdot c(x)$$

Beweis:

- Aus $\psi = \Phi \cdot c$ folgt:

$$\begin{aligned} \psi' &= \Phi'(x)\cdot c(x) + \Phi \cdot c'(x) = A\cdot\Phi\cdot c + \Phi\cdot c' \\ A\cdot\psi + b &= A\cdot\Phi\cdot c + b \end{aligned}$$

  Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \psi' &\overset{!}{=} A\cdot\psi + b \\ \Phi\cdot c' &= b \\ c'(x) &= \Phi^{-1}(x)\cdot b(x) \\ c(x) &= \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt \end{aligned}$$

  mit $x_0 \in I$ beliebig.

- Da man dies rückwärts rechnen kann, erhält man mit diesem c eine Lösung $\psi = \Phi\cdot c$.

Bemerkung:

1. Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = A(x)\cdot y + b(x) \qquad y(x_0) = y^0$$

   ist

$$\varphi(x) = \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt$$

   (Variation-der-Konstanten-Formel)

7 Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wie findet man eine Lösungsbasis von $y' = A \cdot y$?

1. Ansatz:
$$\varphi(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot c$$
mit $c \in \mathbb{K}^n$ für Lösungen. Dann:
$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot c \stackrel{!}{=} e^{\lambda \cdot x} \cdot A \cdot c \\ \Rightarrow A \cdot c &= \lambda \cdot c \end{aligned}$$
d.h. λ Eigenwert von A zum Eigenvektor c.
2. Ansatz: $e^{x \cdot A}$ für Fundamentalmatrix

Bemerkungen:

1. Eigenwerte bestimmt man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) \stackrel{!}{=} 0$$
2. Für $K = \mathbb{C}$ besitzt $p(\lambda)$ n Nullstellen (bei entsprechender geometrischer Vielfachheit),
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$
mit $p(\lambda_i) = 0$ für $i = 0, \ldots, n$ nach Fundamentalsatz der Algebra.
3. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ voneinander verschiedene Eigenwerte und $c^1, \ldots, c^k$ zugehörige Eigenvektoren, so sind $c^1, \ldots, c^k$ linear unabhängig. (Damit auch $\varphi^i = e^{\lambda_i \cdot c} \cdot c_i$ für $i = 1, \ldots, k$ sind linear unabhängig.)
4. A diagonalisierbar $:\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär: $C^{-1} \cdot A \cdot C$ diagonal (d.h. A ähnlich zu einer Diagonalmatrix) $\Leftrightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A mit zugehörigen Eigenvektoren $c^1, \ldots, c^n$, die linear unabhängig sind.

   Begründung: Ist Λ eine Diagonalmatrix, C regulär mit $C = (c^1 \ldots c^n)$, so bedeutet
$$\begin{aligned} A \cdot C &= C \cdot \Lambda \\ \begin{pmatrix} A \cdot c^1 & \ldots & A \cdot c^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot c^1 & \ldots & \lambda_n \cdot c^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
dass diese Spalten $c^1, \ldots, c^n$ von C Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind.
5. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A symmetrisch $\Rightarrow A$ diagonalisierbar (Analysis II)

   Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A hermitesch $\Rightarrow A$ diagonaliserbar, alle Eigenwerte reell

7.1 Satz: Lösungen mit Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $c^1, \dots, c^k$ (linear unabhängig). Dann sind

$$\varphi^j(x) = e^{\lambda_j \cdot x} \cdot c^j \qquad j = 1, \dots, k$$

linear unabhängige Lösungen des Systems $y' = A \cdot y$. Ist A diagonalisierbar, so ergibt sich eine Lösungsbasis.

Beweis:

- φ^j Lösungen siehe oben. $\varphi^1(0) = c, \dots, \varphi^k(0) = c_k$ linear unabhängig.

Beispiel:

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow (A - \lambda \cdot E) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ungünstig, obwohl $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\lambda_{1/2} = \pm\imath$$

Eigenvektoren:

$$c^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} \qquad c^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \end{pmatrix}$$

Lösungsbasis:

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{\imath x} \\ -\imath \cdot e^{\imath x} \end{pmatrix} \qquad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-\imath x} \\ \imath \cdot e^{-\imath x} \end{pmatrix} = \overline{\varphi_1(x)}$$

Da A reell ist, gibt es auch eine reelle Lösungsbasis. Erhält man aus φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \Re(\varphi_1(x)) \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{2\imath} \cdot (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} = \Im(\varphi_1(x)) \end{aligned}$$

Damit Fundamentalmatrix:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dann

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix von $y' = \Lambda \cdot y$.

Ist $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$, dann

$$\Phi(x) = C \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$$

Fundamentalmatrix von $y' = A \cdot y$, denn

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= C \cdot \Lambda \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot C^{-1} \\
&= \underbrace{C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}}_{A} \cdot \underbrace{C \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot C^{-1}}_{\Phi(x)}
\end{aligned}$$

2. Für nicht-diagonalisierbaren Fall: 2. Ansatz verwenden.

7.2 Satz: Matrixnormen

1. Auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind die Matrixnormen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|_2$ äquivalent, wobei

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{|A \cdot x|; x \in \mathbb{K}^n, |x| \leq 1\} \\
|A|_2 &= \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Genauer:

$$\|A\| \leq |A|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|$$

Der normierte Raum $(\mathbb{K}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

2. Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Beweis:

1. Für $\|A\| \leq |A|_2$: Sei $x \in \mathbb{K}^n$, dann:

$$\begin{aligned}
|A \cdot x|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k \right|^2 \\
&\overset{CSU}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right) \\
&= |A|_2^2 \cdot |x|^2 \\
\Rightarrow \|A\| &\leq |A|_2
\end{aligned}$$

Für $|A|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|$: Für $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned}
|A \cdot e_k|^2 &\leq \|A\|2 \\
\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|^2 &\leq \|A\|^2 \\
\Rightarrow |A|_2^2 &\leq n \cdot \|A\|^2
\end{aligned}$$

Da $(\mathbb{K}^{n\times n}, |\cdot|_2)$ vollständig ist, ist auch $(\mathbb{K}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ vollständig.

2. Für $x \in \mathbb{K}^n$:

$$|A \cdot B \cdot x| \leq \|A\| \cdot |B \cdot x| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|$$

7.3 Satz: Exponentialfunktion mit Matrix

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Reihe

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k$$

absolut konvergent in $(\mathbb{K}^{n \times n}, \|\cdot\|)$,d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \|A^k\| \text{ konvergent}$$

daher konvergent. Sind A, $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, dann:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Beweis:

- Wegen $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ (Satz 7.2.2) gilt:

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty$$

  Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz. Beweis:

  – Sei X ein Banachraum, (x_k) in X mit

    $$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$

    Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$:

    $$\forall k \geq j \geq N : \sum_{l=j}^{k} \|x_l\| \leq \varepsilon$$

    Für diese k, j folgt:

    $$\left\| \sum_{l=1}^{k} x_l - \sum_{l=1}^{j-1} x_l \right\| = \left\| \sum_{l=j}^{k} x_l \right\| \leq \sum_{l=j}^{k} \|x_l\| \leq \varepsilon$$

    Also $(\sum_{l=1}^{k} x_l)_k$ Cauchy-Folge, daher konvergent.

- Aus $A \cdot B = B \cdot A$ folgt:

  $$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j \cdot B^{k-j}$$

  damit Behauptung (wie in $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$).

7.4 Satz: Fundamentalmatrix mittels Exponentialfunktion

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist

$$\Phi(x) = e^{x \cdot A} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

eine Fundamentalmatrix von

$$y' = A \cdot y$$

Beweis: (mit Begründung für Exponentialreihe)

- Als Picard-Iterierte für das Anfangswertproblem

$$Y' = A \cdot Y \qquad Y(0) = E_n$$

(in $\mathbb{K}^{n\times n}$, also $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$) ergeben sich:

$$\begin{aligned}
\Phi^0(x) &= E_n \\
\Phi^1(x) &= E_n + \int_0^x A \cdot E_n \, dt = E_n + x \cdot A \\
\Phi^2(x) &= E_n + \int_0^x (A \cdot t \cdot A + A) \, dt \\
&= E_n + x \cdot A + \frac{x^2}{2} \cdot A^2 \\
\Phi^k(x) &= \ldots = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \cdot A^j
\end{aligned}$$

Für $k \to \infty$:

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot A^j$$

Beispiel:

1. Zum „diagonalisierbaren Fall“ konträr:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad (^*)$$

   λ ist n-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Eigenraum eindimensional (Basisvektor e_1), denn

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot E_n - A) \cdot x &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdot x &= 0 \\
\Leftrightarrow x_2 = \ldots = x_n &= 0 \qquad x_1 \text{beliebig}
\end{aligned}$$

7.5 Satz: Fundamentalmatrix für $(A - \lambda \cdot E_n)^m = 0$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda \in K$, $m \in \mathbb{N}$ mit

$$(A - \lambda \cdot E_n)^m = 0$$

Dann ist eine Fundamentalmatrix von

$$y' = A \cdot y$$

gegeben durch

$$\Phi(x) = e^{\lambda \cdot x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot E_n)^j$$

Beweis:

- Es gilt mit der Vertauschbarkeit nach dem vorherigen Satz:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= e^{x\cdot A} = e^{x\cdot\lambda\cdot E_n + x\cdot(A-\lambda\cdot E_n)} \\ &\overset{7.3}{=} e^{x\cdot\lambda\cdot E_n}\cdot e^{x\cdot(A-\lambda\cdot E_n)} \\ &= e^{\lambda\cdot x}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\cdot(A-\lambda\cdot E_n)^j \\ &= e^{\lambda\cdot x}\cdot\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^j}{j!}\cdot(A-\lambda\cdot E_n)^j\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Für (*) gilt mit $m = n$:

$$A-\lambda\cdot E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda\cdot E_n)^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Damit Fundamentalmatrix:

$$\Phi(x) = e^{\lambda\cdot x}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x & & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsbasis:

$$\begin{aligned}\varphi^1(x) &= e^{\lambda\cdot x}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \\ \varphi^1(x) &= e^{\lambda\cdot x}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) \\ \varphi^3(x) &= e^{\lambda\cdot x}\cdot(e_3 + x\cdot e_2 + \frac{x^2}{2}\cdot e_1) \\ &\vdots \\ \varphi^n(x) &= e^{\lambda\cdot x}\cdot(e_n + x\cdot e_{n-1} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e_1)\end{aligned}$$

e_1 ist Eigenvektor von A:

$$(A-\lambda\cdot E_n)\cdot e_1 = 0$$

$e_2, \ldots, e_n$ heißen „iterierte Eigenvektoren“, „Hauptvektoren“

$$\begin{aligned}(A - \lambda \cdot E_n) \cdot e_2 &= e_1 \\ &\vdots \\ (A - \lambda \cdot E_n) \cdot e_n &= e_{n-1}\end{aligned}$$

7.6 Satz: Verallgemeinerte Eigenräume

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $A\colon V \to V$ linear, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_k \neq \lambda_j$ für $k \neq j$, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \\ p(A) &= 0\end{aligned}$$

Seien V_k die verallgemeinerten Eigenräume,

$$V_k := \ker((A - \lambda_k \cdot I)^{m_k}) \qquad k = 1, \ldots, r$$

mit I als Identität in V. Dann:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$$

(direkte Summe: $V_1 + \ldots + V_r = V$ und für $x \in V$ ist die Darstellung $x = x_1 + \ldots + x_r$ mit $x_i \in V_i$ eindeutig.)

Bemerkung:

- Ist
$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + a_0$$
dann
$$p(A) = A^m + a_{m-1} \cdot A^{m-1} + \ldots + a_0 \cdot E_n$$

Beweis:

1. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, $m \in \mathbb{N}$, so ist $A - \lambda \cdot I$ bijektiv auf $\ker(A - \mu \cdot I)^m$. $\ker(A - \mu \cdot I)^m$ ist Untervektorraum, invariant unter A, d.h. für $x \in V$ mit $(A - \mu \cdot I)^m \cdot x = 0$, dann
$$(A - \mu \cdot I)^m \cdot A \cdot x = A \cdot (A - \mu \cdot I)^m \cdot x = 0$$
Ohne Einschränkung: $V = \ker(A - \mu \cdot I)^m$, $\mu = 0$, $\lambda = 1$. Dann Inverse von $I - A$ gegeben durch
$$I + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}$$
(Beachte $A^m = 0$).

2. Für $V = V_1 + \ldots + V_r$: Induktion über r
   - Induktionsanfang: $r = 1$, Klar, da
   $$V_1 = \ker(\lambda_1 - A)^{m_1} = V$$
   - $r - 1 \to r$: Sei $x \in V$, dann
   $$(A - \lambda_1)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}} \cdot x \in \ker((\lambda_r - A)^{m_r})$$
   da $p(A) \cdot x = 0$. Nach (1) gibt es $x_r \in V_r$, sodass
   $$(A - \lambda_1)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}} x_r = (A - \lambda_1)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}} \cdot x$$

d.h.

$$x - x_r \in \underbrace{\ker((A-\lambda_1)^{m_1}\cdots(A-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}})}_{=:V'}$$

Mit $A' := A|_{V'}$, $p'(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$ gilt $p'(A') = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung:

$$V' = V_1 + \ldots + V_{r-1}$$

also existieren $x_k \in V_k$ für $k = 1, \ldots, r-1$ mit

$$x - x_r = x_1 + \ldots + x_{r-1}$$

3. Summe direkt: Seien $x_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit

$$\sum_{i=1}^r x_i = 0$$

Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= (A-\lambda_1)^{m_1}\cdots(A-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^r x_i\right) \\ &= (A-\lambda_1)^{m_1}\cdots(A-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}} \cdot x_r \end{aligned}$$

mit

$$\forall x_k \in V_k : (A-\lambda_k)^{m_k} \cdot x_k = 0$$

Da $(A-\lambda_k)^{m_k}$ bijektiv auf V_r ist $x_r = 0$. usw. Also $x_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$.

Bemerkung:

- Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$ Polynom mit $p(A) = 0$. (z.B. chrakteristisches Polynom von A (Satz von Cayley-Hamilton) oder Minimalpolynom (und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)). Seien V_k wie in Satz 7.6, $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, seien $P_1, \ldots, P_r$ die entsprechenden Projektionen ($P_k^2 = P_k$).

7.7 Satz: Exponentialfunktion mit Matrix II

Mit obigen Bezeichnungen:

$$e^{xA} = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k x} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{x^j}{j!} \cdot (A-\lambda_k)^j \cdot P_k$$

Beweis:

- Wegen

$$E_n = \sum_{k=1}^r P_k$$

gilt

$$\begin{aligned} e^{x\cdot A} &= \sum_{k=1}^r e^{x\cdot A} P_k \\ e^{x\cdot A} P_k &= e^{\lambda_k \cdot x} \cdot e^{x\cdot(A-\lambda_k)} \cdot P_k \\ &= e^{x\cdot\lambda_k} \cdot \sum_{j=0}^\infty \frac{x^j}{j!}(A-\lambda_k)^j \cdot P_k \\ &= e^{\lambda_k\cdot x} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{x^j}{j!} \cdot (A-\lambda_k)^j \cdot P_k \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Ist A diagonalisierbar, dann gilt $(A-\lambda_k)\cdot P_k = 0$ für $k=1,\dots,r$.
$$e^{x\cdot A} = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k \cdot x} P_k$$
Lösungsbasis zu $y' = A\cdot y$: Für $1\le k\le r$ sei e^{k_j} für $j=1,\dots,n_k$ mit $\dim V_k = n_k$ Basis von V_k. Dann
$$e^{\lambda_k\cdot x}\cdot c^{k_j} \qquad j=1,\dots,n_k; k=1,\dots,r$$
Lösungsbasis.

