DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Inhaltsverzeichnis

Compiled on 25. April 2019

Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$ topologische Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen + glatte `Strukturen` von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ zusammen mit einer Karte $x\colon U \to \mathbb{R}^n$

Idee: da M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf M zu verstehen.

`Wichtig dabei`: das Objekt auf M muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. `Tangentialraum` „über" jedem Punkt $p \in M$ „hängt" ein Vektorraum T_pM, $\dim T_pM = \dim M$ Elemente von T_pM heißen Tangentialvektoren.

$$\begin{aligned} T_pM &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p)\cdot\partial(g) + g(p)\cdot\partial(f)\} \end{aligned}$$

Motto: Tangentialvektor $\hat{=}$ Richtungsableitung!

$\pi\colon TM \to M$ ist glatt $v \in T_pM \mapsto p$

Nutzen: wir verstehen „wirklich", was Ableitungen sind

Früher:

$$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \rightsquigarrow \quad & D_pf \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ & Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Jetzt in Diffgeo:

$$f \in C^\infty(M,N) \underset{p\in M}{\rightsquigarrow} D_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

   Vektorfeld: $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = id_M$ ($\Leftrightarrow X(p) \in T_pM$) Gegeben $X \rightsquigarrow \Phi\colon \underset{\subseteq \mathbb{R}\times M}{W} \to M$ (Fluss des Vektorfeldes)

   s.d. $\forall p \in M$ $\gamma_p(t) := \Phi(t,p)$ die ODE

   $$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

   lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf M ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben $X,\, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{Vektorfeld} \rightsquigarrow [X,Y] \in \Gamma(TM)$

   $(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ wird zu einer Lie-Algebra.

   Def. Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ mit folgenden Eingenschaften:

   (a) $[X,Y] = -[Y,X],\;\; X,\, Y \in V$
   (b) Jacobi-Identität: $X,\, Y,\, Z \in V$:

   $$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

   Beispiele:

   (a) $\Gamma(TM)$, $[\cdot,\cdot]$ ist eine Lie-Algebra
   (b) $\mathbb{M}_u(\mathbb{R})$, $[A,B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra

   Verbindung zwischen a) und b) − Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

   G Lie-Gruppe $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Lie}(G) = 2(G) = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_pLg} X = X\} =$

   $\{x \mid x$ linksinvariantes Vektorfeld $\}$

   $\to$ Lie-Algebra bzgl. $[\cdot,\cdot]$, heißt Lie-Algebra von G.

   Eigenschaften: $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1G$ als Vektoraum $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G) = \dim G$

   $$\begin{aligned} Lg\colon G &\;\to\; G \\ h &\;\mapsto\; g \cdot h \end{aligned}$$

   Satz $G = GL(n,\mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

   $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1G \underset{\text{Vektoraum}}{\cong} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

   Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathbb{R})),[\cdot,\cdot]) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}),[\cdot,\cdot])$$

Für jedes $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist dann $\mathrm{Lie}(G) \subseteq (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}),[\cdot,\cdot])$.

$$[A,B] = AB - BA$$

Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{rcl} p \in \mathbb{R}^n \quad D_pf\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m(\text{linear}) \\ v & \mapsto & \underbrace{\partial_v f(p)}_{=D_pf(v)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \partial_v f(p) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p v^i \end{aligned}$$

$$D_pf \underset{\text{als Matrix}}{=} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$$

$$f\colon M \to N$$

$$\begin{array}{lll} p \in M \rightsquigarrow D_pf\colon & T_pM & \to T_{f(p)}N \text{ linear} \\ & \Cup & \\ & v & \mapsto (\underbrace{\varphi}_{C^\infty} \mapsto v(f^*\varphi)) = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)}) \end{array}$$

$v \mathrel{\hat{=}}$ Ableitungsoperation ($v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^*\varphi"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

TODO Bildchen

$$\begin{array}{ccl} M & \overset{f}{\to} & N \\ & \rightsquigarrow & \\ C^\infty(N) & \overset{f^*}{\to} & C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Jeder Tangentialvektor v ist eine lineare Abbildung $v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, dann ist $\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)}f(v)=f_*v} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ linear

Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$\begin{array}{ccl} & \mathrm{Lie}(G) & = \mathrm{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(C) \mid X^* = -X\},\ [\cdot,\cdot] \\ & \cong & \\ & T_1G & \subset T_1 \,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ & \parallel & \\ \{ & \dot\gamma(0) & \mid \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G \wedge \gamma(0) = 1\} \end{array}$$

Sei $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G$ eine Kurve, $\gamma(0) = 1$

$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\big|_{t=0}$

$$\begin{array}{ccc} \dot\gamma(0)^*\gamma(0) & + & \gamma(0)^*\dot\gamma(0) = 0 \\ & \parallel & \\ \dot\gamma(0)^* & + & \dot\gamma(0) = 0 \end{array}$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige $\supseteq$ betrachte:

$$\begin{aligned} \gamma(t) := e^{tX} &\left(:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* = e^{tX^*} &= e^{-tX} \\ \gamma(t) * \gamma(t) = e^{-tX} \cdot e^{tX} &= 1 \Rightarrow \gamma(t) \in \mathrm{U}(n) \\ \dot\gamma(t) = Xe^{tX} &\Rightarrow \dot\gamma(0) = X \end{aligned}$$

wie gewünscht. $\Rightarrow$ Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \operatorname{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \, \mathrm{og} = \underline{u}(n) \subset \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{aligned} \exp\colon \quad & \mathrm{og} && \to G \\ & \;\Cup \\ & X && \mapsto \exp(X) \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \exp(tX)$$

$$\dot\gamma(t) = Xe^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = \left(L_{\gamma(t)}\right)_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei $\tilde{X}$ das linksinvariante Vektorfeld zu X ist

