DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Inhaltsverzeichnis

Compiled on 17. April 2019

Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$ topologische Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen + glatte `Strukturen` von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ zusammen mit einer Karte $x\colon U \to \mathbb{R}^n$

Idee: da M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf M zu verstehen.

`Wichtig dabei`: das Objekt auf M muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. `Tangentialraum` „über" jedem Punkt $p \in M$ „hängt" ein Vektorraum T_pM, $\dim T_pM = \dim M$ Elemente von T_pM heißen Tangentialvektoren.

   $$\begin{aligned} T_pM &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p)\cdot\partial(g) + g(p)\cdot\partial(f)\} \end{aligned}$$

   Motto: Tangentialvektor $\hat{=}$ Richtungsableitung!

   $\pi\colon TM \to M$ ist glatt $v \in T_pM \mapsto p$

   Nutzen: wir verstehen „wirklich", was Ableitungen sind

   Früher:

   $$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \rightsquigarrow \quad & D_pf \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ & Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

   Jetzt in Diffgeo:

   $$f \in C^\infty(M,N) \underset{p\in M}{\rightsquigarrow} D_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

   Vektorfeld: $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = id_M$ ($\Leftrightarrow X(p) \in T_pM$) Gegeben $X \rightsquigarrow \Phi\colon \underset{\subseteq \mathbb{R}\times M}{W} \to M$ (Fluss des Vektorfeldes)

   s.d. $\forall p \in M$ $\gamma_p(t) := \Phi(t,p)$ die ODE

   $$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$$

   lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf M ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben $X,\, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{Vektorfeld} \rightsquigarrow [X,Y] \in \Gamma(TM)$

$(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ wird zu einer Lie-Algebra.

Def. Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ mit folgenden Eingenschaften:

(a) $[X,Y] = -[Y,X], \quad X,\, Y \in V$
(b) Jacobi-Identität: $X,\, Y,\, Z \in V$:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Beispiele:

(a) $\Gamma(TM)$, $[\cdot,\cdot]$ ist eine Lie-Algebra
(b) $\mathbb{M}_u(\mathbb{R})$, $[A,B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra

Verbindung zwischen a) und b) – Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

G Lie-Gruppe $\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(G) = 2(G) = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_p Lg} X = X\} =$

$\{x \mid x$ linksinvariantes Vektorfeld $\}$

$\to$ Lie-Algebra bzgl. $[\cdot,\cdot]$, heißt Lie-Algebra von G.

Eigenschaften: $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G$ als Vektoraum $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G) = \dim G$

$$\begin{aligned} Lg\colon G &\to G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Satz $G = GL(n,\mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G \underset{\text{Vektoraum}}{\cong} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\mathrm{Lie}(\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}), [\cdot,\cdot]) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$$

Für jedes $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist dann $\mathrm{Lie}(G) \subseteq (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$.

$$[A,B] = AB - BA$$

Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} p \in \mathbb{R}^n \quad D_p f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \text{(linear)} \\ v &\mapsto \underbrace{\partial_v f(p)}_{=D_p f(v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_v f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p v^i \\ D_p f \underset{\text{als Matrix}}{=} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) &\begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$f\colon M \to N$$

$$\begin{aligned} p \in M \rightsquigarrow D_p f\colon \quad T_p M &\to T_{f(p)} N \text{ linear} \\ \Uplus& \\ v &\mapsto (\underbrace{\varphi}_{C^\infty} \mapsto v(f^*\varphi)) = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)}) \end{aligned}$$

$v \mathrel{\widehat{=}}$ Ableitungsoperation ($v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^*\varphi"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

TODO Bildchen

$$\begin{aligned} M &\overset{f}{\to} N \\ &\rightsquigarrow \\ C^\infty(N) &\overset{f^*}{\to} C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus} \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Jeder Tangentialvektor v ist eine lineare Abbildung $v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, dann ist $\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)} f(v) = f_* v} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ linear

Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{cll} & \mathrm{Lie}(G) & = \mathrm{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(C) \mid X^* = -X\},\ [\cdot,\cdot] \\ & \cong & \\ & T_1 G & \subset T_1 \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ & \| & \\ \{ & \dot\gamma(0) & \mid \gamma\colon (-\epsilon,\epsilon) \to G \wedge \gamma(0) = 1\} \end{array}$$

Sei $\gamma\colon (-\epsilon,\epsilon) \to G$ eine Kurve, $\gamma(0) = 1$

$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\big|_{t=0}$

$$\begin{array}{ccc} \dot\gamma(0)^*\gamma(0) & + & \gamma(0)^*\dot\gamma(0) = 0 \\ & \| & \\ \dot\gamma(0)^* & + & \dot\gamma(0) = 0 \end{array}$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige $\supseteq$ betrachte:

$$\begin{aligned} \gamma(t) := e^{tX} &\left(:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* = e^{tX^*} &= e^{-tX} \\ \gamma(t) * \gamma(t) = e^{-tX} \cdot e^{tX} &= 1 \Rightarrow \gamma(t) \in \mathrm{U}(n) \\ \dot\gamma(t) = Xe^{tX} &\Rightarrow \dot\gamma(0) = X \end{aligned}$$

wie gewünscht. $\Rightarrow$ Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \mathrm{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\,\mathrm{og} = \underline{u}(n) \subset \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{aligned} \exp\colon \quad & \text{og} && \to G \\ & \cup && \\ & X && \mapsto \exp(X) \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \exp(tX)$$

$$\dot{\gamma}(t) = Xe^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = \left(L_{\gamma(t)}\right)_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei $\tilde{X}$ das linksinvariante Vektorfeld zu X ist

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist eine Integralkurve von $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$G \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve $A(t) \in G$ von $\tilde{X}$ erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$ mit $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

$$\begin{aligned} x \quad & \mapsto \quad A \cdot x \\ f\colon \mathbb{R}^n \quad & \to \quad \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f = f\colon \mathbb{R}^n \quad & \to \quad \mathbb{R}^m \\ \\ f\colon V \quad & \to \quad W \text{ linear} \end{aligned}$$

mit Übung 28 $p \in V$:

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{D_p f} & T_p W \\ \wr\| & & \wr\| \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\det\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcl} D_1 \det\colon \mathbb{M}_n(R) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ? = \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

$$\det(1+tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1+tA) = \det(1+tBAB^{-1})$$

Wenn A diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{array}{rcl} \det(1+tA) & = & \begin{vmatrix} 1+t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t\lambda_n \end{vmatrix} \\ & = & (1+t\lambda_1)\cdots(1+t\lambda_n) \\ & = & 1 + t(\lambda_1 + \lambda_n) + O(t^2) \\ & = & 1 + t\cdot \mathrm{Trace}(A) + O(t^2) \end{array}$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

$$\overset{U}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}\ \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow\ \alpha\colon U \overset{\cong}{\to} V \text{ Diffeo}$$

$$\underset{V}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}\ \mathbb{R}^n$$

Betrachte $n = 1$:

U, $V \subseteq \mathbb{R}$ offenen Intervalle. $\alpha\colon \underbrace{U}_{=(a,b)} \to V$ Diffeo (= strikt monotone glatte Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

„Mnemonik“:

$$\mathrm{d}v = v'(u)\,\mathrm{d}u$$

$f\colon V \to \mathbb{R}$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u)\alpha'(u)\,\mathrm{d}u = \int_V f(v)\,\mathrm{d}v \neq \int_V \alpha^*(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u\alpha)\,\mathrm{d}_{u_1}\cdots\mathrm{d}_{u_n} = \int_V f(v)\,\mathrm{d}_{v_1}\cdots\mathrm{d}_{v_n}$$

$$\begin{aligned}\alpha\colon \quad & U & \to\ & V \text{ Diffeo}\\ & (u_1,\dots,u_n) & \mapsto\ & (v_1,\dots,v_n)\end{aligned}$$

$v = v(u)$

$$\int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \xcancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_1} + \xcancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2} + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 =: (*)$$

$$= \int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \int_U f(v(u)) \Bigg(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\underset{(*)\text{ sein}}{\underset{\text{sollte}}{=}} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}} \Bigg) \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 &= \mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_2 = 0 \\ \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_2 &= -\,\mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_1 = 0 \end{aligned}$$