2. In der Praxis kann man vermeiden, die P_k zu berechnen, vgl. folgendes Beispiel.

Beispiel:

1. Löse
$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot y$$
Charakteristisches Polynom:
$$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$$
Eigenwerte:
$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_{2/3}=1$$
also $m_1=1$, $m_2=2$. Eigenvektoren:
$$c^1=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad c^2=\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}$$
Damit Lösungen:
$$y^1=e^{-x}\cdot c^1 \qquad y^2=e^x\cdot c^2$$
Ansatz für weitere Lösung:
$$y(x)=e^x\cdot\begin{pmatrix}ax+b\\cx+d\\ex+f\end{pmatrix}$$
Einsetzen in DGL:
$$\begin{pmatrix}ax+b\\cx+d\\ex+f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\c\\e\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}(2a+2c+9e)\cdot+(2b+2d+9f)\\(a+3e)\cdot x+(b+3f)\\(-c-e)\cdot x+(-d-f)\end{pmatrix}$$
lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Unbekannten. Lösung:
$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\-2\\-1\\1\ 0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (s,r\in\mathbb{R})$$
Dann:
$$y(x)=r\cdot\begin{pmatrix}-5x-3\\-2x-1\\x\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}$$
Für $r=1, s=0$:
$$y^3(x)=e^x\cdot\begin{pmatrix}-5x-3\\-2x-1\\x\end{pmatrix}$$

Jetzt: Wie kann man P_i berechnen? Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, p mit $p(A) = 0$, $V_1, \dots, V_r$, $P_1, \dots, P_r$ wie vor Satz 7.7,

$$A_{kj} = (A - \lambda_k \cdot E)^j \cdot P_k \qquad k = 1, \dots, r; j = 0, \dots, m_k - 1$$

7.8 Hilfssatz: Polynomberechnung

Für Polynome q gilt:

$$q(A) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{q^{(j)}(\lambda_k)}{j!} \cdot A_{kj}$$

Bemerkungen:

1. Falls man A_{kj} kennt, kann man q(A) leicht für Polynome hoher Ordnung berechnen.
2. Hilfssatz ist nützlich zur Berechnung von A_{kj}, insbesondere für $P_k = A_{k0}$. Nimmt man

   $$q(\lambda) = 1, = \lambda, \dots, = \lambda^{m-1}$$

   mit

   $$m = \sum_{k=1}^{r} m_k$$

   so erhält man m Gleichungen, für m unbekannte A_{kj}. Dann Eliminieren.

   Oder, als Beispiel: Sei

   $$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)^2$$

   Für $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^2$:

   $$\begin{aligned} (A - \lambda_2)^2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \cdot P_1 \\ \Rightarrow P_1 &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \cdot (A - \lambda_2)^2 \\ P_2 &= E_n - P_1 \\ A_{21} &= (A - \lambda_2) \cdot P_2 \end{aligned}$$

Beweis:

- Es gilt:

  $$q(A) = \sum_{k=1}^{r} q(A) \cdot P_k$$

  Taylorentwicklung an λ_k:

  $$q(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{(j)}(\lambda_k)}{j!} \cdot (\lambda - \lambda_k)^j$$

  (endliche Reihe, da Polynom). Damit:

  $$\begin{aligned} q(A) \cdot P_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{(j)}(\lambda_k)}{j!} \cdot \underbrace{(A - \lambda_k)^j \cdot P_k}_{=0 \text{ für } j \geq m_k} \\ \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{q^{(j)}(\lambda_k)}{j!} \cdot (A - \lambda_k)^j \cdot P_k \end{aligned}$$

Beispiel:

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
(Vergleich Beispiel 1 nach Satz 7.7). Dann
$$p(\lambda) = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)^2$$
Mit $q(\lambda) := (\lambda - 1)^2$ gilt:
$$\begin{aligned} (-1-1)^2 \cdot P_1 &= (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P_2 &= E_3 - P_1 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Damit:
$$e^{x \cdot A} = \frac{e^{-x}}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^x}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{e^x}{2} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen zum Minimalpolynom, Satz von Cayley-Hamilton. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

1. $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist endlich-dimensional, daher gibt es $m \in \mathbb{N}$, minimal, sodass $E^n, A, \ldots, A^m$ linear abhängig:
$$A^m + a_{m-1} \cdot A^{m-1} + \ldots + a_0 \cdot E_n = 0$$
Damit $p(A) = 0$ für
$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + a_0$$
p heißt Minimalpolynom.

2. Satz von Cayley-Hamilton: Es gilt:
$$A \cdot A_{adj} = \det A\dot{E}_n$$
Damit:
$$(\lambda \cdot E_n - A) \cdot \underbrace{(\lambda \cdot E_n - A)_{adj}}_{MP} = \underbrace{\det(\lambda \cdot E_n - A)}_{EP} \cdot E_n$$
mit
   - MP: Matrixpolynom
$$C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot \lambda + C_0$$
   - EP: Eigenwertpolynom von A
$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 =: p_A(\lambda)$$

   Mit Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} \lambda^n &: \quad E_n = C_{n-1} \\ \lambda^{n-1} &: \quad a_{n-1} \cdot E_n = C_{n-2} - A \cdot C_{n-1} \\ \lambda^{n-2} &: \quad a_{n-2} \cdot E_n = C_{n-3} - A \cdot C_{n-2} \\ &\vdots \\ \lambda &: \quad a_1 \cdot E_n = C_0 - A \cdot C_1 \\ \lambda^0 &: \quad a_0 \cdot E_n = -A \cdot C_0 \end{aligned}$$
Multiplizieren mit A^i, dann aufaddieren:
$$p_A(A) = A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot E_n = 0$$
Insbesondere: $m \leq n$.

3. Sei $\mathbb{K}[\lambda]$ Polynomring mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Dann ist

$$J := \{p \in \mathbb{K}[\lambda]; p(A) = 0\}$$

ein Ideal in $\mathbb{K}[\lambda]$ (J Unterring, $\mathbb{K}[\lambda]J \subseteq J$). Da $\mathbb{K}[\lambda]$ ein Hauptidealring ist, gibt es also $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $J = \mathbb{K}[\lambda] \cdot p$. Insbesondere gibt es $q \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $p_A = q \cdot p$ (p: Minimalpolynom) und p teilt p_A.

8 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, \dots, a_{n-1} \colon I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = 0$$

homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Ist $b \colon I \to \mathbb{K}$ stetig, dann

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

8.1 Satz: Lösungsraum + Lösbarkeit

Seien Voraussetzungen wie oben. Dann gilt:

1. Seien $x_0 \in I$, $y_0^0, \dots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{K}$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $\varphi \colon I \to \mathbb{K}$ des Anfangwertproblems

$$\begin{array}{rcl} y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y &=& b(x) \\ y(x_0) = y_0^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) &=& y_{n-1}^0 \end{array}$$

2. Sei
$$L := \{\varphi \colon I \to \mathbb{K}; \varphi \,\text{Lösung der homogenen Gleichung}\}$$
Dann ist L ein n-dimensionaler Vektorraum.

3. Sei
$$L_i := \{\varphi \colon I \to \mathbb{K}; \varphi \,\text{Lösung der inhomogenen Gleichung}\}$$
Für jedes $\psi \in L_i$ gilt dann:
$$L_i = \psi + L = \{\psi + \varphi; \varphi \in L\}$$
(affiner Teilraum)

4. N Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für ein (alle) $x \in I$ die Wronski-Determinante
$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$
ungleich Null ist.

Beweis:

- Die inhomogene Gleichung ist äquivalent zu inhomogenen Systemen

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_0(x) \cdot y_0 - \ldots - a_{n-1}(x) \cdot y_{n-1} + b(x) \end{aligned}$$

  in dem Sinn, dass jeder Lösung φ der Differentialgleichung eine Lösung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

  des Systems entspricht und umgekehrt.

- Auch: Die Abbildung (für $b = 0$):

$$J \colon L^{\text{Gleichung}} \to L^{\text{System}} : \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

  ist Isomorphismus der Vektorräume.

- Daher folgt 1. aus Satz 6.1.3 und 2. folgt aus Satz 6.2.

- Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^{n-1}(I)$: $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \varphi_k' \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in I : \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}(x), \ldots, \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \varphi_k' \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)} \end{pmatrix}(x) \text{ linear unabhängig}$$

  der 2. Schritt folgt, falls φ_j Lösungen der homogenen Differentialgleichung mit Satz 6.2. Für $k = n$ folgt 4.

- 3.: Lineare Algebra (Satz 6.3)

Bemerkung:

- Eine Basis von L in Satz 8.1 heißt Lösungsbasis (Fundamentalsystem).

Beispiele:

1. Legendre'sche Differentialgleichung: Auf $(-1, 1)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$(1 - x^2) \cdot y'' - 2xy' + n \cdot (n + 1) \cdot y = 0$$

   Eine Lösung davon ist das Legendre-Polynom vom Grad n,

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \cdot (x^2 - 1)^n$$

2. Hermitesche Differentialgleichung: Auf $\mathbb{R}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y'' - 2xy' + 2n \cdot y = 0$$

Eine Lösung ist das Hermite-Polynom vom Grad n,

$$H_n(x) := (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

(siehe Forster, Analysis II, S. 132)

3. Laguerrsche Differentialgleichung: Auf $(0, \infty)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$x \cdot y'' + (1 - x) \cdot y' + n \cdot y = 0$$

Lösung sind die Laguerre-Polynome vom Grad n,

$$L_n(x) := e^x \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n \cdot e^{-x})$$

4. Besselsche Differentialgleichung: Auf $(0, \infty)$ mit Parameter $p \in \mathbb{R}$,

$$y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) \cdot y = 0$$

Lösungen heißen Zylinderfunktionen der Ordnung p. Spezielle Basis: J_p (Besselfunktion p-ter Ordnung) bzw. N_p (Neumann-Funktion p-ter Ordnung). Für J_0, N_0 siehe Forster, Analysis II. Für $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$: Übung.

Bemerkung:

- Variation der Konstanten:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

auf Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungsbasis der homogenen Differentialgleichung. Suche Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$\varphi(x) = c_1(x) \cdot \varphi_1(x) + \ldots + c_n(x) \cdot \varphi_n(x)$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \underbrace{c_1'(x) \cdot \varphi_1(x) + \ldots + c_n'(x) \cdot \varphi_n(x)}_{\overset{!}{=}0} \\
&\quad + c_1(x) \cdot \varphi_1'(x) + \ldots + c_n(x) \cdot \varphi_n'(x) \\
\varphi''(x) &= \underbrace{c_1'(x) \cdot \varphi_1'(x) + \ldots + c_n'(x) \cdot \varphi_n'(x)}_{\overset{!}{=}0} \\
&\quad + c_1(x) \cdot \varphi''(x) + \ldots + c_n(x) \cdot \varphi_n''(x) \\
&\vdots \\
\varphi^{(n-1)}(x) &= \underbrace{c_1'(x) \cdot \varphi_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x) \cdot \varphi_n^{(n-2)}}_{\overset{!}{=}0} \\
&\quad + c_1(x) \cdot \varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x) \cdot \varphi_n^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

bisher: $(n-1)$ Gleichungen für n Unbekannte. Schließlich:

$$\begin{aligned}
b(x) &\overset{!}{=} \varphi^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot \varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot \varphi \\
&= c_1'(x) \cdot \varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x) \cdot \varphi^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

(Restliche Terme entfallen, da φ_i Lösungen der homogenen Differentialgleichung). Damit inhomogenes lineares System von n Gleichungen für $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

regulär (Wronski-Determinante). Auflösen nach $c_1', \dots, c_n'$. Integrieren.

Beispiel:

1. Für

$$y'' - y' = e^x$$

ist Lösungsbasis:

$$\varphi_1(x) = 1 \qquad \varphi_2(x) = e^x$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= \underbrace{c_1' \cdot \varphi_1 + c_2' \cdot \varphi_2}_{\overset{!}{=}0} + c_1 \cdot \varphi_1' + c_2 \cdot \varphi_2' \\ \Rightarrow \varphi'' - \varphi' &= c_1' \cdot \varphi_1' + c_2' \cdot \varphi_2' + \underbrace{c_1 \cdot \varphi'' + c_2 \cdot \varphi_2'' - c_1 \cdot \varphi_1' - c_2 \cdot \varphi_2'}_{0} \end{aligned}$$

Damit lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow c_2' &= 1 \qquad \longrightarrow c_2(x) = x \\ c_1' &= -e^x \qquad \longrightarrow c_1(x) = -e^x \end{aligned}$$

Damit spezielle Lösung:

$$\varphi(x) = -e^x + x \cdot e^x$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

9 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Typ: $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$,

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = 0$$

auf $I = \mathbb{R}$. Mit dem Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_0$$

und dem Differentialoperator

$$\partial : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \colon f \mapsto f'$$

wird die Differentialgleichung zu

$$p(\partial) y = 0$$

p heißt das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $p(\partial)y = 0$.

9.1 Hilfssatz

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$p(\partial) e^{\lambda \cdot x} = p(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Beweis:

$$\partial^j e^{\lambda \cdot x} = \lambda^j e^{\lambda \cdot x}$$

9.2 Satz: Lösungsbasis bei n verschiedenen Nullstellen

Das Polynom p habe n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 \cdot x}, \ldots, \varphi_n(x) = e^{\lambda_n \cdot x}$$

eine Lösungsbasis von $p(\delta)y = 0$.

Beweis:

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen: Klar mit Hilfssatz 9.1.
- Lineare Unabhängigkeit: Es folgt mit

$$\partial^j \varphi_k(x) = \lambda_k^j \varphi_k(x)$$

  die Wronski-Determinante

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \end{aligned}$$

(Vandermondsche Determinante). Anderer Beweis siehe Hilfssatz 9.5

Beispiel:

1. Schwingungsgleichung:
$$y'' + w^2 \cdot y = 0 \qquad (w \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$
Dann
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + w^2 \overset{!}{=} 0 \\ \varphi_1(x) &= e^{\imath wx} \qquad \varphi_2(x) = e^{-\imath wx} \end{aligned}$$
reelle Lösungsbasis:
$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= Re(\varphi_1(x)) = \cos wx \\ \psi_2(x) &= Im(\varphi_1(x)) = \sin wx \end{aligned}$$

Hat p nicht n verschiedene Nullstellen, braucht man weitere Lösungen.

9.3 Satz: Lösungsbasis bei einer Nullstelle

Sei $\mu \in \mathbb{C}$, $p(\lambda) = (\lambda - \mu)^n$. Dann hat die Differentialgleichung $p(\partial)y = 0$ die Lösungsbasis:
$$e^{\mu \cdot x}, x \cdot e^{\mu \cdot x}, \ldots, x^{n-1} \cdot e^{\mu \cdot x}$$

Beweis:

- Für $\mu = 0$: Dann sind $1, x, \ldots, x^{n-1}$ Lösungen von $y^{(n)} = 0$ und linear unabhängig, daher eine Lösungsbasis.
- Allgemeines μ: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt:
$$\begin{aligned} (\partial - \mu)(f \cdot e^{\mu \cdot x}) &= f' \cdot e^{\mu \cdot x} \\ (\partial - \mu)^k (f \cdot e^{\mu \cdot x}) &= f^{(k)} \cdot e^{\mu \cdot x} \end{aligned}$$
Also sind $e^{\mu \cdot x}, x \cdot e^{\mu \cdot x}, \ldots, x^{n-1} \cdot e^{\mu \cdot x}$ Lösungen von $p(\partial)y = 0$. Lineare Unabhängigkeit: erster Teil des Beweises.