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist eine Integralkurve von $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$G \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve $A(t) \in G$ von $\tilde{X}$ erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$ mit $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

$$\begin{aligned} x &\mapsto A \cdot x \\ f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f = f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$f\colon V \to W \text{ linear}$$

mit Übung 28 $p \in V$:

$$\begin{array}{ccc} T_pV & \xrightarrow{D_pf} & T_pW \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}$$

$$\det\colon\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcl} D_1 \det\colon \mathbb{M}_n(R) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ? = \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

$$\det(1 + tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1 + tA) = \det(1 + tBAB^{-1})$$

Wenn A diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{array}{rcl} \det(1 + tA) & = & \begin{vmatrix} 1 + t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + t\lambda_n \end{vmatrix} \\ & = & (1 + t\lambda_1) \cdots (1 + t\lambda_n) \\ & = & 1 + t(\lambda_1 + \lambda_n) + O(t^2) \\ & = & 1 + t \cdot \mathrm{Trace}(A) + O(t^2) \end{array}$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

$$\overset{U}{\rule{6cm}{0.4pt}}\ \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow\ \alpha\colon U \overset{\cong}{\to} V \text{ Diffeo}$$

$$\underset{V}{\rule{6cm}{0.4pt}}\ \mathbb{R}^n$$

Betrachte $n = 1$:

U, $V \subseteq \mathbb{R}$ offenen Intervalle. $\alpha\colon \underbrace{U}_{=(a,b)} \to V$ Diffeo (= strikt monotone glatte Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

„Mnemonik“:

$$\mathrm{d}v = v'(u)\,\mathrm{d}u$$

$f\colon V \to \mathbb{R}$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u)\alpha'(u)\,\mathrm{d}u = \int_V f(v)\,\mathrm{d}v \neq \int_V \alpha^*(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u\alpha)\,\mathrm{d}_{u_1}\cdots\mathrm{d}_{u_n} = \int_V f(v)\,\mathrm{d}_{v_1}\cdots\mathrm{d}_{v_n}$$

$$\begin{aligned}\alpha\colon \quad & U & \to V \text{ Diffeo}\\ & (u_1,\dots,u_n) & \mapsto (v_1,\dots,v_n)\end{aligned}$$

$v = v(u)$

$$\int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 =: (*)$$

$$= \int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \int_U f(v(u))\left(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\underset{(*)\text{ sein}}{\overset{\text{sollte}}{=}} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\end{pmatrix}} \right)\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 &= \mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_2 = 0 \\ \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_2 &= -\,\mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_1 = 0 \end{aligned}$$

Erkenntniss:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine n-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist (informell) ein Ausdruck

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit den Rechenregeln: wenn $x = x(y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y))\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n\right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}y_j = -\,\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}y_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

folglich ist $\int \omega$ unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektoraum $V(= T_pM, T_p^*M)$ einen Kalkühl zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit Rechenregeln $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multilineiaren (z.B. det: $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multilinieare Abbildung $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

Definition: Tensorprodukt

Ein Vektoraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V \times W \to V \otimes W$ heißt Tensorprodukt von V und W, wenn für jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \to Z$, (Z beliebiger Vektoraum) eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f}\colon V \otimes W \to Z$ existiert mit $\bar{f} \circ i = f$ (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{f}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \otimes W$

Wenn $V \otimes W$ existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
V + W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_1 \arrow[d, dashed, "\exists! f_1"] \\
& (V \otimes W)_2 \arrow[u, dashed, bend right=60, "\exists! f_2"']
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_1$ liefert $f_1\colon (V \otimes W)_1 \to (V \otimes W)_2$ mit $f_1 \circ i_1 = i_2$.

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_2$ liefert $f_2\colon (V \otimes W)_2 \to (V \otimes W)_1$ mit $f_2 \circ i_2 = i_1$.

Beh. f_1, f_2 sind invers zueinander. Betrachte z.B.: $f_1 \circ f_2$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_2 \arrow[d, "f_1 \circ f_2"] \\
& (V \otimes W)_2 \arrow[u, bend right=60, "id"']
\end{tikzcd}$$

Wegen der Eigenschaften in der Definition von $(V \otimes W)_2$ ist $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{(V \otimes W)_2}$. Analog gilt $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{(V \circ W)_1}$

Existenz von $V \otimes W$

Idee: $V \otimes W$ soll von Ausdrücken der Form $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$ aufgespannt werden und $v \otimes w$ soll linear in V und W sein.

Definition: Sei X eine Menge. Der freie (reelle) Vektoraum auf X, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$, ist der (reelle) Vektoraum mit Basis X.