Erkenntniss:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine n-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist (informell) ein Ausdruck

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit den Rechenregeln: wenn $x = x(y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y)) \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}y_j = -\,\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}y_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

folglich ist $\int \omega$ unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektoraum $V (= T_pM, T_p^*M)$ einen Kalkühl zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit Rechenregeln $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multiliniearen (z.B. $\det\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multiliniare Abbildung $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

Definition: Tensorprodukt

Ein Vektoraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V \times W \to V \otimes W$ heißt Tensorprodukt von V und W, wenn für jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \to Z$, (Z beliebiger Vektoraum) eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f}\colon V \otimes W \to Z$ existiert mit $\bar{f} \circ i = f$ (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{f}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \otimes W$

Wenn $V \otimes W$ existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
V + W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_1 \arrow[d, dashed, "\exists! f_1"] \\
& (V \otimes W)_2 \arrow[u, dashed, bend right=60, "\exists! f_2"']
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_1$ liefert $f_1\colon (V \otimes W)_1 \to (V \otimes W)_2$ mit $f_1 \circ i_1 = i_2$.

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_2$ liefert $f_2\colon (V \otimes W)_2 \to (V \otimes W)_1$ mit $f_2 \circ i_2 = i_1$.

Beh. f_1, f_2 sind invers zueinander. Betrachte z.B.: $f_1 \circ f_2$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_2 \arrow[d, "f_1 \circ f_2"] \\
& (V \otimes W)_2 \arrow[u, bend right=60, "id"']
\end{tikzcd}$$

Wegen der Eigenschaften in der Definition von $(V \otimes W)_2$ ist $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{(V \otimes W)_2}$. Analog gilt $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{(V \circ W)_1}$

Existenz von $V \otimes W$

Idee: $V \otimes W$ soll von Ausdrücken der Form $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$ aufgespannt werden und $v \otimes w$ soll linear in V und W sein.

Definition: Sei X eine Menge. Der freie (reelle) Vektoraum auf X, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$, ist der (reelle) Vektoraum mit Basis X.

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) \cong \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W) \Big/ \left\langle \begin{matrix} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), v_1,v_2 \in V, w \in W \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), v \in V, w_1,w_2 \in W \\ \left.\begin{matrix} (\lambda v,w)-\lambda(v,w) \\ (v,\lambda w)-\lambda(v,w) \end{matrix}\right\} v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\rangle$$

Sei

$$\begin{aligned} i\colon \quad V \times W &\to V \otimes W \\ (v,w) &\mapsto [(v,w)] =: v \otimes w \end{aligned}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1+w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1,v_2 \in V, w_1,w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\langle \cdot \rangle = \operatorname{span}(\cdot)$$

wenn E ein Vektoraum ist, $E' \subseteq E$ Untervektorraum, dann ist $E/E' = \{e + E' \mid e \in E\}$ mit mengenmäßiger Addition und Skalarmultiplikation. (bei uns ist $E = \mathcal{F}(V \times W)$, $E' = \langle \ldots \rangle$)

Interpretation: E/E' = Vektoraum der Äquivalenzklassen von Vektoraum in E modulo E'. ($e' = 0$, $e' \in E'$) Entsprechend ist

$$V \otimes W = \operatorname{span}\{\underbrace{v \otimes w}_{=[(v,w)]} \mid v \in V, w \in W\}$$

mit den Relationen:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1+w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1,v_2 \in V, w_1,w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lemma

Die angegebene Konstruktion von $V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Beweis:

Sei $f\colon V \times W \to Z$ gegeben, bilinear

Definiere

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon V\times W &\to Z, \qquad \text{linear} \\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(v_i,w_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(v_i,w_i) \end{aligned}$$

Behauptung: $\hat{f}$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{f}$

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon V\otimes W &\to Z \\ (v\otimes w) &\mapsto \hat{f}((v,w)) \end{aligned}$$