Bemerkung:

- Da $p(\partial)y = 0$ konstante Koeffizienten hat, folgt aus $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$, $p(\partial)\varphi = 0$, dass $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9.4 Satz: Lösungsbasis für $p(\partial)y = 0$

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ und p habe die voneinander verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_r$, d.h.
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$
Dann besitzt die Differentialgleichung $p(\partial)y = 0$ die Lösungsbasis:
$$\varphi_{kj}(x) = x^j \cdot e^{\lambda_k \cdot x} \qquad k = 1, \ldots, r \; j = 0, \ldots, n_k - 1$$

Beweis:

- Anwendung von Satz 7.6 mit
$$(V =)L := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), p(\partial)\varphi = 0\}$$
Nach Satz 8.1.2 ist
$$\dim L = n = \sum_{k=1}^{r} n_k$$
Dann ist $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$, wobei
$$(V_k =)L_k = \ker((\partial - \lambda_k)^{n_k})$$

- Nach Hilfssatz 9.3 ist
$$e^{\lambda_k \cdot x}, x \cdot e^{\lambda_k \cdot x}, \ldots, x^{n_k - 1} \cdot e^{\lambda_k \cdot x}$$
Basis von L_k. Vereinigung der Basen von L_k: Basis von L.

Beispiele:

1. Löse
$$y'' + 2y' + y = 0$$
Charakteristisches Polynom:
$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1/2} &= -1 \end{aligned}$$
Damit Lösungsbasis:
$$\varphi_1(x) = e^{-x} \qquad \varphi_2(x) = x \cdot e^{-x}$$

2. Schwingung mit Dämpfung:
$$m \cdot \ddot{y} + \beta \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$$
Dann
$$\begin{aligned} p(\lambda) = m \cdot \lambda^2 + \beta \cdot \lambda + k &\overset{!}{=} 0 \\ \lambda_{1/2} &= -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{1}{2m} \cdot \sqrt{\beta^2 - 4mk} \end{aligned}$$
   (a) 1. Fall: $\beta^2 < 4km$:
$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{\imath}{2m} \cdot \sqrt{4km - \beta^2} \\ \varphi_1(t) &= e^{-\frac{\beta}{m} \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \beta^2} \cdot t\right) \\ \varphi_2(t) &= e^{-\frac{\beta}{m} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \beta^2} \cdot t\right) \end{aligned}$$
   gedämpfte Schwingung (schwach gedämpft),
$$T = 4\pi \cdot m \cdot (4mk - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$
   (b) 2. Fall: $\beta^2 > 4mk$:
$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\beta^2 - 4km} \\ \varphi_1(t) &= e^{\left(-\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\beta^2 - 4km}\right) \cdot t} \\ \varphi_2(t) &= e^{\left(-\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\beta^2 - 4km}\right) \cdot t} \end{aligned}$$
   periodischer Grenzfall

   (c) 3. Fall: $\beta^2 = 4mk$:
$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-\frac{\beta}{2m} \cdot t} \\ \varphi_2(t) &= t \cdot e^{-\frac{\beta}{2m} \cdot t} \end{aligned}$$
   aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung)

Bemerkung:

- Lösung für gewisse Inhomogenitäten:

$$p(\partial)y = y^{(n)} + \ldots + a_0 = e^{\lambda \cdot x}$$

Ansatz:

$$\varphi(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

falls $p(\lambda) \neq 0$. Dann:

$$\begin{aligned} c \cdot p(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x} &= e^{\lambda \cdot x} \\ c &= \frac{1}{p(\lambda)} \end{aligned}$$

Falls λ Nullstelle von $p(\lambda)$ der Ordnung k, dann Ansatz

$$\varphi(x) = c \cdot x^k \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Allgemeiner: Wenn rechte Seite $= g(x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$, g Polynom vom Grad j, dann Ansatz

$$\varphi(x) = h(x) \cdot x^k \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

mit h Polynom vom Grad j.

- Übung: Für

$$b(x) = e^{\alpha x} \cdot p_k(x) \cdot \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$$

wobei $\lambda = \alpha + \imath\beta$ m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und p_k Polynom vom Grad k, wähle Ansatz

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot ((A_k \cdot x^k + \ldots + A_0) \cdot \cos \beta x + (B_k \cdot x^k + \ldots + B_0) \cdot \sin \beta x) \cdot x^m$$

Beispiele:

1. Für

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

wähle Ansatz

$$\varphi(x) = c \cdot x^2 \cdot e^{-x}$$

Dann:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= c \cdot e^{-x} \cdot (2x - x^2) \\ \varphi''(x) &= c \cdot e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2) \end{aligned}$$

Eingesetzt in Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot c \cdot e^{-x} &= e^{-x} \\ \Rightarrow c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Für

$$y'' + 2y' + y = \sin x = \frac{1}{2\imath} \cdot (e^{\imath x} - e^{-\imath x})$$

wähle Ansatz

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 \cdot e^{\imath x} + c_2 \cdot e^{-\imath x} \\ &= \tilde{c}_1 \cdot \cos x + \tilde{c}_2 \cdot \sin x \end{aligned}$$

3. Differentialgleichung vom Euler-Typ:

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = 0$$

auf $(0, \infty)$. Ansatz für Lösungen

$$\varphi(x) = x^\lambda$$

führt zur charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - (n-1)) + a_{n-1} \cdot \lambda \cdots (\lambda - (n-2)) + \ldots + a_0 \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Ist λ_1 eine k_1-fache Nullstelle, dann Lösungen

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_1} \cdot \ln x, \ldots, x^{\lambda_1} \cdot (\ln x)^{k_1 - 1}$$

So Lösungsbasis.

Beweis:

- Zurückführen auf Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Substitution $x = e^t$,

$$\begin{aligned} z(t) &:= y(e^t) \\ z'(t) &= e^t \cdot y'(e^t) \\ (\partial - 1)\partial z(t) &= e^t \cdot y''(e^t) \\ &\vdots \\ (\partial - (n-1)) \ldots (\partial - 1)\partial z(t) &= e^{n \cdot t} \cdot y^{(n)}(e^t) \end{aligned}$$

  Differentialgleichung von z, n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Lösungen:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda_1 \cdot t}, t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}, \ldots, t^{k_1 - 1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \\ \Rightarrow y(t) &= x^{\lambda_1}, (\ln x) \cdot x^{\lambda_1}, \ldots, (\ln x)^{k_1 - 1} \cdot x^{\lambda_1} \end{aligned}$$

10

Existenzsatz von Peano

- bisher: Existenz und Eindeutigkeit mit Lipschitz-Bedingung
- Für stetige rechte Seite: Existenz

10.1 Satz von Arzèla-Ascoli

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei (f_n) in $C(I)$ mit

1. (f_n) beschränkt, d.h.
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$$
2. (f_n) gleichgradig stetig (in jedem Punkt), d.h.
$$\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in I \,\mathrm{mit}\, |x-y| < \delta, \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Dann existieren $f \in C(I)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) mit $\|f_{n_j} - f\|_\infty \to 0\,(j \to \infty)$. Äquivalent: Dann existiert eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Teilfolge von f_n.

Beweis:

1. Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: Es gibt Teilfolge (f_{n_j}) mit $\|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty \leq \varepsilon$ für j, $k \in \mathbb{N}$.

   Zu jedem $x \in I$ existiert $\delta_x > 0$ gemäß Eigenschaft 2. Die offene Überdeckung $(B(x,\delta_x))_{x\in I}$ von I besitzt eine endliche Teilüberdeckung $B(x_1,\delta_{x_1})$, ... , $B(x_n,\delta_{x_n})$. Es gibt Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n), sodass $(f_{n_j}(x_q))_j$ konvergent für $q = 1,\ldots,n$. Ohne Einschränkung ist
$$|f_{n_j}(x_q) - f_{n_k}(x_q)| \leq \varepsilon$$
   für alle j, $k \in \mathbb{N}$, $q = 1,\ldots,n$. Zu $x \in I$ gibt es $q \in \{1,\ldots,n\}$ mit $x \in B(x_q,\delta_{x_q})$. Daher:
$$\begin{aligned} |f_{n_j}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_j}(x) - f_{n_j}(x_q)| + |f_{n_j}(x_q) - f_{n_k}(x_q)| + |f_{n_k}(x_q) - f_{n_k}(x)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$
   Somit $\|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty \leq 3\varepsilon$ für alle j, $k \in \mathbb{N}$.

2. Nach 1. gibt es Teilfolge $(f_n^{(1)})$ von (f_n) mit
$$\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_\infty \leq 1 \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$
   Zu $(f_n^{(1)})$ gibt es Teilfolge $(f_n^{(2)})$ mit
$$\|f_n^{(2)} - f_m^{(2)}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$
   usw, $(f_n^{(k)})$ mit
$$\|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{k} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$

Die Diagonalfolge $(f_n^{(n)})$ ist dann eine $\|\cdot\|$-Cauchy-Folge. (Sei $k \in \mathbb{N}$, dann für $m, n \geq k$:

$$\|f_m^{(m)} - f_n^{(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

denn $(f_n^{(n)})_{n\geq k}$ ist Teilfolge von $(f_n^{(k)})_{n\geq k}$.

Definitionen:

- Seien X, Y metrische Räume, $M \subseteq C(X,Y)$, $x_0 \in X$. M heißt gleichgradig stetig in x_0

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in B_X(x_0, \delta) \forall f \in M : f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

- M gleichgradig stetig $:\Leftrightarrow$ M gleichgradig stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$
- M gleichmäßig gleichgradig stetig

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \,\text{mit}\, d_X(x,y) < \delta \forall f \in M : d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Bemerkungen:

1. Sei X ein metrischer Raum, $M \subseteq C_b(X) = \{f \in C(X);\ f \text{ beschränkt }\}$, $x_0 \in X$, M gleichgradig stetig in x_0. Dann ist $\bar{M}^{\|\cdot\|_\infty}$ gleichgradig stetig in x_0. (Zu $\varepsilon > 0$ gleiches δ).
2. Andere (etwas allgemeinere Form) von Satz 10.1: Sei X kompakter metrischer Raum, $M \subseteq C(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann sind äquivalent:
   (a) M beschränkt, d.h.
   $$\sup_{f\in M} \|f\|_\infty < \infty$$
   und gleichgradig stetig.
   (b) M folgenkompakt in $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$
   (c) M kompakt (als Teilmenge des metrischen Raumes $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$)

   Zum Beweis:

   - $1 \Rightarrow 2$: Wie in Beweis von Satz 10.1
   - $2 \Leftrightarrow 3$: Gilt allgemein (Analysis 2)
   - $3 \Rightarrow 1$: Übung

10.2 Satz von Peano

Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $f\colon [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für

$$M := \max\{|f(x,y)|; x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

gelte $a \leq \frac{b}{M}$. Dann gibt es eine Lösung $\varphi\colon [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ des Anfangwertproblems

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Beweis: Ohne Einschränkung $x_0 = 0, y_0 = 0, a = 1$.

1. Wir definieren „approximative Lösungen" $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$:
   Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_k(0) := 0$,
   $$\varphi_k(x) := \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) + \left(x - \frac{j}{k}\right) \cdot f\left(\frac{j}{k}, \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right)\right)$$

für $\frac{j}{k} < x \leq \frac{j+1}{k}$ für $j = 0, \ldots, k-1$. (Sukzessive definiert auf den Intervallen $\left(\frac{0}{k}, \frac{1}{k}\right]$, $\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right]$, ... Möglich, da

$$|\varphi_k(x)| \leq x \cdot M \leq b$$

φ_k: Eulersches Polynom.) (φ_k) ist beschränkt in $C([0,1])$, da $\|\varphi_k\|_\infty \leq b$ und (φ_k) gleichgradig stetig: Für $x, x' \in [0,1]$:

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(x')| \leq M \cdot |x - x'| \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$) Nach Satz 10.1 gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (φ_{k_j}),

$$\varphi_{k_j}(x) \to \varphi(x) \qquad (j \to \infty)$$

gleichmäßig für $0 \leq x \leq 1$, $\varphi \in C[0,1]$.

2. φ aus 1 ist Lösung:
   Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass aus $(x,y), (x',y') \in [0,1] \times [-b,b]$, $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$ folgt:

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon$$

(f gleichmäßig stetig). Sei $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k} < \delta$, $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{M}$. Dann gilt für $j = 0, \ldots, k-1$, $\frac{j}{k} < x \leq \frac{j+1}{k}$:

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_k(x) - \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \int_{\frac{j}{k}}^x f(t, \varphi_k(t))\, dt \right| \\ \leq \; & \int_{\frac{j}{k}}^x \left| f\left(\frac{j}{k}, \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right)\right) - f(t, \varphi_k(t)) \right| dt \\ \leq \; & \left(x - \frac{j}{k}\right) \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{k} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

wegen

$$\left| \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \varphi_k(t) \right| \leq \frac{1}{k} \cdot M < \delta$$

Dann:

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_k(x) - \int_0^x f(t, \varphi_k(t))\, dt \right| \\ \leq \; & \left| \varphi_k(x) - \varphi_k\left(\frac{j}{k}\right) - \int_{\frac{j}{k}}^x f(t, \varphi_k(t)9\, dt \right| + \\ & \sum_{i=0}^{j-1} \left| \varphi_k\left(\frac{i+1}{k}\right) - \varphi_k\left(\frac{i}{k}\right) - \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} f(t, \varphi_k(t))\, dt \right| \\ \leq \; & \varepsilon \end{aligned}$$

Damit:

$$\left| \varphi_k(x) - \int_0^x f(t, \varphi_k(t))\, dt \right| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

gleichmäßig für $0 \leq x \leq 1$. Für (φ_{k_j}) aus 1) gilt aber

$$\varphi_{k_j}(x) \to \varphi(x) \qquad (j \to \infty)$$

gleichmäßig, daher auch

$$\int_0^x f(t, \varphi_{k_j})\, dt \to \int_0^x f(t, \varphi(t))\, dt \qquad (j \to \infty)$$

gleichmäßig. Begründung:

- $f(t,\varphi_{k_j}(t)) \to f(t,\varphi(t))$ gleichmäßig für $0 \leq t \leq 1$:
  Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ zu f, ε gemäß gleichmäßiger Stetigkeit von f. Es gibt $j_0 \in \mathbb{N}$:
  $$|\varphi_{k_j}(t) - \varphi(t)| \leq \delta$$
  für $j \geq j_0$ und $0 \leq t \leq 1$. Für $j \geq j_0$ folgt:
  $$|f(t,\varphi_{k_j}(t)) - f(t,\varphi(t))| \leq \varepsilon$$
  für $0 \leq t \leq 1$. Damit:
  $$\begin{aligned} \left|\int_0^x f(t,\varphi_{k_j}(t))\,dt - \int_0^x f(t,\varphi(t))\,dt\right| &\leq \underbrace{(x-0)}_{\leq 1} \cdot \sup_{0\leq t\leq x} (f(t,\varphi_{k_j}(t)) - f(t,\varphi(t))) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$
  für $0 \leq x \leq 1$.