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) \cong \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W) \Big/ \left\langle \begin{smallmatrix} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), v_1,v_2 \in V, w \in W \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), v \in V, w_1,w_2 \in W \\ \left.\begin{smallmatrix} (\lambda v,w)-\lambda(v,w) \\ (v,\lambda w)-\lambda(v,w) \end{smallmatrix}\right\} v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{smallmatrix} \right\rangle$$

Sei

$$\begin{array}{rll} i\colon & V \times W & \to V \otimes W \\ & (v,w) & \mapsto [(v,w)] =: v \otimes w \end{array}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1+w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\langle \cdot \rangle = \operatorname{span}(\cdot)$$

wenn E ein Vektoraum ist, $E' \subseteq E$ Untervektorraum, dann ist $E/E' = \{e + E' \mid e \in E\}$ mit mengenmäßiger Addition und Skalarmultiplikation. (bei uns ist $E = \mathcal{F}(V \times W)$, $E' = \langle \ldots \rangle$)

Interpretation: E/E' = Vektoraum der Äquivalenzklassen von Vektoraum in E modulo E'. ($e' = 0$, $e' \in E'$) Entsprechend ist

$$V \otimes W = \operatorname{span}\{\underbrace{v \otimes w}_{=[(v,w)]} \mid v \in V, w \in W\}$$

mit den Relationen:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1+w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lemma

Die angegebene Konstruktion von $V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Beweis:

Sei $f\colon V \times W \to Z$ gegeben, bilinear

Definiere

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon V \times W &\to Z, \quad \text{linear} \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i, w_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i, w_i) \end{aligned}$$

Behauptung: $\hat{f}$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{f}$

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon V \otimes W &\to Z \\ (v \otimes w) &\mapsto \hat{f}((v, w)) \end{aligned}$$

Dazu muss man überprüfen, dass $(v_1 + v_2, w) - (v, w) - (v_2, w)$ sowie andere Relationen von irgendwas oben im Kern von $\hat{f}$ liegen. Das ist dadurch gewährleistet, dass f bilinear ist, z.B.

$$\begin{aligned} & \hat{f}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) \\ \overset{\text{Def. } \hat{f}}{=} \; & f(v_1 + v_2, w) - f(v_1, w) - f(v_2, w) \\ \overset{\text{Bilinearität von } f}{=} \; & 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{f}$ erfüllt dann $\bar{f}(v \otimes w) = f(v, w) \Rightarrow V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG)

V, W Vektorräume $\rightsquigarrow$ $Hom(V, W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ linear }\}$ ist selbst ein Vektoraum, wenn V, W endlichdimensional $\Rightarrow \dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ $(\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$, wenn $V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^m)$

$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ ist dann der Dualraum von V. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V ist, dann gibt es die duale Basis $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset V^*$ mit: $\alpha_j(e_i) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Schließlich ist für V $< \infty$ die Einbettung $i\colon V \to V^{**}$, $v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v))$ ein Isomorphismus

Proposition

$W \otimes V^*$ ist kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}(V, W)$ für endlichdimensionale V, W. Insbesondere gilt dann:

$$\dim W \otimes V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim W \otimes V$$

Mehr: wenn $\{f_j\}_{j=1}^m$ und $\{e_i\}_{i=1}^n$ Basen in W bzw. V sind. Dann ist $\{f_j \otimes e_i\}_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ eine Basis in $W \otimes V$

Beweis:

Sei $L\colon W \times V^* \to \mathrm{Hom}(V, W)$, $(w, \alpha) \mapsto (\theta_{w,\alpha}\colon v \mapsto \alpha(v) \cdot w)$, ($\theta_{w,\alpha}$ Rang 1-Operator definiert durch α, w)

L ist bilinear, weil:

$$\begin{aligned}
& (L(w_1 + \lambda w_2, \alpha_1 + \mu\alpha_2))(v) \\
= \; & (\alpha_1 + \mu\alpha_2)(v) \cdot (w_1 + \lambda w_2) \\
= \; & \underbrace{\alpha_1(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_1)(v)} + \underbrace{\mu\alpha_2(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_2)(v)} + \lambda \underbrace{\alpha_1(v)w_2}_{L(w_2,\alpha_1)(v)} + \mu\lambda \underbrace{\alpha_2(v) \cdot w_2}_{L(w_2,\alpha_2)(v)}
\end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommen wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
\bar{L}\colon W \otimes V^* &\to \mathrm{Hom}(V, W) \\
w \otimes \alpha &\mapsto \theta_{w,\alpha}
\end{aligned}$$

$\bar{L}$ ist ein Isomorphismus: geben wir das Inverse an. Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis on V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ die duale Basis in V^*. Definiere

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \mathrm{Hom}(V, W) &\to W \otimes V^* \\
T &\mapsto \sum_{i=1}^n T(e_i) \otimes \alpha_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \bar{L}(w \otimes \alpha) &= \varphi(\theta_{w,\alpha}) \\
&= \sum_{w,\alpha} (e_i) \otimes \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) w \otimes \alpha_i \\
&= w \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) \cdot \alpha_i \right) \\
&= w \otimes \alpha \\
&\Rightarrow \varphi \circ \bar{L} = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{L} \circ \varphi(T)(v)) &= \sum_{i=1}^{n} \theta_{T(e_i),\alpha_i}(v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) T(e_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) e_i \right) \\
&= T(v) \\
&\Rightarrow \bar{L} \circ \varphi = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

$W \otimes W$ ist nach Konstruktion aufgespannt durch $f_j \otimes e_i$, $\dim W \otimes V = \dim W \cdot \dim V \Rightarrow \{f_j \otimes e_i\}$ ist eine Basis.