Dazu muss man überprüfen, dass $(v_1+v_2,w)-(v,w)-(v_2,w)$ sowie andere Relationen von irgendwas oben im Kern von $\hat{f}$ liegen. Das ist dadurch gewährleistet, dass f bilinear ist, z.B.

$$\begin{aligned} &\hat{f}((v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)) \\ \overset{\text{Def. } \hat{f}}{=}\ & f(v_1+v_2,w)-f(v_1,w)-f(v_2,w) \\ \overset{\text{Bilinearität von } f}{=}\ & 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\bar{f}$ erfüllt dann $\bar{f}(v\otimes w)=f(v,w) \Rightarrow V\otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG)

V, W Vektorräume $\rightsquigarrow Hom(V,W)=\{f\colon V\to W \mid f \text{ linear }\}$ ist selbst ein Vektoraum, wenn V, W endlichdimensional $\Rightarrow \dim \mathrm{Hom}(V,W)=\dim V\cdot\dim W$ ($\mathrm{Hom}(V,W)\cong\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{R})$, wenn $V\cong\mathbb{R}^n$, $W\cong\mathbb{R}^m$)

$V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ ist dann der Dualraum von V. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V ist, dann gibt es die duale Basis $\{\alpha_j\}_{j=1}^n\subset V^*$ mit: $\alpha_j(e_i):=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Schließlich ist für V $<\infty$ die Einbettung $i\colon V\to V^{**}$, $v\mapsto(\alpha\mapsto\alpha(v))$ ein Isomorphismus

Proposition

$W\otimes V^*$ ist kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}(V,W)$ für endlichdimensionale V, W. Insbesondere gilt dann:

$$\dim W\otimes V^* = \dim W\cdot\dim V = \dim W\otimes V$$

Mehr: wenn $\{f_j\}_{j=1}^m$ und $\{e_i\}_{i=1}^n$ Basen in W bzw. V sind. Dann ist $\{f_j \otimes e_i\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ eine Basis in $W \otimes V$

Beweis:

Sei $L\colon W \times V^* \to \operatorname{Hom}(V,W),\ (w,\alpha) \mapsto (\theta_{w,\alpha}\colon v \mapsto \alpha(v)\cdot w),\ (\theta_{w,\alpha}$ Rang 1-Operator definiert durch α, $w)$

L ist bilinear, weil:

$$\begin{aligned}
& (L(w_1+\lambda w_2, \alpha_1+\mu\alpha_2))(v) \\
= \;& (\alpha_1+\mu\alpha_2)(v)\cdot(w_1+\lambda w_2) \\
= \;& \underbrace{\alpha_1(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_1)(v)} + \underbrace{\mu\alpha_2(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_2)(v)} + \lambda \underbrace{\alpha_1(v)w_2}_{L(w_2,\alpha_1)(v)} + \mu\lambda \underbrace{\alpha_2(v)\cdot w_2}_{L(w_2,\alpha_2)(v)}
\end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommen wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
\bar{L}\colon W\otimes V^* &\to \operatorname{Hom}(V,W) \\
w\otimes\alpha &\mapsto \theta_{w,\alpha}
\end{aligned}$$

$\bar{L}$ ist ein Isomorphismus: geben wir das Inverse an. Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis on V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ die duale Basis in V^*. Definiere

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to W\otimes V^* \\
T &\mapsto \sum_{i=1}^n T(e_i)\otimes\alpha_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\circ\bar{L}(w\otimes\alpha) &= \varphi(\theta_{w,\alpha}) \\
&= \sum_{w,\alpha}(e_i)\otimes\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(e_i)w\otimes\alpha_i \\
&= w\otimes\left(\sum_{i=1}^n \alpha(e_i)\cdot\alpha_i\right) \\
&= w\otimes\alpha \\
&\Rightarrow \varphi\circ\bar{L} = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{L} \circ \varphi(T)(v)) &= \sum_{i=1}^{n} \theta_{T(e_i),\alpha_i}(v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) T(e_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) e_i\right) \\
&= T(v) \\
&\Rightarrow \bar{L} \circ \varphi = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

$W \otimes W$ ist nach Konstruktion aufgespannt durch $f_j \otimes e_i$, $\dim W \otimes V = \dim W \cdot \dim V \Rightarrow \{f_j \otimes e_i\}$ ist eine Basis.