Damit:
$$\varphi(x) - \int_0^x f(t,\varphi(t))\,dt = 0$$
denn
$$\begin{array}{ccc} \varphi_{k_j}(x) - \int_0^x f(t,\varphi_{k_j})\,dt & \to & 0 \ \text{ gleichmäßig für } 0 \leq x \leq 1 \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow & & \\ \varphi(x) - \int_0^x f(t,\varphi(t))\,dt & = & 0 \end{array}$$

11 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit von Daten

- Erstes Thema: φ Lösung von Anfangswertproblem
$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y^0$$
$\tilde{\varphi}$ Lösung von Anfangswertproblem
$$y' = \tilde{f}(x,y) \qquad y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$$
mit $\tilde{f}$ nahe bei f, $\tilde{x}_0$ nahe bei x_0, $\tilde{y}_0$ bei $y_0 \Rightarrow \tilde{\varphi}$ nahe bei φ.

Beispiel:

1. Differentialgleichung:
$$y' = y (= f(x,y)) \qquad y(0) = 1$$
Lösung ist $\varphi(x) = e^x$. Sei $(a_n) \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to 1$, $(y_n) \in \mathbb{R}$ mit $y_n \to 1$. Differentialgleichung
$$y' = a_n \cdot y \qquad y(0) = y_n$$
Lösung ist
$$\varphi_n(x) = y_n \cdot e^{a_n \cdot x} \to e^x \qquad (n \to \infty)$$
gleichmäßig auf $[-R, R]$.

11.1 Hilfssatz: Fixpunkt-Abschätzung

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $M' \subseteq M$. Sei $\Phi \colon M' \to M$ eine strikte Kontraktion, d.h. es gibt $k \in [0,1)$:
$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k \cdot d(x,y)$$
für alle $x, y \in M'$. Sei $x_0 \in M'$ ein Fixpunkt von Φ. Für alle $x \in M'$ gilt dann:
$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-k} \cdot d(x, \Phi(x))$$

Beweis:
$$\begin{aligned} d(x,x_0) &\leq d(x,\Phi(x)) + d(\Phi(x), \Phi(x_0)) \\ &\leq d(x, \Phi(x)) + k \cdot d(x, x_0) \\ \Rightarrow d(x, x_0) &\leq \frac{1}{1-k} \cdot d(x, \Phi(x)) \end{aligned}$$

11.2 Satz: Nähe von Lösungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Bedingung und beschränkt. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(x_0, y^0) \in D$ und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sei Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y^0$$

Dann gibt es $C \geq 0$, sodass: Ist $\tilde{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $\tilde{I} \subseteq I$ ein kompaktes Intervall mit $x_0 \in \tilde{I}$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{I}$, $\tilde{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(\tilde{x}_0, \tilde{y}^0) \in D$, $\tilde{\varphi}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = \tilde{f}(x,y) \qquad y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}^0$$

so gilt

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{\infty,\tilde{I}} \leq C \cdot (|x_0 - \tilde{x}_0| + |y^0 - \tilde{y}^0| + \|f - \tilde{f}\|_{\infty,D})$$

(lipschitz-stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangsdaten und der rechten Seite)

Beweis:

- Sei ℓ die Länge von I, L die Lipschitz-Konstante von f. Sei $M := C(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$ normiert mit $\|\cdot\|_{\infty,L,x_0}$,

  $$\|\psi\|_{\infty,L,x_0} := \sup\{e^{-L\cdot|x-x_0|} \cdot |\psi(x)|; x \in \tilde{I}\}$$

  (Morgenstern-Norm). Sei

  $$M' := \{\psi \in M; \operatorname{gr}\psi \subseteq D\}$$

  Definiere $\Phi\colon M' \to M$:

  $$\Phi(\psi)(x) := y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\, dt$$

  für $x \in \tilde{I}$. Die Rechnung im Beweis von Satz 5.1 zeigt, dass Φ eine strikte Kontraktion ist mit

  $$k = \frac{L}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot\ell}\right) = 1 - e^{-L\cdot\ell}$$

  unabhängig von $\tilde{I}$.

- Für $x \in \tilde{I}$ gilt:

  $$\begin{aligned}
  |\tilde{\varphi}(x) - \Phi(\tilde{\varphi})(x)| &= \left|\tilde{y}^0 + \int_{\tilde{x}_0}^{x} \tilde{f}(t,\tilde{\varphi}(t))\, dt - y^0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\, dt\right| \\
  &= \left|\tilde{y}^0 - y^0 + \int_{\tilde{x}_0}^{x} (\tilde{f}(t,\tilde{\varphi}(t)) - f(t,\tilde{\varphi}(t))\, dt - \int_{x_0}^{\tilde{x}_0} f(t,\tilde{\varphi}(t))\, dt\right| \\
  &\leq |\tilde{y}^0 - y^0| + \ell \cdot \|\tilde{f} - f\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot |\tilde{x}_0 - x_0|
  \end{aligned}$$

  Damit gilt:

  $$\|\tilde{\varphi} - \Phi(\tilde{\varphi})\|_{\infty,L,x_0} \leq |\tilde{y}^0 - y^0| + \ell \cdot \|\tilde{f} - f\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot |\tilde{x}_0 - x_0|$$

  Aus Hilfssatz 11.1 folgt:

  $$\begin{aligned}
  e^{-L\cdot\ell} &\leq \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{\infty,L,x_0} \\
  &\leq \underbrace{\frac{1}{1-k}}_{e^{L\cdot\ell}} \cdot \|\tilde{\varphi} - \Phi(\tilde{\varphi})\|_{\infty,L,x_0} \\
  &\leq e^{L\cdot\ell} \cdot \Big(|\tilde{y}^0 - y^0| + \ell \cdot \|\tilde{f} - f\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot |\tilde{x}_0 - x_0|\Big)
  \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Andere Formulierung der Aussage von Satz 11.2: Es existiert $C \geq 0$ mit: Ist $\tilde{I} \subseteq I$ Intervall, $x_0 \in \tilde{I}$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{I}$, $\tilde{\varphi}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\operatorname{gr} \tilde{\varphi} \subseteq D$, dann

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{\infty, \tilde{I}} \leq C \cdot \left(|\tilde{x}_0 - x_0| + |\tilde{\varphi}(\tilde{x}_0) - y^0| + \sup_{x \in \tilde{I}} |f(x, \tilde{\varphi}(x)) - \tilde{varphi}'(x)| \right)$$

Beweis: Setze

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - f(x, \tilde{\varphi}(x)) + \tilde{\varphi}'(x)$$

Umkehrung gilt auch: Wegen $\tilde{\varphi}'(x) = \tilde{f}(x, \tilde{\varphi}(x))$. (Idee der Formulierung: $\tilde{\varphi}$ als „Fastlösung“, nahe bei Lösung)

11.3 Folgerung: Fluss autonomer Differentialgleichungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung und für jedes $y^0 \in D$ sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(y) \qquad y(0) = y^0$$

auf $[0, \infty)$ lösbar mit Lösung $y(t; y^0)$. Definiere für $t \geq 0$:

$$\Phi(t)\colon D \to D : \Phi(t)(y^0) := y(t; y^0)$$

Dann gilt:

- $\Phi(t)$ stetig (Satz 11.2) für alle $t \geq 0$
- $\Phi(0) = \mathrm{id}_D$
- $\Phi(s) \circ \Phi(t) = \Phi(t + s)$ für $t, s \geq 0$

Φ heißt Fluss, mit $y' = f(x, y)$ assoziiert.

11.4 Satz: Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar nach den y-Variablen ($\to$ erfüllt lokale Lipschitzbedingung). Sei $(x_0, y^0) \in D$ mit $\varphi^0 := \varphi(., y^0)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y^0$$

auf $[x_0, x_0 + a]$. Dann: Es gibt $\varepsilon > 0$, sodass für $|z - y^0| < \varepsilon$ ($z \in \mathbb{R}^n$) die Lösung $\varphi(., z)$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = z$$

auf $[x_0, x_0 + a]$ existiert. Auf dieser Menge ist $\varphi(x, z)$ nach z differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z) = E + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} f(t, \varphi(t, z)) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \varphi(t, z) \, dt$$

(Ableitung von

$$\varphi(x, z) = z + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t, z)) \, dt$$

nach z). Vergleich *Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, §10, X*

Beweisskizze:

- Mit Satz über implizite Funktionen im Banachraum.

- Sei $U := \mathbb{R}^n$ offen Anfangswerte,

$$\begin{aligned} V &:= \{\varphi \in C([x_0, x_0+a]; \mathbb{R}^n) : \operatorname{gr}\varphi \subseteq D\} \\ F\colon U \times V \to C([x_0, x_0+a]; \mathbb{R}^n) : F(z,\varphi) &:= \varphi(x) - z - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} F(z,\varphi) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(x) = z + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \text{ Lösung des AWP } y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = z \end{aligned}$$

Damit $F(y^0, \varphi^0) = 0$. F differenzierbar:

$$\begin{aligned} \partial_1 F(z,\varphi) &= E_n \\ \partial_2 F(z,\varphi)(\psi) &= \psi - \int_{x_0} \frac{\partial}{\partial y} f(t,\varphi(t)) \cdot \psi(t)\,dt \end{aligned}$$

mit $\partial_2 F(z,\varphi)\colon C([x_0, x_0+a]; \mathbb{R}^n) \to C([x_0, x_0+a]; \mathbb{R}^n)$ linear, stetig, invertierbar. Aus Satz über implizite Funktionen im Banachraum: Da (y^0, φ^0) Nullstelle von F gibt es eine Umgebung U_0 von y^0 und $g\colon U_0 \to V$ stetig differenzierbar mit

$$\forall z \in U_0 : \; F(z, g(z)) = 0$$

d.h. $g(z) = \varphi(., z)$. (Damit für alle $x \in [x_0, x_0+a]$ $g(z)(x) = \varphi(x,z)$ nach z differenzierbar).

Teil II

Integration auf Mannigfaltigkeiten

12 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

- Ziel: Beschreibung von „glatten“ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, Verallgemeinerung von regulären Kurven
- Literatur: Forster 3
- Erinnerung: Sei U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$ bijektiv, Φ, Φ^{-1} stetig differenzierbar.

Definition:

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq n$. Dann heißt M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $:\Leftrightarrow$ Für alle $a \in M$ existieren offene Umgebungen U von a, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $h\colon U \to V$ Diffeomorphismus mit
$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$$
- Eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit heißt Hyperfläche.

Beispiele:

1. Sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist
$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)); x \in (0,1)\}$$
eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned} h\colon \underbrace{(0,1)\times\mathbb{R}}_{=:U} &\to \underbrace{(0,1)\times\mathbb{R}}_{=:V} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y - f(x) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow h'(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix} \\ h(\mathrm{gr}(f)) &= (0,1)\times 0 \end{aligned}$$
2. Verallgemeinerung von 1: Sei $\check{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f\colon \check{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar. Dann $\mathrm{gr}(f)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.
$$\begin{aligned} h\colon \check{U}\times\mathbb{R}^{n-k} &\to \check{U}\times\mathbb{R}^{n-k} \\ \begin{pmatrix} \check{x} \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \check{x} \\ y - f(\check{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
(Jede Untermannigfaltigkeit lässt sich lokal so darstellen, s.u.)
3. $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$ ist $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre (auch: S^{n-1}): $(n-1)$ dimensionale Untermannigfaltigkeit nach 2. (Alle „Koordinatenhalbssphären“ sind wie in 2.)

12.1 Satz: Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten

Sei $1 \leq k \leq n-1$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann äquivalent:

1. M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
2. (M ist lokal Nullstellenmenge oder M lokal durch Nebenbedingungen definiert) Für alle $a \in M$ existiert offene Umgebung U von a, $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar, Rang $g'(x) = n-k$ für alle $x \in U$, $M \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}$.
3. (M lokal Graph) Für alle $a \in M$ gilt: Nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten gibt es offene Umgebungen $\check{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ von $\check{a} = (a_1, \dots, a_k)^T$, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $\hat{a} = (a_{k+1}, \dots, a_n)^T$, $f\colon \check{U} \to \hat{U}$ stetig differenzierbar mit
$$M \cap (\check{U} \times \hat{U}) = \operatorname{gr}(f) = \{(\check{x}, \hat{x}); \check{x} \in \check{U}\}$$
4. (Parameterdarstellung) Für alle $a \in M$ existiert offene Umgebung U von a, offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ („Parameterbereich“), eine reguläre Abbildung $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(T) = U \cap M$.

   (Φ regulär $:\Leftrightarrow$ Φ ist stetig differenzierbar, Rang $\Phi'(t) = k$ für alle $t \in T$, Φ ist injektiv, $\varphi^{-1}\colon \Phi(T) \to T$ stetig).

Beweis:

1. „$1 \Rightarrow 2$“
   Seien a, U, V, h wie in Definition. Für
$$g := \begin{pmatrix} h_{k+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$
   gilt:
$$g'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 h_{k+1} & \dots & \partial_n h_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 h_n & \dots & \partial_n h_n \end{pmatrix}$$
   hat Rang $n-k$.
$$M \cap U = \{x \in U; h_{k+1}(x) = \ldots = h_n(x) = 0\}$$
2. „$2 \Rightarrow 3$“ (vgl. Beweis für Lagrange-Multiplikatoren)
   Seien a, U, g wie in 2. Da $g'(a)$ Rang $n-k$ hat, besitzt $g'(a)$ $(n-k)$ linear unabhängige Spalten. Nach Umordnung seien dies die hinteren $(n-k)$ Spalten, d.h. $\frac{\partial}{\partial \hat{x}} g(a)$ ist invertierbar mit $\hat{x} = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$. Beachte: $M \cap U$ wird beschrieben durch Nullstellen von g. Aus Satz über implizite Funktionen: Es existiert offene Umgebung $\check{U}$ von $\check{a}$ und offene Umgebung $\hat{U}$ von $\hat{a}$, sodass $\check{U} \times \hat{U} \subseteq U$ und $f\colon \check{U} \to \hat{U}$ eindeutig, sodass
$$g(\check{x}, f(\check{x})) = 0$$
   Damit:
$$(\check{x}, \hat{x}) \in M \cap (\check{U} \times \hat{U}) \Leftrightarrow g(\check{x}, \hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = f(\check{x})$$
   f ist stetig differenzierbar.
3. „$3 \Rightarrow 4$“
   Seien a, $\check{U}$, $\hat{U}$, f wie in 3. Mit $T := \check{U}$, $U := \check{U} \times \hat{U}$,
$$\Phi(\check{x}) := \begin{pmatrix} \check{x} \\ f(\check{x}) \end{pmatrix}$$
   folgt 4.
$$\Phi'(\check{x}) = \begin{pmatrix} E_k \\ * \end{pmatrix}$$
   hat Rang k, $\Phi^{-1}(x) = \check{x}$ ist stetig.

4. „$4 \Rightarrow 1$“

   Seien a, U, T, Φ wie in 4. Sei $c \in T$ mit $\Phi(c) = a$. Da $\Phi'(c)$ Rang k hat, gibt es k linear unabhängige Zeilen, o.E. die oberen. Definiere $\psi\colon T \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$,

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} \check{\Phi}(\check{x}) \\ \hat{\Phi}(\check{x}) + \hat{x} \end{pmatrix}$$

   dann

$$\psi'(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}'(\check{x}) & 0 \\ \hat{\Phi}'(\check{x}) & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

   für alle $x \in T \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\Psi'(c)$ ist invertierbar (Zeilen linear unabhängig). Aus Satz der lokalen Invertierbarkeit: Es existiert offene Umgebung $V_1 \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(c, 0)$ so, dass $\psi\colon V_1 \to \psi(V_1)$ Diffeomorphismus. Da $\Phi^{-1}\colon \Phi(T) \to T$ stetig ist, ist

$$\psi(V_1 \cap (T \times \{0\})) = \Phi(\underbrace{\{\check{x} \in T; (\check{x}, 0) \in V_1\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n})$$

   (relativ) offen in $\Phi(T)$, daher gibt es $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(V_1 \cap (T \times \{0\})) = \Phi(T) \cap U_1 = M \cap (U \cap U_1)$$

   mit

$$\tilde{U} := \psi(V_1) \cap U \cap U_1 \qquad \tilde{V} := \psi^{-1} \qquad h := \psi^{-1}|_{\tilde{U}}$$

   gelten die gewünschten Eigenschaften.