Korollar

Wenn X, Y endliche Mengen sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}(X \times Y) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$$

Erinnerung: hier gilt $\mathcal{F}(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R}\}$ mit punktweisen Operationen

Korollar

$W \otimes V \cong V \otimes W$, $W \otimes (V \otimes Z) = (W \otimes V) \otimes Z$

Bemerkung: Es gilt auch ohne Einschränkung auf Dimensionen

Definition Tensor

Ein Tensor vom Typ (r, s) (zum Vektoraum V) ist ein Element des Vektoraumes

$$T_{r,s}(V) := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

Bemerkung: Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset V^*$ duale Basis. $\rightsquigarrow$

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_r} \mid i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ist eine Basis in $T_{r,s}$ (Beweis: wende induktiv die Proposition an).

$\Rightarrow$ jedes $T \in T_{r,s}(V)$ ist darstellbar also

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s})$$

Beispiel $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$ d.h., elemente von $T_{1,1}$ kann man als lineare Abbildung von V nach V interpretieren. Multilinear heißt linear in jeder Komponente. Sei

$$M_{s,r}(V) := \{f \colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$T_{r,s}(V)$ ist kanonisch isomorph zu $M_{s,r}(V)$

Korollar

$$\mathrm{Bil}(V) = \{b \colon V \times V \to \mathbb{R} \text{ biliniear}\} \cong V^* \otimes V^*$$

Insbesondere ist ein Skalarpodukt auf V ein Tensor vom Typ $(0,2)$ Notation $g_{i,j}$ für Koordinaten einer Metrik ist konstant mit Tensorprodukten.

Tensorprodukte von Vektorräumen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(V \otimes \underbrace{W}_{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{Bil}(V \times W, \underbrace{Z}_{\mathbb{R}}) \\ \overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \quad &\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, Z) \cong \{f \colon V_1 \times \ldots \otimes V_n \to Z \mid f \text{ multiliniear } \} \end{aligned}$$

Letzes mal:

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\text{-mal}}$$

$$M_{s,r} := \{f\colon \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$$T_{r,s}(V) \overset{kan.}{\cong} M_{s,r}(V)$$

Beweis:

Nach obigen Eigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} M_{s,r} &\cong \operatorname{Hom}(T_{s,r}(V), \mathbb{R}) \cong t_{s,r}(V)^* = (V^* \otimes \ldots \otimes V^* \otimes V \otimes \ldots \otimes V)^* \\ &\overset{?}{\cong} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}} \end{aligned}$$

Wir wollen also zeigen: W, Z zwei Vektoräume, wollen zeigen, dass $W^* \cong Z$ $(W = T_{s,r}(V),\ Z = T_{r,s}(V))$

Def./Erinnerung:

Eine nichtsinguläre Paarung zwischen W, Z ist eine bilineare Abbildung $\beta\colon W \times Z \to \mathbb{R}$ mit

- $\beta(W, Z) = 0\ \forall Z \in Z \Rightarrow w = 0$
- $\beta(W, Z) = 0\ \forall w \in W \Rightarrow Z = 0$

Übung:

Wenn W, Z endlichdimensional, $(w_i)_{i=1}^n$, $(z_i)_{i=1}^m$ Basen in W bzw. Z dann ist β nichtsingulär $\Leftrightarrow (\beta(w_i, z_j))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ nicht ausgeartet ist $\Rightarrow n = m$

β gibt einen Isomorphismus $\hat{\beta}\colon Z \to W^*$

Beispiel:

$W = Z$, euklidischer Raum mit Skalarpodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\beta(W, Z) = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

Alos: Wir betrachten eine nichtsinguläre Paarung

$$\beta_i\colon T_{s,r}(V) \times T_{r,s}(V) \to \mathbb{R}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
& \beta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_s \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_r^*, v_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_s^*) \\
= \;& \Pi_{i=1}^r v_i^*(u_i) \cdot \Pi_{j=1}^s u_j^*(v_j)_s \text{ bilinear fortgesetzt}
\end{aligned}$$

Tensorprodukte von Vektorräumen

Zu zeigen ist, dass β nicht ausgeartet ist. Dazu sei $0 \neq t \in T_{r,s}(V)$, wir suchen $t^* \in T_{s,r}(V)$ mit $\beta(t^*, t) \neq 0$

Sei $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis in V, $(\alpha)_{j=1}^n$ die Dualbasis in V^*

Dann gilt:

$$t = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\} \\ j_1,\ldots j_s \in \{1,\ldots,n\}}} t_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s}$$

$D_a t \neq 0$, ist eins von den Koeffizienten $\neq 0$:

$$0 \neq t_{j_1\cdots j_s}^{i_1 \cdot i_r} = \beta(\alpha_{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s}, t)$$

Bemerkung: Die Paarung zwischen $T_{r,s}$ mal $T_{s,r}$ wird gelegentlich einfach durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oder $(\cdot, \cdot)$ bezeichnet.