Korollar

Wenn X, Y endliche Mengen sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}(X \times Y) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$$

Erinnerung: hier gilt $\mathcal{F}(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R}\}$ mit punktweisen Operationen

Korollar

$W \otimes V \cong V \otimes W$, $W \otimes (V \otimes Z) = (W \otimes V) \otimes Z$

Bemerkung: Es gilt auch ohne Einschränkung auf Dimensionen

Definition Tensor

Ein Tensor vom Typ (r, s) (zum Vektoraum V) ist ein Element des Vektoraumes

$$T_{r,s}(V) := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

Bemerkung: Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset V^*$ duale Basis. $\rightsquigarrow$

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_r} \mid i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ist eine Basis in $T_{r,s}$ (Beweis: wende induktiv die Proposition an).

$\Rightarrow$ jedes $T \in T_{r,s}(V)$ ist darstellbar also

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s})$$

Beispiel $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$ d.h., elemente von $T_{1,1}$ kann man als lineare Abbildung von V nach V interpretieren. Multilinear heißt linear in jeder Komponente. Sei

$$M_{s,r}(V) := \{f\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$T_{r,s}(V)$ ist kanonisch isomorph zu $M_{s,r}(V)$

Korollar

$$\mathrm{Bil}(V) = \{b\colon V \times V \to \mathbb{R} \text{ biliniear}\} \cong V^* \otimes V^*$$

Insbesondere ist ein Skalarpodukt auf V ein Tensor vom Typ $(0,2)$ Notation $g_{i,j}$ für Koordinaten einer Metrik ist konstant mit Tensorprodukten.

Tensorprodukte von Vektorräumen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(V \otimes \underbrace{W}_{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{Bil}(V \times W, \underbrace{Z}_{\mathbb{R}}) \\ \overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow}\quad &\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, Z) \cong \{f\colon V_1 \times \ldots \otimes V_n \to Z \mid f \text{ multiliniear } \} \end{aligned}$$

Letzes mal:

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\text{-mal}}$$

$$M_{s,r} := \{f\colon \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$$T_{r,s}(V) \overset{kan.}{\cong} M_{s,r}(V)$$

Beweis:

Nach obigen Eigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} M_{s,r} &\cong \operatorname{Hom}(T_{s,r}(V), \mathbb{R}) \cong t_{s,r}(V)^* = (V^* \otimes \ldots \otimes V^* \otimes V \otimes \ldots \otimes V)^* \\ &\overset{?}{\cong} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}} \end{aligned}$$

Wir wollen also zeigen: W, Z zwei Vektoräume, wollen zeigen, dass $W^* \cong Z$ $(W = T_{s,r}(V),\, Z = T_{r,s}(V))$

Def./Erinnerung:

Eine nichtsinguläre Paarung zwischen W, Z ist eine bilineare Abbildung $\beta\colon W \times Z \to \mathbb{R}$ mit

- $\beta(W, Z) = 0\ \forall Z \in Z \Rightarrow w = 0$
- $\beta(W, Z) = 0\ \forall w \in W \Rightarrow Z = 0$

Übung:

Wenn W, Z endlichdimensional, $(w_i)_{i=1}^n$, $(z_i)_{i=1}^m$ Basen in W bzw. Z dann ist β nichtsingulär $\Leftrightarrow (\beta(w_i, z_j))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ nicht ausgeartet ist $\Rightarrow n = m$

β gibt einen Isomorphismus $\hat{\beta}\colon Z \to W^*$

Beispiel:

$W = Z$, euklidischer Raum mit Skalarpodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\beta(W, Z) = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

Alos: Wir betrachten eine nichtsinguläre Paarung

$$\beta_i\colon T_{s,r}(V) \times T_{r,s}(V) \to \mathbb{R}$$

Definiere

$$\begin{aligned} & \beta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_s \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_r^*, v_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_s^*) \\ = \ & \Pi_{i=1}^r v_i^*(u_i) \cdot \Pi_{j=1}^s u_j^*(v_j)_s \text{ bilinear fortgesetzt} \end{aligned}$$