Bemerkungen:

1. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ metrischer Raum mit Einschränkung der Metrik von $\mathbb{R}^n$.

2. Ist (X,d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$, so gilt: $A \subseteq Y$ relativ offen (d.h. A offen im metrischen Raum Y) $:\Leftrightarrow \exists B \subseteq X$ offen (in X): $A = B \cap Y$.

Definition:

- Sind T, Φ wie in 4. von Satz 12.1 so heißt Φ lokale Parametrisierung von M, $\Phi^{-1}\colon \Phi(T) \to T$ heißt Karte von M (lokale Koordinaten). Ist $\Phi(T) = M$, dann heißt Φ globale Parametrisierung.

Beispiele:

1. Einheitssphäre S_{n-1},

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x &\mapsto |x| - 1 \\ \operatorname{grad} g(x) &= \frac{x}{\|x\|} \neq 0 \\ \Rightarrow S_{n-1} &= \{x; g(x) = 0\} \end{aligned}$$

   Hyperfläche

2. Zur Erläuterung der Bedingung 2 in Satz 1.1: Situation wie in Beispiel 1,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix} \\ \{x; g_1(x) = g_2(x) = 0\} &= S_{n-1} \end{aligned}$$

   Randbedingung ist verletzt.

3. Sei $0 < r < R$. Lokale Parametrisierung des Torus:

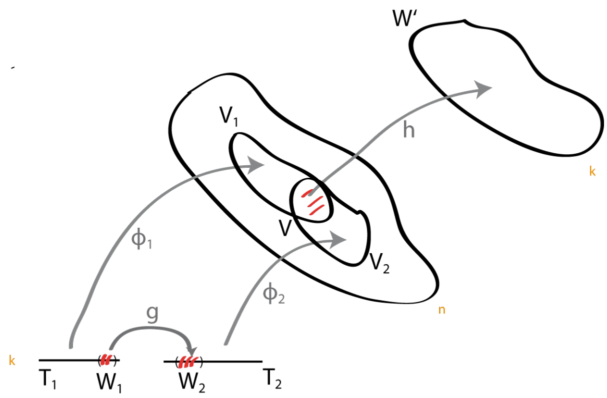
$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos\vartheta) \cdot \cos\varphi \\ (R + r \cdot \cos\vartheta) \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

4. Die Menge
$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -1 < x_1 < 1, x_2 = |x_1|\}$$
ist keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$: Ist U Umgebung von $(0,0)$, $g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $M \cap U = [g = 0]$, dann
$$\begin{aligned}(\partial_1 + \partial_2)g(0,0) &= 0\\ (\partial_1 - \partial_2)g(0,0) &= 0\end{aligned}$$
also $g'(0,0) = 0$. Damit 2. nicht erfüllbar.

5. Die Menge
$$M := (0 \times (1,3)) \cup ((0,1) \times 2)$$
ist keine Untermannigfaltigkeit. Warum
$$\Phi\colon (0,1) \cup (1,3) \to \mathbb{R}^2, \Phi(t) = \begin{cases}(t,2) & 0 < t < 1\\ (0,t) & 1 < t < 3\end{cases}$$
keine Parametrisierung? Φ^{-1} ist nicht stetig in $(0,2)$.

12.2 Satz: Parameter-Transformation

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\Phi_j : T_j \to V_j \subseteq M$ $(j = 1,2)$ zwei Parametrisierungen mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \Phi_j^{-1}(V)$ offene Teilmengen von T_j und $g := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein Diffeomorphismus.



Beweis:

- Da V offen in M ist, sind W_1, W_2 offen. g offenbar bijektiv (Komposition bijektiver Abbildungen). Noch zu zeigen: g Diffeomorphismus.
- Ohne Einschränkung: $W_1 = T_1$, $W_2 = T_2$. Sei $t_1 \in T_1$, $a := \Phi_1(t_1)$, $t_2 := \Phi_2^{-1}(a)$. Nach Definition der Untermannigfaltigkeit gibt es eine offene Umgebung U von a, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon U \to W$ Diffeomorphismus mit
$$h(U \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) =: W' \times \{0\} \qquad W' \subseteq \mathbb{R}^k$$
mit W' offen. Ohne Einschränkung: $V = U \cap M$ (V verkleinern). Nun
$$h \circ \Phi_j\colon T_j \to W'$$
bijektiv, stetig differenzierbar,
$$(h \circ \Phi_j)'(t) = h'(\Phi_j(t)) \cdot \Phi_j'(t)$$

hat Rang k für alle $t \in T_j$ $(j = 1,2)$ und ist daher invertierbar. Aus Satz der lokalen Invertierbarkeit:

$$h \circ \Phi_j \colon T_j \to W' \qquad j = 1,2$$

ist Diffeomorphismus. Daher ist

$$\begin{aligned} \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 &= (\Phi_2^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ \Phi_1) \\ &= (h \circ \Phi_2)^{-1} \circ (h \circ \Phi_1) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.

13 Integration auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Bemerkungen:

1. Seien $a^1, \ldots, a^k \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt
$$((a^i|a^j))_{i,j=1,\ldots,k}$$
Gramsche Matrix von $a^1, \ldots, a^k$. Sei $A = (a^1 \ldots a^k) \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Dann ist $A([0,1]^k)$ das von $a^1, \ldots, a^k$ aufgespannte Parallelepiped.

2. Ist $k = n$, so ist
$$\mathrm{vol}_k(A([0,1]^k)) = |\det A|$$
Klar, falls $a^1, \ldots, a^k$ linear abhängig (dann 0), sonst mit Transformationsformel.

3. Es gilt:
$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= ((A^T \cdot A \cdot e_i|e_j))_{i,j=1,\ldots,k} \\ &= ((A \cdot e_i|A \cdot e_j))_{i,j=1,\ldots,k} \end{aligned}$$
ist symmetrisch und positiv definit, denn
$$(A^T \cdot A \cdot \xi|\xi) = (A \cdot \xi|A \cdot \xi) \geq 0$$
daher $\det(A^T \cdot A) \geq 0$. Definiere
$$\gamma(A) := \sqrt{\det(A^T \cdot A)} = \sqrt{\det((A \cdot e_i|A \cdot e_j))}$$
Für $k = n$ gilt:
$$\gamma(A) = |\det A|$$

4. Ist $k \leq n$, so wird man $\gamma(A)$ als k-dimensionales Volumen von $A([0,1]^k)$ ansehen:
Betrachte zunächst den Fall $A([0,1]^k) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Mit $Q := (E_k\, 0)$ (Projektion auf erste k Koordinaten) gilt dann:
$$\begin{aligned} (QA)^T \cdot (QA) &= A^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot A = A^T \cdot A \\ \Rightarrow \mathrm{vol}_k(QA([0,1]^k)) &= |\det(QA)| = \gamma(A) \end{aligned}$$
Außersem soll k-dimensionales Volumen orthogonal-invariant sein. Tatsächlich: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrix, dann
$$\begin{aligned} (BA)^T \cdot (BA) &= A^T \cdot \underbrace{B^T \cdot B}_{E_n} \cdot A = A^T \cdot A \\ \Rightarrow \gamma(B \cdot A) &= \gamma(A) \end{aligned}$$

Definition:

- Oberflächenintegral, „globaler Fall“:

  Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\Phi\colon T \to M$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen eine globale Parametrisierung. Sei $f \in C_C(M)$,

  $$C_C(M) := \{f\colon M \to \mathbb{R}\,\text{stetig}; \operatorname{spt} f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}^M \text{ kompakt}\}$$

  Dann ist $f \circ \Phi \in C_C(T)$. Definiere

  $$\int_m f(x)\, dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \gamma(\Phi'(t))\, dt$$

  (unabhängig von der Parametrisierung, siehe Satz 13.1)

Bemerkung:

- Im Allgemeinen besitzt eine Untermannigfaltigkeit keine globale Parametrisierung

13.1 Satz: Wohldefiniertheit des globalen Oberflächenintegrals

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Seien $\Phi_j\colon T_j \to M$ globale Parametrisierungen für $j = 1, 2$. Für alle $f \in C_C(M)$ gilt dann:

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \gamma(\Phi_1'(t))\, dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(t)) \cdot \gamma(\Phi'(t))\, dt$$

Beweis:

- Vorüberlegung: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ gilt:

  $$\begin{aligned} \gamma(A \cdot B)^2 &= \det((AB)^T \cdot (AB)) \\ &= \det(B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B) \\ &= (\det B)^2 \cdot \det(A^T \cdot A) \\ &= \gamma(A)^2 \cdot (\det B)^2 \end{aligned}$$

- Nach Satz 1.2 ist $g := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1\colon T_1 \to T_2$ Diffeomorphismus. Es folgt:

  $$\begin{aligned} \int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \gamma(\Phi_1'(t))\, dt &= \int_{T_1} f(\Phi_2(g(t))) \cdot \gamma(\Phi_2'(g(t)) \cdot g'(t))\, dt \\ &= \int_{T_1} f(\Phi_2(g(t))) \cdot \gamma(\Phi_2'(g(t)) \cdot |\det g'(t)|\, dt \\ &\overset{TF}{=} \int_{T_2} f(\Phi_2(s)) \cdot \gamma(\Phi_2'(s))\, ds \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $k = 1$, $T = (a, b)$, $\Phi\colon (a, b) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ Parametrisierung einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M. Dann ist Φ ein regulärer Weg:

   $$\gamma(\Phi'(t)) = \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\Phi'(t)|$$

   Gewichtsfaktor wie bei Bogenlänge.

2. Sphäre S_2.

   $$\begin{aligned} \Phi\colon \underbrace{(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_{=:T} &\to \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\varphi_1, \varphi_2) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φ parametrisiert S_2 bis auf

$$S_2 \cap \{x \in \mathbb{R}^3; x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$$

Damit

$$\begin{aligned}
\Phi'(\varphi_1, \varphi_2) &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \\ 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \Phi'^T \cdot \Phi' &= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \gamma(\Phi'(t)) &= \sqrt{\det \Phi'^T \cdot \Phi'} = \cos\varphi_2
\end{aligned}$$

Oberfläche von S_2:

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_2 S_2 &= \int_{S_2} 1 \, dS(x) \\
&\overset{!}{=} \int_{\varphi_1=-\pi}^{\pi} \int_{\varphi_2=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi_2 \, d\varphi_2 \, d\varphi_1 \\
&= 2\pi \cdot [\sin\varphi_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi
\end{aligned}$$

(!: S_2 nicht vollständig parametrisiert, 1 ist auf $M := \Phi(T)$ nicht in $C_C(M)$).

3. Allgemeiner für S_{n-1}: Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\Phi_n \colon (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} &\to S_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \\
\Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) &:= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdots \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdots \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \sin\varphi_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist S_{n-1} bis auf „Nahtstellen“ parametrisiert. Struktur:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_{n-1} \cdot \Phi_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \\ \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix} \\
\Phi_2(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die $(n-1)$-dimensionale Parametrisierung vo S_{n-2} wird mit $\cos\varphi_{n-1}$ moduliert und in x_n-Richtung auf $\sin\varphi_{n-1}$ verschoben. Oberfläche:

$$\sigma_{n-1} = \int_{S_{n-1}} 1 \, dS(x)$$

Man erhält (später):

$$\sigma_{n-1} = n \cdot \omega_n$$

Bemerkungen:

1. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann M metrischer Raum, lokalkompakt, d.h. für alle $x \in M$ existiert eine kompakte Umgebung.

2. Sei M lokalkompakter metrischer Raum, $K \subseteq M$ kompakt, $m \in \mathbb{N}$, $(V_j)_{j=1,\ldots,m}$ offene Überdeckung von K. Dann gibt es $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in C_C(M)$ mit $\operatorname{spt}\varphi_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \ldots, m$,

$$\forall x \in K : \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$$

(Partition der Eins auf K,untergeordnet $(V_j)_{j=1,\ldots,m}$)

Beweis wie in Satz 35.4

Definition:

- Oberflächenintegral, allgemein

  Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei $f \in C_C(M)$. Dann gibt es lokale Parametrisierungen $\Phi_j\colon T_j \to V_j \subseteq M$, wobei $V_j = \Phi_j(T_j)$ offen in M ist $(j = 1, \ldots, m)$, mit $\operatorname{spt} f \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$ (wegen $\operatorname{spt} f$ kompakt). Sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in C_C(M)$ eine der Überdeckung $(V_1, \ldots, V_m)$ untergeordnete Partition der Eins auf $\operatorname{spt} f$. Für $j = 1, \ldots, m$ ist dann

  $$\varphi_j \cdot f \in C_C(M) \qquad \operatorname{spt}(\varphi_j \cdot f) = V_j$$

  daher

  $$\int_{V_j} \varphi_j(x) \cdot f(x)\, dS(x)$$

  schon definiert. Dann

  $$\int_M f(x)\, dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \varphi_j(x) \cdot f(x)\, dS(x)$$

- Wohldefiniertheit: Seien $\psi_k\colon S_k \to W_k$ für $k = 1, \ldots, l$ lokale Parametrisierungen wie oben, $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ entsprechende Partition der Eins. Dann

  $$\int_{V_j \cap W_k} \varphi_j(x) \cdot \beta_k(x) \cdot f(x)\, dS(x)$$

  unabhängig davon, ob mit Φ_j oder ψ_k parametrisiert wird (Satz 13.1). Daher

  $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \int_{V_j} (\varphi_j \cdot f)(x)\, dS(x) &= \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \sum_{k=1}^l (\beta_k \cdot \varphi_j \cdot f)(x)\, dS(x)\\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \int_{V_j \cap W_k} (\beta_k \cdot \varphi_j \cdot f)(x)\, dS(x)\\ &= \ldots = \sum_{k=1}^l \int_{W_k} (\beta_k \cdot f)(x)\, dS(x)\end{aligned}$$

13.2 Satz: Gewichtfaktor bei gr(f)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $f\colon T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann $gr(f)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung

$$\Phi(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ f(t_1, \ldots, t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\gamma(\Phi'(t)) = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|^2}$$

Bemerkungen:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$, $v \in \mathbb{R}^n$ zu den Spalten von A orthogonal. Dann

$$|\det(A\,v)| = \gamma(A)\cdot|v|$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & v \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^T \\ v^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^T \cdot A & 0 \\ 0 & v^T \cdot v \end{pmatrix} \\
\Rightarrow (\det(A\,v))^2 &= \det(A^T \cdot A)\cdot|v|^2
\end{aligned}$$

2. Seien A, v wie in 1., $w \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$|\det(A\,w)| = \frac{|(w|v)|}{|v|}\cdot\gamma(A)$$

Beweis: Ohne Einschränkung $|v| = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|\det(A\,w)| &= |\det(A\,(w|v)\cdot v)| \\
&= |(w|v)|\cdot|\det(A\,v)|
\end{aligned}$$

wegen

$$\det(A\,w - (w|v)\cdot v) = 0$$

Beweis von Satz 13.2:

- Es gilt:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & f'(t) & \end{pmatrix} =: A$$

Wähle $w = e_n$,

$$v := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dann:

$$1 = \det\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ f' & 1 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$|v| = \gamma(\Phi'(t)) = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} f|^2}$$

Beispiel:

1. 2-dimensionales Volumen von S_2, $T = \{(x_1, x_2); |x| \le 1\}$,

$$\begin{aligned}
f\colon T \to \mathbb{R}, f(x_1,x_2) &:= \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \\
\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_1,x_2) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \\
\sigma_2 &\overset{!}{=} 2\cdot\int_T 1\cdot\left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} d(x_1,x_2) \\
&= 2\cdot\int_T \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\,d(x_1,x_2) \\
&= 2\cdot 2\pi\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\
&= 4\pi\cdot\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 = 4\pi
\end{aligned}$$

(Benötigt weitere Begründung) Schwerpunkt der Halbssphäre M,

$$M := \{x \in S_2; x_3 > 0\}$$

Dazu:

$$x_{3,SP} = \frac{\int_M x_3 \, dS(x)}{\mathrm{vol}_2(M)}$$

mit

$$\begin{aligned}
\int_M x_3 \, dS(x) &= \int_T \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \, dS(x) \\
&= \pi \\
\Rightarrow x_{3,SP} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Plausibilität:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2\{x \in S_2, a \le x_3 \le b\} &= 2\pi \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \\
&= 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1 - r^2}\right]_{r_1}^{r_2} \\
&= 2\pi \cdot (b - a)
\end{aligned}$$

Nur abhängig von (b-a).