Beispiel $V = T_p M$, (U, x) eine Karte um p, dann hat $V = T_p M$ eine Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$

$V^* = T_p^* M$ bekommt die duale Basis $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^n$

Erinnerung: $\mathrm{d}x^i(\underbrace{T_p M}(v) := v(x^i))$, daher $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_{ij}$

Wir bekommen jetzt z.B. (i, j fest)

1. $t_{ij} = \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \in V^* \otimes V^* = T_{0,2}(V) \cong T_{0,2}(V) \cong \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
t_{ij} &= (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)(v, w) \\
&= \mathrm{d}x^i(v) \cdot \mathrm{d}x^j(w) \\
&= v(x^i) \cdot w(x^j),\; v, w \in T_p M
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$g := \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$$

ist auch eine Biliniarform auf T_pM. Wenn $M = \mathbb{R}^n$, p beliebig, dann ist g das Standardskalarprodukt auf $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)}_{=\delta_{il}} \\ &= \delta_{kl} + \delta_{lk} \\ &= \delta_{kl} \end{aligned}$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Errinnerung:

für Integrationstheorie wollen wir die Rechenregeln

$$d_x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

Beobachtung: Tensoren kann man miteinander multiplizieren. Es gibt eine kanonische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} (\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}}) \times \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{l\text{-mal}} &\to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{(k+l)\text{-mal}} \\ ((v_1 \otimes \ldots \otimes v_k), (v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l})) &\mapsto (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) \end{aligned}$$

Notation:

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \\ \mathbb{R} & k = 0 \end{cases}$$

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

heißt die Tensoralgebra von V

Multiplikation: $t \in V^{\otimes r}$, $t' \in V^{\otimes s}$

$$t \cdot t' := t \otimes t' \in V^{\otimes (r+s)}$$

definiert eine Multiplikation auf $T(V)$

In $T(V)$ gelten die Relationen $v \otimes v = 0$ nicht.

Diese wollen wir erzwingen.

Sei $Z(V) = \langle v \otimes v | v \in V \rangle$ das Ideal in $T(V)$ erzeugt von Elementen der Form $v \otimes v$

Notation:

$$I_r(V) := I(V) \cap V^{\otimes r}, I(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I_n(V) \text{ (kleine Übung)}$$

Multiplikation wird durch $\bigwedge$ bezeichnet. nach Konstruktion gilt $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_k]$

Definition

$$\bigwedge(V) := T(V)/I(V)$$

heißt äußere Algebra von V

Nach Konstruktion und Eigenschaft von $I(V)$ gilt

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \underbrace{\bigwedge^r(V)}_{V^{op?}/I_r(V}$$

1. $\wedge^0 V \cong \mathbb{R}$, weil $I_0(V) = \{0\}$
2. $\wedge^1 V \cong V$, weil $I_1(V) = \{0\}$

Proposition

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis in V. Dann ist

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid k \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k(V)$ ($\leftarrow$ k-te äußere Potenz)

Insbesondere gilt:

$$\bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \wedge_k(V) = \{0\}, \quad k > n$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Beweis

Nach Konstruktion gilt: $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, daher spannt

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_k \leqslant n\}$$

den Raum $\bigwedge^k V$. Wir brauchen also zu zeigen, dass

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = 0$$

Sei $I = (i_1, \ldots, i_k)$ $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ fixiert.

Sei $J = \{1, \ldots n\} \setminus I = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$

Betrachte das Element $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und multipliziere es an $(*)$:

$$\pm \alpha_{i_1, \ldots, i_k} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$$

Alle anderen Terme verschwinden, weil eine Vektor im Produkt doppelt vorkommt.

Gestern:

$$\bigwedge(V) = T(V)/I(V)$$

$I(V) = \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle$ Ideal erzeugt durch $v \otimes v$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i \otimes v_i \otimes v_i z_i \;\middle|\; t_i, t_i' \in T(V), v_i \in V \right\}$$

$$[\underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n}_{\in T(V)}] =: i v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge(V)$$

nach Konstruktion gilt $v \wedge v = 0$, $v' \in V$ (daraus folgt: $v \wedge w = -w \wedge w$, v, $w \in V$, $0 = (v + w) \wedge (v + w) = \underbrace{v \wedge v}_{=0} + v \wedge w + w \wedge v + \underbrace{w \wedge w}_{=0} = v \wedge w + w \wedge v$)

Das Bild von $V^{\otimes k}$ in $\bigwedge(V)$ heißt $\bigwedge^k(V)$ – die Elemente der Länge k,

$$\bigwedge^k(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \middle| v_{i_l} \in V \right\}$$

Proposition

Wenn $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V ist, ist $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant u\}$ eine Basis von $\bigwedge^k(V)$; insbesondere $\dim \bigwedge_k(V) = \binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ für $k > n$

Beweis:

Wir haben die Aussage darauf reduziert, dass in $\bigwedge_k(V)$ $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \longrightarrow$ Reduktion für $k = 2$, $n = 4$. wird behauptet, dass $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ linear unabhängig sind. Wenn nicht $\exists \alpha_{ij}$:

$$\alpha_{12} e_1 \wedge e_2 + \alpha_{13} e_1 \wedge e_j + \alpha_{14} e_1 \wedge e_4 + \ldots = 0$$

$\rightarrow \alpha_{13} e_1 e_{324} = 0 = -\alpha_{13}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \Leftrightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I(V)$$

Wenn

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\
v \otimes v &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j e_i \otimes e_j \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 e_i \otimes e_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<y}}^n \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)
\end{aligned}$$

Sei $x \in I_n(V) = I(V) \cap V^{\mathrm{op}}$. Aus der obigen Rechnung folgt: Wenn man x in der Tensorbasis ausdrückt.

$$x = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n} x^{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$$

dann gilt: wenn alle i_j's verschieden sind, so gilt

$$x^{i_1, \ldots, i_j, i_{j+1}, \ldots, l_n} = x^{i_1, \ldots, i_{j+1}, i_j, \ldots, i_n}$$

Bei $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ ist der Koeffizient $x^{1,2,\ldots,n} = 1$ alle anderen $0 \Rightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I_n(V)$

Bemerkung:

Jede lineare Abbildung $f\colon V \to V$ induziert eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \bigwedge f\colon \bigwedge V &\to \bigwedge V \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) &\mapsto (f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_k)) \end{aligned}$$

Insbesondere bekommt man die Abbildung ($\dim V = n$) $\bigwedge_n f\colon \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R} \xrightarrow{\det f} \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R}$

$$\begin{aligned} \bigwedge(g \circ f) = \bigwedge g \circ \bigwedge f \quad \Rightarrow \quad & \det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f) \\ & \det(\mathrm{id}) = 1 \end{aligned}$$

Die explizite Formel ergibt sich daraus, dass $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ ein Basisvektor in $\bigwedge^n V$ ist. $\rightsquigarrow$

$f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \ldots \wedge f(e_n) = \ldots$ (Leibnitz-Formel) $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

$[f_{ij}] = M_\xi^\xi(f)$

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} e_j$$

$$\begin{aligned} f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) &= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} \\ &= \sum_{j = (j_1, \ldots, j_1) \in S_n} f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} \operatorname{sign}(j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \end{aligned}$$

Letzes Mal:

Tensoren vom Typ (n, s) $\mathrel{\hat{=}} T_{r,s}(V) \cong M_{s,r}(V) \mathrel{\hat{=}}$ lineare Abbildungen $V^{\otimes s} \otimes (V^*)^{\otimes r} \to \mathbb{R}$

Nächstes Ziel:

Interpretiere $\bigwedge^k V^*$ als gewisse multiliniear Abbildung $V^k \to \mathbb{R}$

$$\bigwedge^k V^* = (V^*)^{\otimes k} / I_k(V^*)$$

$(V^*)^{\otimes k} = \{f\colon V^k \to \mathbb{R} \mid f \text{ multilinieare Abbildung } \}$

$$I_k(V^*) = I(V^*) \wedge (V^*)^{\otimes k}$$

$I(V^*) = \{\sum t \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes t'\}$, erzeugt durch $\{\alpha \otimes \alpha \mid \alpha \in V^*\}$

$$(\alpha \otimes \alpha)(v_1 \otimes v_2) = \alpha(v_1)\alpha(v_2) = (\alpha \otimes \alpha)(v_2, v_1)$$

Definition

Eine multiliniear Abbildung $m\colon \underbrace{V^k}_{=V\times\ldots\times V} \to \mathbb{R}$ $(= m\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R})$ heißt alternierend, wenn

$$m(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

$\Leftrightarrow$ m verschwindet, wenn zwei (beliebige) V gerade gleich sind)

Beispiel

$\det(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ ist eine alternierende Abbildung. Wenn $m\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ alternierend, dann gilt

$$m|_{I_k(V)} = 0$$

(nach Definition von $I_k(V)$)

$\longrightarrow$ m definiert eine Abbildung

$$\overline{m}\colon \bigwedge^k V \quad \to \quad \mathbb{R}$$

v$_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto m(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$

Proposition

$$\bigwedge^k V^* \cong (\bigwedge^k V)^* \cong A_k(V) = \{m\colon V^k \to \mathbb{R} \text{ alternierend }\}$$

Beweis:

Wie gerade gesehen, definiert jedes $m \in A_k \in (V)$ ein Element $\overline{m} \in \left(\bigwedge^k\right)^*$, $m \mapsto \overline{m}$ ist offensichtlich linear. Umgekehrt: jedes $\overline{m}\colon \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ definiert eine multilinieare Abbildung

$$\begin{aligned} m\colon V \times \ldots \times V &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \overline{m}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \end{aligned}$$

sie ist alternierend, weil

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v_k = 0$$

Zum Iso $\bigwedge^k V^* \cong (\bigwedge^k V)^*$: wir brauchen eine nichtsinguläre bilineare Paarung $\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ (die für $K = 1$ offensichtlich ist)

$$V^* \times V \quad \to \quad \mathbb{R}(\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$$