Definition:

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $f\colon M \to \mathbb{R}$. f Riemann-Integrierbar

  $$:\Leftrightarrow \inf\left\{\int \psi \, dS; \psi \in C_C(M), f \le \psi\right\} = \sup\left\{\int \varphi \, dS; \varphi \in C_C(M), \varphi \le f\right\} \in \mathbb{R}$$

  Dann

  $$\int_M f \, dS = \sup\left\{\int \varphi \, dS; \varphi \in C_C(M), \varphi \le f\right\}$$

- $A \subseteq M$ Jordan-messbar $:\Leftrightarrow 1_A$ Riemann-Integrierbar. Für A Jordan-messbar:

  $$\mathrm{vol}_K(A) := \int_M 1_A \, dS$$

- A Jordan-Nullmenge $:\Leftrightarrow A$ Jordan-messbar, $\mathrm{vol}_k(A) = 0$

Bemerkungen: Sei $\Phi\colon T \to M$ eine (lokale) Parametrisierung, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x \in M \backslash \Phi(T)$.

1. Dann gilt: Aus

   $$(f \circ \Phi) \cdot \gamma(\Phi'()) \in R(T)$$

   folgt $f \in R(M)$. Es gilt

   $$\int_M f \, dS = \int_T (f \circ \Phi)(t) \cdot \gamma(\Phi'(t)) \, dt$$

   (Wesentlich: Für $\varphi\colon \Phi(T) \to \mathbb{R}$ gilt:

   $$\varphi \in C_C(M) \Leftrightarrow (\varphi \circ \Phi) \in C_C(T)$$

2. Sei $f \in R(M)$ und die durch

   $$g(t) := \begin{cases} (f \circ \Phi) \cdot \gamma(\Phi'(.)) & \text{auf T} \\ 0 & \text{auf}\, \mathbb{R}^k \backslash T \end{cases}$$

definierte Funktion sei in $R(\mathbb{R}^k)$. Dann gilt

$$\int_M f\,dS = \int_{\mathbb{R}^k} g(t)\,dt$$

(Zum Beweis: Ohne Einschränkung $f \geq 0$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_M f\,dS &= \sup\left\{\int \varphi\,dS; \varphi \in C_C(M), 0 \leq \varphi \leq f\right\} \\
&\stackrel{!}{=} \sup\left\{\int \varphi\,dS; \varphi \in C_C(\Phi(T)), 0 \leq \varphi \leq f\right\}
\end{aligned}$$

denn für $\varphi \in C_C(M), \varphi \leq f, \varepsilon > 0$:

$$(\varphi - \varepsilon)^+ \in C_C(\Phi(T))$$

mit

$$(\varphi - \varepsilon)^+ \to \varphi \text{ gleichmäßig} \qquad (\varepsilon \to 0)$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} g(t)\,dt &= \sup\left\{\int \psi\,dS; \psi \in C_C(\mathbb{R}^k), 0 \leq \psi \leq g\right\} \\
&\stackrel{!}{=} \sup\left\{\int \psi\,dS; \psi \in C_C(T), 0 \leq \psi \leq g\right\} \\
&= \sup\left\{\int \psi \cdot \gamma(\Phi'(.))\,dS; \psi \in C_C(T), 0 \leq \psi \leq f \circ \Phi\right\} \\
&\stackrel{!}{=} \sup\left\{\int (\varphi \circ \Phi) \cdot \gamma(\Phi'(.)); \varphi \in C_C(\Phi(T)), 0 \leq \varphi \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{\int_M \varphi\,dS; \varphi \in C_C(\Phi(T)), 0 \leq \varphi \leq f\right\}
\end{aligned}$$

Damit 1. Berechnung von $\mathrm{vol}_2\, S_2$ gerechtfertigt, sobald man weiß, dass der nicht erfasste halbe Großkreis eine Jordan-Nullmenge ist.

14

Integration in Schichten (Desintegrationssatz)

14.1 Satz: Version des Satzes von Fubini

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Somit ist

$$M_r := \{x \in \Omega, g(x) = r\}$$

eine Hyperfläche für alle $r \in \mathbb{R}$. Sei $f \in C_C(\Omega)$. Die Funktion

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto \int_{M_r} f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)$$

ist stetig mit kompaktem Träger. Es gilt:

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{r\in\mathbb{R}} \int_{\xi \in M_r} f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr$$

Beispiele:

1. Verallgemeinerte Polarkoordinaten: Sei $f \in C_C(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f(x)\, dx &= \int_{r=0}^\infty \int_{\xi \in r\cdot S_{n-1}} f(\xi)\, dS(\xi)\, dr \\ &= \int_{r=0}^\infty \int_{\eta \in S_{n-1}} f(r\cdot\eta)\, dS(\eta) \cdot r^{n-1}\, dr\end{aligned}$$

   Beweis:

   - Es gilt: 1. Gleichheit mit Satz 14.1, $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $g(x) = |x|$, $\operatorname{grad} g(x) = \frac{x}{|x|}, M_r = r \cdot S_{n-1}$.
   - 2. Gleichheit: Sei $\Phi\colon T \to S_{n-1}$ eine lokale Parametrisierung. Dann $r\cdot\Phi\colon T \to r\cdot S_{n-1}$ lokale Parametrisierung von $r \cdot S_{n-1}$.

$$\gamma(r\cdot\Phi'(t)) = r^{n-1}\cdot\gamma(\Phi'(t))$$

2. Mit 1. berechnen von

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int_{|x|\le 1} 1\, dx \\ &= \int_0^1 \int_{\xi\in S_{n-1}} 1\, dS(\xi)\, r^{n-1}\, dr \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{1}{n}\cdot\sigma_{n-1}\end{aligned}$$

   (Vorbehalte hier leicht zu beseitigen: $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$,

$$\int_{|x|\le 1} dx = \lim_{\xi\to 0} \int_{\xi \le |x| \le 1} 1\, dx$$

   dann Formel für Riemann-Integrierbare Funktionen benutzen.) ω_n bekannt, daher σ_{n-1} berechenbar.

3. Neuberechnung von ω_n, σ_{n-1}:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\,dx_n \\ &= (\sqrt{\pi})^n\end{aligned}$$

Auch:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{S_{n-1}} e^{-r^2}\,dS(\xi)\,r^{n-1}\,dr \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}\cdot r^{n-1}\,dr \qquad t:=r^2 \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\int_{t=0}^{\infty}\frac{e^{-t}}{2}\cdot t^{\frac{n-2}{2}}\,dt \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ \Rightarrow \sigma_{n-1} &= 2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} \\ \Rightarrow \omega_n &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\end{aligned}$$

4. Für welche $\alpha > 0$ ist

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{|x|^\alpha}\,dx &< \infty \qquad (1) \\ \int_{|x|\leq 1}\frac{1}{|x|^\alpha}\,dx &< \infty \qquad (2)\end{aligned}$$

zu (1):

$$\begin{aligned}\int_{1\leq|x|\leq R}\frac{1}{|x|^\alpha}\,dx &= \int_{\varrho=1}^{R}\int_{S_{n-1}}\varrho^{-\alpha} dS(\xi)\,\varrho^{n-1} d\varrho \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\int_{\varrho=1}^{R}\varrho^{n-\alpha-1}\,d\varrho \\ &= \sigma_{n-1}\cdot\begin{cases}\left[\dfrac{\varrho^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]_1^R & n\neq\alpha \\ [\ln\varrho]_1^R & n=\alpha\end{cases} \\ &\to \begin{cases}\sigma_{n-1}\cdot\dfrac{1}{\alpha-n} & \alpha>n \\ \infty & \text{sonst}\end{cases} \qquad (R\to\infty)\end{aligned}$$

also Konvergenz für $\alpha > n$. Zu (2): Entsprechend Konvergenz für $\alpha < n$.

Beweis:

1. lokaler Teil mit folgender Annahme: $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $h\colon \Omega \to V := T \times (a,b)$ Diffeomorphismus mt $g =$ letzte Komponente von h, $\Phi := h^{-1}$. Dann $\Phi_r := \Phi(\cdot, r)\colon T \to M_r$ für $a < r < b$ globale Parametrisierung von M_r. Aus $g(\Phi(t,r)) = r$ für $(t,r) \in V$ folgt:

$$g'(\Phi(t,r))\cdot\Phi'(t,r) = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

Damit sind in $\Phi'(t,r)$ die Vektoren $\partial_1\Phi(t,r), \dots, \partial_{n-1}\Phi(t,r)$ orthogonal zu grad $g(\Phi(t,r))$ und

$$(\operatorname{grad} g(\Phi(t,r))|\partial_n\Phi(t,r)) = 1$$

Aus Bemerkung 2 nach Satz 13.2 mit $(A\,w) := \Phi'(t,r)$, $v = \operatorname{grad} g(\Phi(t,r))$ folgt:

$$|\det \Phi'(t,r)| = \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\Phi(t))|} \cdot \gamma(\Phi'_r(t))$$

Für alle $r \in (a,b)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{M_r} f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi) \\ = \; & \int_T f(\Phi_r(t)) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\Phi_r(t))|} \cdot \gamma(\Phi'_r(t))\, dt \\ = \; & \int_T f(\Phi(t,r)) \cdot |\det \Phi'(t,r)|\, dt \end{aligned}$$

Daraus Stetigkeit (und Kompaktheit des Trägers) von

$$r \mapsto \int_{M_r} f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)$$

nach Satz 33.4. Man erhält:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(y)\, dy & \overset{TF}{=} \int_V f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx \\ & \overset{SvF}{=} \int_{r=a}^{b} \int_{t \in V} f(\Phi(t,r)) \cdot |\det \Phi'(t,r)|\, dt\, dr \\ & = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_r} f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr \end{aligned}$$

2. Jeder Punkt $x^0 \in \Omega$ besitzt eine Umgebung wie in Teil 1: Es gibt $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\partial_j g(x^0) \neq 0$. Dann ist die Ableitung von

$$h(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{j-1} \\ x_{j+1} \\ \cdots \\ x_n \\ g(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$h'(x) = \begin{pmatrix} E_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-j-1} \\ \partial_1 g \ldots & \partial_j g & \ldots \partial_n g \end{pmatrix}$$

in x^0 invertierbar. Nach Satz der lokalen Invertierbarkeit gibt es offene Umgebung U von x^0, offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $h(x^0)$, sodass $h\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist; ohne Einschränkung $V = T \times (a,b)$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Also Situation wie in 1).

3. Wegen 2) gibt es zu $\operatorname{spt} f$ (kompakt) eine endliche Überdeckung $(U_j)_{j=1,\ldots,m}$ mit Mengen wie in 1). Aus Satz 34.4: Es gibt $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in C_C(\Omega)$, $\operatorname{spt} \varphi_j \subseteq U_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$$

für $x \in \operatorname{spt}(f)$. Für $j = 1, \ldots, m$ gilt dann nach 1):

$$\begin{aligned} r \; & \mapsto \int_{M_r} \varphi_j(\xi) \cdot f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi) \\ & = \int_{U_j \cap M_r} \varphi_j(\xi) \cdot f(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi) \end{aligned}$$

stetig und

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_j(x)\cdot f(x)\,dx &= \int_{U_j} \varphi_j(x)\cdot f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{U_j\cap M_r} \varphi_j(\xi)\cdot f(\xi)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{M_r} \varphi_j(\xi)\cdot f(\xi)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr\end{aligned}$$

Summation über $j = 1,\dots,m$ ergibt die Behauptungen.

Bemerkungen:

1. Seien Ω, g wie in Satz 14.1. Sei $f \in R(\Omega)$. Dann ist

$$r \mapsto \overline{\int_{M_r}} f(x)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(x)|}\,dS(x)$$

   Riemann-Integrierbar auf $\mathbb{R}$. Es gilt:

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{r=-\infty}^{\infty} \overline{\int_{M_r}} f(\xi)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr$$

   (Beweis wie in Satz von Fubini, Satz 32.1)

2. $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle:

   (a) $f|_{\{x\in\Omega; g(x)\le 0\}}$ stetig
   (b) $f|_{\{x\in\Omega; g(x)>0\}} = 0$
   (c) Es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $f|_{\Omega\setminus K} = 0$

   Dann ist f Riemann-Integrierbar auf Ω,

$$(-\infty, 0] \ni r \mapsto \int_{M_r} f(\xi)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)$$

   stetig,

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}\int_{M_r} f(\xi)\cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\,dS(\xi)\,dr$$

15 Gaußscher Integralsatz

15.1 Gaußscher Integralsatz

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit glatten Rand, $\nu\colon \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Sei $F\colon \dot{A} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sowie

$$\operatorname{div} F := \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_j$$

und F stetig fortsetzbar auf A. Dann gilt:

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial A} (F(x) \,|\, \nu(x))\, dS(x)$$

Bemerkungen:

1. Neben den glatten Rand ist auch ein „kleiner“ singulärer Teil des Randes erlaubt. Zum Beispiel gilt der Gaußsche Integralsatz für den Einheitswürfel $[0,1]^n$. (Gaußscher Integralsatz ist Version des „Hauptsatzes“.)
2. Anschauliche Interpretation des Gaußschen Integralsatzes: $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Dann $\operatorname{div} F$ Quellendichte, nach Gaußschen Satz: die A verlassende Flüssigkeit = in A produzierte Flüssigkeit

Definitionen:

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. A hat glatten Rand, wenn: Für jeden Punkt $a \in \partial A$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ mit

  $$A \cap U = \{x \in U : g(x) \leq 0\}$$

  und $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann

  $$\partial A \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

  Es folgt, dass ∂A eine Hyperfläche ist.

- Sei $a \in \partial A$, g wie oben. Dann ist

  $$\nu(a) := \frac{1}{|\operatorname{grad} g(a)|} \cdot \operatorname{grad} g(a)$$

  der äußere Einheitsnormalenvektor (unabhängig von g). Offenbar

  $$\partial A \ni x \mapsto \nu(x)$$

  stetig.

15.2 Hilfssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1_C(U)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann

$$\int_U \partial_j f(x)\, dx = 0$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung: $U = \mathbb{R}^n, j = n$.

$$\int \partial_n f(x)\, dx \overset{SvF}{=} \int_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \underbrace{\int_{x_n} \partial_n f(x)\, dx_n}_{=0}\, d(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

wegen Hauptsatz.