Man definiert die Paarung so:

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \mapsto \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Die Paarung ist nicht ausgeartet, denn: in $\bigwedge^k V$ haben wir nach der Wahl einer Basis $e_1, \ldots, e_n \in V$ die Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)\}(*)$$

Wenn $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V$ dual zu $e_1, \ldots, e_n$, dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

dual zu $(*)$ bezüglich der Paarung:

$$(e_i^*(e_j))_{i,j=1}^k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

wenn aber $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots j_k)$, dann ist

$$(e_{il}^*(e_{jl})) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = 0$

Bemerkung

Unter der Identifikation aus der Proposition bekommen wir die Rechenregeln

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Insbesondere gilt für $k = 2$:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1)$$

Differentialformen

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, "\pi"] & T^*M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[d, dash] & M \arrow[d, dash] \\ \text{Tangentialbündel} & \text{Kotangentialbüdel} \end{tikzcd}$$

Geometrisch: über jedem Punkt p hängt T_pM tzw, T_p^*M und

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM, \quad T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$$

Idee

man macht punktweise Konstruktion wie Tensorprodukt, äußere Potenzen etc. mit T_pM bzw. T_p^*M und bekommt „Bündel“, die ähnlich wie TM/T^*M angegeben, aber etwas kompliziert sind

Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein k-dimensionales Vektorbündel E über M ist eine Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer glatten Abbildung $\pi\colon E \to M$ (π heißt Bündelprojektion) mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\forall p \in M$ ist $E_p := \pi^{-1}p$ ein (R)-Vektoraum von k.
- (2) [lokale Trivialität] $\forall p \in M \exists U \ni p$ offen mit

  $$E|_U := \pi^{-1}(U) \overset{\overset{\psi}{\cong}}{\underset{}{\xrightarrow{\text{diffeomorph}}}} U \times \mathbb{R}^k$$

  sodass $\forall q \in U$, $\forall v_1,\ v_2 \in E_q = \pi^{-1}(q)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: ($\pi_{\mathbb{R}^k\colon U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k}$ Projektion)

$$\pi_{\mathbb{R}^k} \circ \psi(v_1 + \lambda v_2) = \pi_{\mathbb{R}^k \circ \psi(v_1) + \lambda \cdot \pi_{\mathbb{R}^k} \circ \psi(v_2)}$$

(die Vektorraumoperation auf E_q entsprechen den auf $\mathbb{R}^k$ durch ψ)

Bemerkung

Über jeder Mannigfaltigkeit existiert das triviale Vektorbündel der Dimension k:

$$E := \underbrace{M \times \mathbb{R}^k}_{=\mathbb{R}^k} \xrightarrow{\pi} M$$

Die Bedingung (2) verlangt gerade dass ein Vektorbündel E lokal (d.h. über U) trivial sein muss (= isomorph zum trivialen Bündel)

Beispiel

TM, T_pM sind Vektorbündel über M. Eig. (2) kamen von dem Beweis, dass TM, T^*M Mannigfaltigkeiten sind.

Erinnerung

Wenn V ein Vektorraum ist,

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

VR von Tensor von Typ (r, s)

Definiere jetzt

$$T_{r,s}(\underbrace{M}_{\text{Mannigfaltigkeit}}) = \bigsqcup_{p \in M} T_{r,s}(T_pM)$$

$T_{r,s}(M)$ heißt Vektorbündel von Tensoren vom Typ (r, s) über M.

Analog:

$$\begin{aligned} \bigwedge^k(TM) &:= \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge_k(T_pM) \\ \bigwedge^k(T^*M) &= \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^*M) \end{aligned}$$

heißen äußere Potenzen von TM bzw. T^*M; entsprechend sind $\bigwedge^*(TM)$, $\bigwedge^*(T^*M)$ definiert.

Proposition

$$T_{r,s}(M), \quad \bigwedge^{*}(TM), \quad \bigwedge^{k}(T^M), \quad \bigwedge^{*}(TM), \quad \bigwedge^{*}(T^*M)$$

sind Vektorbündel über M.

Beweis: (Für $T_{r,s}$ andere analog)

- Eigenschaft 1) ist klar:

$$\pi^{-1}(p) = T_{r,s}(T_pM)$$

  ist ein Vektorraum

- Eigenschaft 2) Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Auf U existiert kanonische Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \Gamma(TU)$ s.d für alle $q \in M$: $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_q \in T_qM$ eine Basis mit Dualbasis $(\,\mathrm{d}x^1)(q), \ldots, (\,\mathrm{d}x^n)(q) \in T_q^*M$

Entsprechend gilt $\forall q \in M$:

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_q \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_q \otimes \,\mathrm{d}x^{j_1}(q) \otimes \ldots \otimes \,\mathrm{d}x^{j_s}(q) \,\middle|\, i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

ist eine Basis von $T_{r,s}(T_qM)$. Entsprechend haben wir für jedes $q \in U$ eine Koordinatenabbildung

$$\varphi_q \colon T_{r,s}(T_qM) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

die jedem $t \in T_{r,s}(T_qM)$ die Koordinaten in dieser Basis zugeordnet. Also haben wir eine Bijektion

$$\psi \colon \bigsqcup_{q \in U} \underbrace{T_{r,s}(T_pM)}_{=T_{r,s}(M)|_U} \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

$v \in T_{r,s}(T_qM) \mapsto (q, \varphi_q(v))$ Die diffbare Struktur auf $T_{r,s}(M)$ definiert man durch die Forderung, dass alle 4 Diffeomorphismen sind $\longrightarrow$ dann ist insbesondere (2) auf errfüllt.

Fazit

aus TM kann man jede Menge Vektorbündel Konstruiren (TM, $T_{r,s}(M)$ $(= T_{r,s}(TM))$, $\bigwedge^k TM$, $\bigwedge^k T^*M, \ldots$)

Slogan:

> man macht lineare Algebra/Tensorkonstruktionnen punktweise

Definition

Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt s von E ist eine Abbildung

$$s\colon M \to E$$

mit

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_M$$

$(\Leftrightarrow \forall p \in M : s(p) \in \underbrace{E_p}_{=\pi^{-1}(p)})$

Bezeichung

$$\Gamma(E) = \{s\colon M \to E \text{ Schnitt}\}$$

der Raum der Schnitte von E.

- (1) $\Gamma(E)$ ist ein Vektorraum: $s_1,\ s_2 \in E,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p) \in E_p$, $(\lambda \cdot s_1)(p) := \lambda \cdot s_1(p) \in E_p$
- (2) Für $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$ kann man

  $$(f \cdot s)(p) := f(p)s(p) \in E_p$$

  definieren, $f \cdot s \in \Gamma(E)$

  Das macht $\Gamma(E)$ zu einem $C^\infty(M)$-Modul [$\Leftrightarrow (f_1 + f_2) \cdot s = f_1 s + f_2 s$, $(fg) \cdot s = f(g \cdot s)$]

Beispiel

- Vektorfeld auf M sind Schnitt im Tangentialbündel
- $C^\infty(M) = \Gamma(\underline{\mathbb{R}}) = \Gamma(M \times \mathbb{R})$

Definition

Schnitte von $T_{r,s}(TM)$ heißen Tensoren vom Typ (r, s) auf M.

Definition

$$O^k(M) := \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

heißen Differentialformen auf M

- $O^0(M) = \Gamma\left(\bigwedge^0 T^*M\right) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M)$
- $O^1(M) = \Gamma(\bigwedge^1 T^*M) = \Gamma(T^*M)$-Vektorfelder auf

Wenn (U, x) eine Karte von M ist $\rightsquigarrow$ bekommen

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} & \in & \Gamma(TM|_U) \\ \mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n & \in & \Gamma(T * M|_U) \end{array}$$

Daher sieht jeder Schnitt $\chi \in \Gamma(T_{r,s}(TM))$ auf U so aus:

$$\chi|_U = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} \chi^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}$$

für gewisse $\chi^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in C^\infty(U)$

Analog:

die Menge

$$\{ \mathrm{d}x^{i_1}(q) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(q) \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

bildet eine Basis in $\bigwedge^k T^*qM \ \forall q \in U$

Daher sieht jede Differentialform $\omega \in \underline{O}^k(M)$ auf U so aus:

$$\omega|_U = \sum_{1_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

für gewisse $\omega_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$

Algebraisch heißt es:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \middle| i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

bildet eine Basis von $\Gamma(T_{r,s}(TM)|_U)$ über $C^\infty(U)$ Entsprechend für $\left\{ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \mid \ldots \right\}$ für $\underline{O}^k(U)$

D.h. jetzt können wir interpretieren was z.B. $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ ist:

Das ist eine 2-Form auf U (eine der Basis-2-Formen)

Erinnerung:

Für einen Vektoraum V haben wir festgestellt, dass

$$\bigwedge_k V \cong A_k(V) = \{f\colon V^k \to \mathbb{R} \mid \text{multiliniear, alternierend }\}$$

Daher definiert jede Differentialform

$$\omega \in \Omega^k(M) = \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

eine multilinieare alternierende Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma(T^*M) \times \ldots \times \Gamma(T^*M) &\to C^\infty(M) \\ (\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X}_k) &\mapsto (p \mapsto (\omega(p))(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_k(p))) \end{aligned}$$

Notation:

$$(\omega(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k))(p) := \omega(p)(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_k(p))$$

Diese Konstruktion ist $C^\infty(M)$-linear

$$\omega(f\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X}_k) = f\omega(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k), \quad f \in C^\infty$$

Bemerkung:

Das gilt in jedem Argument

Analoge Konstruktion existiert für Tensorfelder:

da $T_{r,s}(T_pM) \cong M_{s,r}(T_pM), \quad \forall p \in M$

Dabei war

$$M_{s,r}(T_pM) = \{\alpha\colon \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{r} \mid \alpha \text{ multiliniear}\}$$

definiert jedes Tensorfeld $t \in \Gamma(T_{r,s}(T_pM))$ eine $C^\infty(M)$-multilinieare Abbildung.

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \times \ldots \times \Gamma(T^*M) &\to C^\infty(M) \\ (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) &\mapsto (p \mapsto (t(p))(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_r(p), \alpha_1(p), \ldots, \alpha_s(p)) \end{aligned}$$