15.3 Hilfssatz: Gaußscher Integralsatz, lokal

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$,

$$\begin{aligned} U_\pm &:= \{x \in U : g(x) \gtrless 0\} \\ M_r &:= \{x \in U : g(x) = r\} \end{aligned}$$

Sei $F\colon U \to \mathbb{R}^n$, $F = 0$ auf U_+, F stetig differenzierbar auf U_-, $\operatorname{div} F$, F stetig fortsetzbar auf $U_- \cup M_0$,

$$\overline{\{x \in U : F(x) \neq 0\}}^U \text{ kompakt}$$

Dann

$$\int_U \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{M_0} (F(x) \mid \nu(x))\, dS(x)$$

mit $\nu(x)$ wie in Definition.

Bemerkungen:

1. Es gibt $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, ζ monoton fallend, $\zeta|_{[-\infty,-1]} = 1$, $\zeta|_{(-\frac{1}{2},\infty)} = 0$.

   Beweis (konstruktiv):

   - Die Funktion

   $$\alpha(r) := \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{r}} & r > 0 \end{cases}$$

   ist $C^\infty(\mathbb{R})$. Daraus:

   $$\begin{aligned} \alpha_1 &:= e \cdot \alpha_1(r) \\ \alpha_2(r) &:= 1 - \alpha_1(1 - r) \\ \alpha_3 &:= \alpha_1 \circ \alpha_2 \end{aligned}$$

   Dann erfüllt

   $$\zeta(r) = 1 - \alpha_3(2 \cdot (r + 1))$$

   die obigen Bedingungen.

2. Sei ζ wie in 1),

   $$\zeta_k(r) := \zeta(k \cdot r)$$

für $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $h\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ stetig, es gebe $R > 0$, sodass $h|_{(-\infty,-R)} = 0$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \zeta_k(r) \cdot h(r)\, dr \quad &\to \quad \int_{-\infty}^{0} h(r)\, dr \qquad (k \to \infty) \\
\int_{-\infty}^{0} \zeta_k'(r) \cdot h(r)\, dr \quad &\to \quad -h(0) \qquad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\left| \int_{-\infty}^{0} h(r)\, dr - \int_{-\infty}^{0} \zeta_k(r) \cdot h(r)\, dr \right| \quad \le \quad \int_{-\frac{1}{k}}^{0} |h(r)|\, dr \to 0$$

und

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_{-\infty}^{0} \zeta_k'(r) \cdot h(r)\, dr - h(0) \right| \\
= \quad & \left| \int_{-\infty}^{0} \zeta_k'(r) \cdot (h(0) - h(r))\, dr \right| \\
\le \quad & \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{0} |\zeta_k'(r)|\, dr \right)}_{=1} \cdot \max \left\{ |h(0) - h(r)|; -\frac{1}{k} \le r \le 0 \right\} \to 0
\end{aligned}$$

Beweis (Hilfssatz 15.3):

- Seien ζ_k wie in Bemerkung. Dann ist

$$(\zeta_k \circ g) F_j \in C_C^1(U)$$

für $j = 1, \ldots, n$. Nach Hilfssatz 15.2:

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \int_U \partial_j \Big((\zeta_k \circ g) F_j \Big)\, dx \\
&= \quad \int_U \partial_j (\zeta_k \circ g) F_j\, dx + \int_U (\zeta_k \circ g) \cdot \partial_j \cdot F_j\, dx \\
&= \quad \int_U (\zeta_k' \circ g) \cdot (\partial_j g) \cdot F_j dx + \int_U (\zeta_k \circ g) \cdot \partial_j F_j\, dx
\end{aligned}$$

Damit:

$$0 = \underbrace{\int_U (\zeta_k' \circ g) \cdot (\operatorname{grad} g \,|\, F)\, dx}_{(1)} + \underbrace{\int_U (\zeta_k \circ g) \cdot \operatorname{div} F\, dx}_{(2)}$$

Es gilt mit den obigen Bemerkungen:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \overset{14.1}{=} \quad & \int_{-\infty}^{0} \int_{\xi \in M_r} \underbrace{\zeta_k'(g(\xi))}_{\zeta_k'(r)} \cdot (\operatorname{grad} g(\xi) \,|\, F(\xi)) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} dS(\xi)\, dr \\
= \quad & \int_{-\infty}^{0} \zeta_k'(r) \underbrace{\int_{M_r} \left(\frac{\operatorname{grad} g(\xi)}{|\operatorname{grad} g(\xi)|} \,\Big|\, F(\xi) \right) dS(\xi)}_{=:h(r)}\, dr \\
\overset{k\to\infty}{\to} \quad & -h(0) = - \int_{M_0} (\nu(\xi) \,|\, F(\xi))\, dS(\xi)
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &\overset{14.1}{=} \int_{-\infty}^{0} \int_{M_r} \zeta_k(g(\xi)) \cdot \operatorname{div} F(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr \\
&= \int_{-\infty}^{0} \zeta_k(r) \underbrace{\int_{M_r} \operatorname{div} F(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)}_{=:h(r)}\, dr \\
&\overset{k\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{0} h(r)\, dr = \int_{-\infty}^{0} \int_{M_r} \operatorname{div} F(\xi) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} g(\xi)|}\, dS(\xi)\, dr \\
&\overset{14.1}{=} \int_{U_-} \operatorname{div} F(x)\, dx
\end{aligned}
$$

15.4 Satz: Partition der Eins, C_C^∞

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_1, \ldots, U_m)$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\operatorname{spt} \varphi_j \subseteq U_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und für alle $x \in K$ gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$$

Beweis:

- Im Wesentlichen wie für Satz 34.4, wenn man hätte:
  Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ kompakt, so gibt es $\varphi \in C_C^\infty(U)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$. Existenz eines φ:

  1. Es gibt $\psi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_0 \geq 0$, $\operatorname{spt} \psi_0 = B[0,1]$, $\psi_0(x) > 0$ für $|x| < 1$. Und zwar:

  $$\psi_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

  d.h. $\psi_0 = \alpha(1 - |x|^2)$ mit

  $$\alpha(r) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{r}\right) & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

  2. Da K kompakt: Es existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$, $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$ mit

  $$
  \begin{aligned}
  K &\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \delta_j) \\
  &\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B[x_j, \delta_j] \subseteq U
  \end{aligned}
  $$

  Für $j = 1, \ldots, m$ gibt es $\psi_j \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi_j(x) > 0$ für $x \in B(x_j, \delta_j)$, $\psi_j(x) = 0$ für $x \notin B(x_j, \delta_j)$. Dann $0 \leq \psi := \sum \psi_j \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} \psi \subseteq \bigcup B[x_j, \delta_j] \subseteq U$,

  $$\mu := \min_{x \in K} \psi(x) > 0$$

  Sei $\beta \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ wie α_2 in Bemerkung 2). Dann

  $$\varphi := \beta \circ \left(\frac{1}{\mu} \cdot \psi\right)$$

Beweis Satz 4.1:

- Es gibt offene Mengen $U_1, \ldots, U_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\partial A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$, wobei jedes U_j wie in Definition von „glatten Rand“ ist. (Beachte: ∂A kompakt) Es gibt eine Partition der Eins $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf A zu $U_0 := \dot{A}, U_1, \ldots, U_m$. Damit:

$$\begin{aligned}
\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx &= \int_A \operatorname{div} \left(\left(\sum_{j=0}^m \varphi_j \right) \cdot F(x) \right) dx \\
&= \underbrace{\int_A \operatorname{div}(\varphi_0 \cdot F)\, dx}_{0\,(HS4.2)} + \sum_{j=1}^m \int_A \operatorname{div}(\varphi_j \cdot F)\, dx \\
&\overset{HS4.3}{=} \sum_{j=1}^m \int_{\partial A \cap U_j} (\varphi_j \cdot F \,|\, \nu)\, dS(\xi) \\
&= \int_{\partial A} \sum_{j=1}^m (F \cdot \varphi_j \,|\, \nu)\, dS(\xi) \\
&= \int_{\partial A} (F \,|\, \nu)\, dS(\xi)
\end{aligned}$$

Beispiel:

1. Archimedisches Prinzip:

   Körper A in Flüssigkeit mit konstanter Dichte ϱ. Kraft auf A im Punkt $x \in \partial A$ hervorgerufen durch den Druck
   $$-(p - g \cdot \varrho \cdot x_3) \cdot \nu(x)$$
   Also auf A wirkende Kraft:
   $$F = \int_{\partial A} (-p + g \cdot \varrho \cdot x_3)\, dS(x)$$
   d.h.
   $$\begin{aligned}
   F_j &= \int_{\partial A} (-p + g \cdot \varrho \cdot x_3) \cdot \nu_j(x)\, dS(x) \\
   &\overset{GIS}{=} \int_A \partial_j(-p + g \cdot g \cdot x_3)\, dx
   \end{aligned}$$
   Also $F_1 = F_2 = 0$,
   $$F_3 = g \cdot \int_A \varrho\, dx = \varrho \cdot g \cdot \operatorname{vol}_3 A$$

Definition:

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche ($(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit). M heißt orientierbar $:\Leftrightarrow\ \exists : M \to \mathbb{R}^n$ stetig, sodass $\nu(x)$ Einheitsnormale zu M in x ist. ν heißt dann Orientierung. (Dann $-\nu$ ebenfalls Orientierung)

  Beispiel für nicht-orientierbare Hyperfläche: Möbiusband

- Ist $F\colon M \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, stetig, dann
  $$\int_{(M,\nu)} F := \int_M (F(x) \,|\, \nu(x))\, dS(x)$$
  Fluss des Vektorfeldes durch M, Oberflächenintegral 2. Art.

15.5 Satz von Stokes, klassisch

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierbare Hyperfläche mit Orientierung ν mit glatter Randkurve γ, deren Orientierung (=Durchlaufungssinn) der von M „zugeordnet“ ist. Sei Ω eine offene Umgebung von M, $F\colon \Omega \to \mathbb{R} \in C^1(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma F = \int_{(M,\nu)} \operatorname{rot} F$$

d.h.

$$\int (F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t))\, dt = \int_M (\operatorname{rot} F(x) \mid \nu(x))\, dS(x)$$

dabei

$$\operatorname{rot} F := \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

(Rotation)

Beispiel:

1. Sei M der Paraboloid

   $$z = x^2 + y^2 \qquad z \leq 1$$

   Sei

   $$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Dann Rand von M:

   $$x^2 + y^2 = 1 \qquad z = 1$$

   Parametrisierung der Randkurve:

   $$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Linke Seite von Satz von Stokes:

   $$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^{2\pi} -1\, dt = -2\pi$$

   Für rechte Seite betrachte

   $$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T$$

   M wird von $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ parametrisiert, als Graph der Funktion $g(x,y) = x^2 + y^2$. Daher:

   $$\begin{aligned} \nu(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} g|^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (γ zugeorndet nach Rechte-Faust-Regel) Damit:

   $$\begin{aligned} \int_{(M,\nu)} \operatorname{rot} F &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}} \cdot \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} -2\, d(x,y) = -2\pi \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $g\colon T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $M :=$gr g eine Hyperfläche. Die „nach oben" zeigende Normale in $(t, g(t))$ ist

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

(noch nicht normiert)

Beweis:

- Für $f\colon T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t,s) = s - g(t)$$

ist

$$M = \{(t,s) \in T \times \mathbb{R} : f(t,s) = 0\}$$

Dann

$$\operatorname{grad} f(t,s) = \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu den Tangentenvektoren.

2. Allgemeinere Version des Satzes von Stokes:
   (a) γ besteht aus mehreren Teilen
   (b) Randkurve hat Ecken
   (c) M hat Ecken

Beispiel:

1. Sei

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

wie oben, M Kegel

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Durch $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ wird Kegel parametrisiert, $M =$gr g mit $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Also

$$\nu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} g|^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \int_{(M,\nu)} \operatorname{rot} F &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\, d(x,y) \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

15.6 Satz von Green

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit glatter Randkurve γ, „positiv“ orientiert. Sei $F\colon \Omega \to \mathbb{R} \in C^1(\Omega)$, wobei $\Omega \supseteq A$ offen. Dann

$$\int_\gamma F = \int_A (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, d(x,y)$$

Bemerkung:

- Satz von Green ist Spezialfall von Satz von Stokes: Einbetten nach $\mathbb{R}^3$ $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$, $\tilde{F}(x,y,z) = (F(x,y),0)^T$, $\nu = (0,0,1)^T$, $\operatorname{rot} F = (0,0,\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^T$

Beweis:

- Mit Gaußschen Integralsatz in $\mathbb{R}^2$: Definiere

  $$G(x,y) := \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}$$

  Dann

  $$\operatorname{div} G = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$$

  Bestimmung der Normalen:

  $$\nu = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$$

  Gaußscher Integralsatz:

  $$\begin{aligned} \int_A \operatorname{div} G\, dx &= \int_{\partial A} (G \mid \nu)\, dS \\ &= \int \frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \left(\begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right) \cdot |\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int (F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t))\, dt = \int_\gamma F \end{aligned}$$

16
Differentialformen

16.1 Verwendung von Differentialformen

1. Interpretation und Verallgemeinerung der klassischen Vektoranalysis: div, grad, rot, Gaußscher Satz, Satz von Stokes als Spezialfall eines allgemeinen Satz von Stokes
2. Algebraische Topologie: Beschreibung gewisser Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten durch Gruppen, ...; Fixpunktsätze, z.B.
   - $f\colon B_{\mathbb{R}^n}[0,1] \to B_{\mathbb{R}^n}[0,1]$ stetig. $\Rightarrow$ Es existiert $x \in B_{\mathbb{R}^n}$ mit $f(x) = x$. (Fixpunktsatz von Brouer)
   - $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow f(\Omega)$ ist offen (Gebietsinvarianz).
3. Differentialgeometrie/Elektrodynamik/Relativitätstheorie

16.1.1 Satz von Stokes

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf M_{int}, sodass ω und $d\omega$ stetig auf M fortsetzbar sind. Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{M_\partial} \omega$$

16.2 Alternierende Multilinearformen

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = k$.

- Definition: Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Eine alternierende r-Linearform auf V ist eine Abbildung $\sigma\colon V^r \to \mathbb{R}$ mit
  1. σ ist r-linear (linear in jeder Komponente)
  2. Für $\pi \in S_r$ (Gruppe der Permutationen von $\{1,\dots,r\}$) gilt:

  $$\sigma(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(r)}) = (\operatorname{sgn}\pi)\cdot\sigma(v_1,\dots,v_r)$$

  für alle $v_1,\dots,v_r \in V$
- Definition:

  $$\bigwedge\nolimits^r V^* := \{\sigma; \sigma \,\text{alternierende}\ r\text{-Linearform auf V}\}$$

  (Vektorraum), Dachprodukt von V^*. Es gilt:

  $$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits^1 V^* &= V^* \qquad \text{Dualraum} \\ \bigwedge\nolimits^0 V^* &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Definition: Seien $r, s \in \mathbb{N}^0$, $\sigma \in \bigwedge^r V^*$, $\tau \in \bigwedge^s V^*$. Wir setzen

$$\sigma \otimes \tau(v_1, \ldots, v_{r+s}) \quad := \quad \sigma(v_1, \ldots, v_r) \cdot \tau(v_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$$

und definieren

$$\sigma \wedge \tau(v_1, \ldots, v_{r+s}) \quad := \quad \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} (\operatorname{sgn} \pi) \cdot \sigma \otimes \tau(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r+s)})$$

für $v_1, \ldots, v_{r+s} \in V$; äußeres Produkt (Dachprodukt).

- Sei $M_r := \{\sigma \colon V^r \to \mathbb{R}, \sigma\ r\text{-linear}\}$. Definiere

$$\begin{aligned} \operatorname{alt} \colon M_r &\mapsto \bigwedge^r V^* \\ \sigma &\mapsto \frac{1}{r!} \cdot \left(\sum_{\pi \in S_r} (\operatorname{sgn} \pi) \cdot \sigma^\pi \right) \end{aligned}$$

mit $\sigma^\pi(v_1, \ldots, v_r) := \sigma(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r)})$. σ alternierend:

$$(\operatorname{sgn} \pi) \cdot \sigma^\pi = \sigma$$

Damit:

$$\sigma \wedge \tau = \frac{(r+s)!}{r! \cdot s!} \cdot \operatorname{alt}(\sigma \otimes \tau)$$

Bemerkungen:

1. $\sigma \wedge \tau \in \bigwedge^{r+s} V^*$ und die Abbildung $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \wedge \tau$ ist bilinear

2. $\tau \wedge \sigma = (-1)^{r \cdot s} \cdot \sigma \wedge \tau$

3. Für $t \in \mathbb{N}_0, \varrho \in \bigwedge^t V^*$ gilt:

$$\begin{aligned} (\tau \wedge \sigma) \wedge \varrho &= \tau \wedge (\sigma \wedge \varrho) \\ &= \frac{1}{r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\pi \in S_{r+s+t}} (\operatorname{sgn} \pi) \cdot (\tau \otimes \sigma \otimes \varrho)^\pi \end{aligned}$$

4. Für $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in V^*$, $v_1, \ldots, v_r \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_r(v_1, \ldots, v_r) &= \sum_{\pi \in S_r} (\operatorname{sgn} \pi) \cdot \sigma_1(v_{\pi(1)}) \cdots \sigma_r(v_{\pi(r)}) \\ &= \det(\sigma_i(v_j))_{i,j} \end{aligned}$$

   Insbesondere: Für $V = \mathbb{R}^k$, $\delta_1, \ldots, \delta_k$ duale Basis zu den Einheitsvektoren, so gilt

$$\delta_1 \wedge \ldots \delta_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(v_1 \ldots v_k)$$

   für $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$.

5. Sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ Basis von V^*. Dann ist

$$(\sigma_{j_1} \wedge \ldots \wedge \sigma_{j_r}; 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq k)$$

   Basis von $\bigwedge^r V^*$, somit $\dim \bigwedge^r V^* = \binom{k}{r}$ für $0 \leq r \leq k$. Für $r > k$ ist $\bigwedge^r V^* = \{0\}$.

6. Definiere

$$\mathcal{G}(V^*) := \oplus_{r=0}^k \bigwedge^r V^*$$

   Darauf ist Multiplikation erklärt, „natürlich“. Algebra mit 1 (Grossmann-Algebra)

Definition:

- Sei W ein weiterer endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to W$ linear. Dann induziert φ eine Abbildung,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*\colon \bigwedge^r W^* & \to & \bigwedge^r V^* \\ (\varphi^*\sigma)(v_1,\dots,v_r) & \mapsto & \sigma(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_r)) \end{array}$$

  φ^* heißt Rücktransport (pull-back).

Bemerkung:

1. Sind $V = W = \mathbb{R}^k$, $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\delta_1,\dots,\delta_k$ wie oben.

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(\delta_1 \wedge \dots \delta_k)(v_1,\dots,v_k) & = & \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_k(\varphi v_1,\dots,\varphi v_k) \\ & = & \det(\varphi v_1 \dots \varphi v_k) \\ & = & \det(\varphi(v_1 \dots v_k)) \\ & = & \det\varphi \cdot \det(v_1 \dots v_k) \\ & = & (\det\varphi)\cdot \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_k(v_1 \dots v_k) \end{array}$$

   d.h.

$$\varphi^*(\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_k) = (\det\varphi)\cdot \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_k$$

16.3 Tangentialraum, Differentialformen

Definitionen:

- Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Seien $a \in M$, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi\colon T \to M$ eine lokale Parametrisierung, $t \in T$ mit $\Phi(t) = a$. Dann ist

$$T_aM := \Phi'(t)(\mathbb{R}^k)$$

  Tangentialraum von M in a. Es gilt $\dim T_aM = k$ wegen $\dim \Phi'(t) = k$. Dazu

$$\bigwedge^r T_a^*M := \bigwedge^r (T_aM)^*$$

- Differentialform vom Grad r (r-Form): Abbildung

$$\omega : M \to \bigcup_{a\in M} \bigwedge^r T_a^*M$$

  mit $\omega(a) \in \bigwedge^r T_a^*M$ für alle $a \in M$. $\Omega^r(M)$ ist Vektorraum der r-Formen,

$$\begin{array}{rcl} \Omega^0(M) & = & \text{Funktionen}\,\omega : M \to \mathbb{R} \\ \Omega^1(M) & = & \text{Pfaffsche Formen} \end{array}$$

- Sei N eine j-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon M \to N$ stetig differenzierbar, d.h. $\varphi \circ \Phi$ stetig differenzierbar für alle lokalen Parametrisierungen $\Phi\colon T \to M$. Dann $\varphi'(a)\colon T_aM \to T_{\varphi(a)}N$ für $a \in M$:

$$\varphi'(a)(\Phi'(t)\cdot v) = (\varphi \circ \Phi)'(t)\cdot \qquad (v \in \mathbb{R}^k)$$

  mit Φ wie in Definition von Tangentialraum. Dann ist $\varphi'(a)$ wohldefiniert und linear.

  Für $\omega \in \Omega^r(N)$: Rücktransport $\varphi^*\omega \in \Omega^r(M)$ definiert durch

$$\varphi^*\omega(a)(v_1,\dots,v_r) := \omega(\varphi(a))(\varphi'(a)\cdot v_1,\dots,\varphi'(a)\cdot v_r)$$

  für $a \in M$, $v_1,\dots,v_r \in T_aM$, kurz

$$\varphi^*\omega(a) = \varphi'(a)^*\omega(\varphi(a))$$

  Damit $\varphi^*\colon \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$ linear.

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann
$$T_x U = \mathbb{R}^n$$
für alle $x \in U$. Bezeichne $dx_1, \dots, dx_n$ die duale Basis zu $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$. Jedes $\omega \in \Omega^r(U)$ hat eine Darstellung
$$\omega = \sum_{I \in A(n,r)} f_I \, dx_I$$
mit
$$\begin{aligned} A(n,r) &:= \{(j_1, \dots, j_r); 1 \le j_1 < \dots < j_r \le n\} \\ dx_I &:= dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \text{ für } I = (j_1, \dots, j_r) \in A(n,r) \end{aligned}$$
wobei $f_I \colon U \to \mathbb{R}$. ω stetig bzw. stetig differenzierbar, wenn dies für alle f_I gilt.
- Ist M eine k-dimensioane Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^r(M)$, dann heißt ω stetig bzw. stetig differenzierbar, wenn die Rücktransporte $\Phi^*\omega$ für alle lokalen Parametrisierungen Φ stetig bzw. stetig differenzierbar sind. (Ab hier: Alle Untermannigfaltigkeiten C^2, alle Parametrisierungen, Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten C^2)

Bemerkung:

1. „dx_j“ schlechte Bezeichnung! Im Sinne der äußeren Ableitung (siehe unten), $x \mapsto x_j$, $d(x \mapsto x_j) = dx_j$

16.4 Äußere Ableitung von Differentialformen

Definiton:

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in \Omega^0(U)$, d.h. $f \colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann
$$df := \sum_{j=1}^{n} \partial_j f \, dx_j \qquad \in \Omega^1(U)$$
totales Differential. Ist $\omega \in \Omega^r(U)$ stetig differenzierbar, also
$$\omega = \sum_{I \in A(n,r)} f_I \, dx_I$$
mit f_I stetig differenzierbar, dann
$$d\omega := \sum_{I \in A(n,r)} df_I \wedge dx_I \qquad \in \Omega^{r+1}(U)$$
(äußere Ableitung, Differential von ω), $d \colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ linear.

Bemerkungen:

1. Für $f \in C^0(U)$: $df \sim \operatorname{grad} f$. Für $F \colon U \to \mathbb{R}^3 : dF \sim \operatorname{rot} F$. Auch: $F \colon U \to \mathbb{R}^n : dF \sim \operatorname{div} F$
2. Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$, $\omega_1 \in \Omega^r(U)$, $w_2 \in \Omega^s(U)$, dann
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$$
mit $(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a)$, Produktregel.
3. Ist $w \in \Omega^r(U)$ zweimal stetig differenzierbar, dann
$$d(d\omega) = 0$$
Entspricht für $n = 3$: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

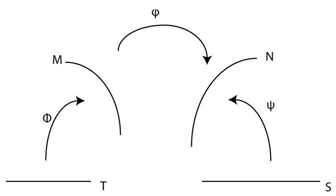
4. Ist $\varphi\colon U \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen zweimal stetig differenzierbar, $\omega \in \Omega^r(V)$ stetig differenzierbar, dann
$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$$
(„d und φ vertauschen“) Für $\omega = f \in \Omega^0(V)$: Kettenregel

Definition:

- Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $w \in \Omega^r(M)$ stetig differenzierbar, $\Phi\colon T \to M$ eine lokale Parametrisierung. Dann
$$\Phi^* d\omega := d(\Phi^*\omega)$$
explizit:
$$d\omega := (\Phi^{-1})^* d(\Phi^*\omega)$$
(wohldefiniert)

Bemerkung:

1. Vertauschbarkeit in Bemerkung 4) gilt auch für $\varphi\colon M \to N$, $\omega \in \Omega^r(N)$:



mit $\varphi(\Phi(T)) \subseteq \Psi(S)$. Dann:
$$\begin{aligned}
\Phi^* d(\varphi^*\omega) &= d(\Phi^*\varphi^*\omega) \\
&= d((\varphi \circ \Phi)^*\omega) \\
&= d((\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi)^*\, \Psi^*\omega) \\
&= (\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi)^* d(\Psi^*\omega) \\
&= \Phi^*\varphi^*(\Psi^{-1})^* d(\Psi^*\omega) \\
&= \Phi^*(\varphi^* d\omega)
\end{aligned}$$

16.5 Orientierung von Untermannigfaltigkeiten, Integral von Differentialformen

Definition: Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

- Eine Karte von M ist eine injektive Abbildung $h\colon U_h \to \mathbb{R}^k$ wobei $U_j \in M$ offen (relativ offen in M), $h^{-1}\colon h(U_h) \to M$ ist eine lokale Parametrisierung. Ein Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Menge von Karten mit
$$\bigcup_{h \in \mathcal{A}} U_h = M$$
Zwei Karten h, g heißen gleichorientiert, wenn $g \circ h^{-1}\colon h(U_h \cap U_g) \to g(U_h \cap U_g)$ orientierungstreu ist, d.h.
$$\det(g \circ h^{-1})' > 0$$
M heißt orientirbar, wenn es einen Atlas aus gleichorientierten Karten gibt. Mit diesem Atlas heißt M orientiert. Eine lokale Parametrisierung Φ heißt positiv orientiert, wenn Φ^{-1} gleichorientiert wie die Karten des Atlas sind.

- Seien M orientiert, $\Phi\colon T \to M$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung, $\omega \in \Omega^k(M)$ stetig, $\operatorname{spt}\omega \subseteq \Phi(T)$ kompakt. Dann
$$\Phi^*\omega(w) = f(t) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$$

mit $f \in C_C(T)$. Man definiert:

$$\begin{aligned} \int_M \omega &:= \int_T f(t)\,dt \\ \Big(&= \int_T \Phi^*\omega \Big) \end{aligned}$$

(Ist wohldefiniert.) Ist $\omega \in \Omega^k(M)$ stetig mit kompaktem Träger in M, dann $\int_M \omega$ definieren mit Partition der Eins.

16.6 Berandete Untermannigfaltigkeiten

Sei $k \in \mathbb{N}$,

$$H_k := \{x \in \mathbb{R}^k; x_1 \leq 0\}$$

16.6.1 Satz von Stokes, „Urform“

Sei $\omega \in \Omega^{k-1}(\int H_k)$ stetig differenzierbar, stetig fortsetzbar auf H_k, d.h. in

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j \underbrace{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_k}_{=:dx_j^c}$$

sind die Funktionen f_j stetig fortsetzbar auf H_k und $d\omega$ stetig fortsetzbar auf H_k. Es gebe $R > 0$, sodass $\omega = 0$ auf $H_k \backslash B(0, R)$. Dann:

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega$$

Beweis:

- Gaußscher Integralsatz auf $f = (f_1, \ldots, f_k)$: Dann

  $$d\omega = (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

  und

  $$\begin{aligned} d(f_j dx_j^c) &= \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j^c \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_j^c \\ &= (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \end{aligned}$$

  Also:

  $$\begin{aligned} \int_{H_k} d\omega &= \int_{H_k} \operatorname{div} f\, dx \\ &= \int_{\partial H_k} (f(\xi) | \nu(x))\, dS(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

  Wie ∂H_k orientiert? So orientiert, dass die Parametrisierung

  $$\Phi \colon \mathbb{R}^{k-1} \ni t \mapsto (0, t) \in \partial H_k$$

verträglich mit der Orientierung von H_k ist (siehe unten). Dazu muss $v = (e_1, (e_2, \dots, e_k))$ positiv orientiert sein. Dann

$$\begin{aligned}\int_{\partial H_k} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Phi^* \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(t)\, dt\end{aligned}$$

Definition:

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit , wenn $M = M_{\text{int}} \cup M_\partial$ mit $M_{\text{int}} \cap M_\partial = \emptyset$, M_{int} k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und zu jedem Punkt $a \in M_\partial$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ und eine stetige injektive Abbildung $h \colon U \to H_k$, sodass $T := h(U)$ offen in H_k, $h(U \cap M_\partial) = T \cap \partial H_k$ und $h^{-1} \colon T \to M$ lokale Parametrisierung. (h^{-1} stetig, $h^{-1}|_{T \cap (\operatorname{int} H_k)}$ lokale Parametrisierung, Ableitung von $h^{-1}|_{T \cap (\operatorname{int} H_k)}$ stetig fortsetzbar auf T, Rang der Fortsetzung maximal) M_{int} „Inneres“, M_∂ „Rand“, auch ∂M bezeichnet. (M_∂ ist $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$)
- Berandete Untermannigfaltigkeit orientiert (Atlas aus gleichorientierten Karten). Orientierung induziert Orientierung auf M_∂: Ist $a \in M_\partial$, U offene Umgebung von a (in T), $h \colon U \to H_k$ orientierte Karte, so ist $\Phi^{-1} \circ h|_{M_\partial}$ mit $\Phi \colon \mathbb{R}^{k-1} \ni t \mapsto (0, t) \in \partial H_k$ positiv orientierte Karte von M_∂.

Beweisskizze zu Satz von Stokes:

- Sei $T \subseteq H_k$ offen (in H_k), $\Phi \colon T \to M$ lokale Parametrisierung, $\omega \in \Omega^{k-1}(M_{\text{int}})$ stetig differenzierbar, stetig fortsetzbar auf M, $\operatorname{spt} \omega \subseteq \Phi(T)$ kompakt. Dann

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{\Phi(T)} d\omega = \int_T \Phi^*(d\omega) \\ &= \int_T d(\Phi^* \omega) \\ &\overset{16.6.1}{=} \int_{T \cap \partial H_k} \Phi^* \omega = \int_{\Phi(T \cap \partial H_k)} \omega \\ &= \int_{\Phi(T) \cap M_\partial} \omega = \int_M \omega\end{aligned}$$