Tensorprodukte von Vektorräumen

Zu zeigen ist, dass β nicht ausgeartet ist. Dazu sei $0 \neq t \in T_{r,s}(V)$, wir suchen $t^* \in T_{s,r}(V)$ mit $\beta(t^*, t) \neq 0$

Sei $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis in V, $(\alpha)_{j=1}^n$ die Dualbasis in V^*

Dann gilt:

$$t = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\} \\ j_1,\ldots j_s \in \{1,\ldots,n\}}} t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s}$$

$D_a t \neq 0$, ist eins von den Koeffizienten $\neq 0$:

$$0 \neq t^{i_1 \cdot i_r}_{j_1\cdots j_s} = \beta(\alpha_{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s}, t)$$

Bemerkung: Die Paarung zwischen $T_{r,s}$ mal $T_{s,r}$ wird gelegentlich einfach durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oder $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet.

Beispiel $V = T_pM$, (U,x) eine Karte um p, dann hat $V = T_pM$ eine Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$

$V^* = T_p^*M$ bekommt die duale Basis $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^n$

Erinnerung: $\mathrm{d}x^i(\underbrace{T_pM}(v) := v(x^i))$, daher $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_{ij}$

Wir bekommen jetzt z.B. $(i,j$ fest)

1. $t_{ij} = \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \in V^* \otimes V^* = T_{0,2}(V) \cong T_{0,2}(V) \cong \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} t_{ij} &= (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)(v,w) \\ &= \mathrm{d}x^i(v) \cdot \mathrm{d}x^j(w) \\ &= v(x^i) \cdot w(x^j),\ v,w \in T_pM \end{aligned}$$

Beispiel:

$$g := \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$$

ist auch eine Biliniarform auf T_pM. Wenn $M = \mathbb{R}^n$, p beliebig, dann ist g das Standardskalarprodukt auf $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)}_{=\delta_{il}} \\ &= \delta_{kl} + \delta_{lk} \\ &= \delta_{kl} \end{aligned}$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Errinnerung:

für Integrationstheorie wollen wir die Rechenregeln

$$d_x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

Beobachtung: Tensoren kann man miteinander multiplizieren. Es gibt eine kanonische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}}) \times \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{l\text{-mal}} &\to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{(k+l)\text{-mal}}\\ ((v_1 \otimes \ldots \otimes v_k), (v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l})) &\mapsto (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l})\end{aligned}$$

Notation:

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \\ \mathbb{R} & k = 0 \end{cases}$$

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

heißt die Tensoralgebra von V

Multiplikation: $t \in V^{\otimes r}$, $t' \in V^{\otimes s}$

$$t \cdot t' := t \otimes t' \in V^{\otimes (r+s)}$$

definiert eine Multiplikation auf $T(V)$

In $T(V)$ gelten die Relationen $v \otimes v = 0$ nicht.

Diese wollen wir erzwingen.

Sei $Z(V) = \langle v \otimes v | v \in V \rangle$ das Ideal in $T(V)$ erzeugt von Elementen der Form $v \otimes v$

Notation:

$$I_r(V) := I(V) \cap V^{\otimes r}, I(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I_n(V) \text{ (kleine Übung)}$$

Multiplikation wird durch $\bigwedge$ bezeichnet. nach Konstruktion gilt $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_k]$

Definition

$$\bigwedge(V) := T(V)/I(V)$$

heißt äußere Algebra von V

Nach Konstruktion und Eigenschaft von $I(V)$ gilt

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \underbrace{\bigwedge^r(V)}_{V^{op?}/I_r(V}$$

1. $\wedge^0 V \cong \mathbb{R}$, weil $I_0(V) = \{0\}$
2. $\wedge^1 V \cong V$, weil $I_1(V) = \{0\}$

Proposition

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis in V. Dann ist

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid k \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k(V)$ ($\leftarrow$ k-te äußere Potenz)

Insbesondere gilt:

$$\bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \wedge_k(V) = \{0\}, \quad k > n$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Beweis

Nach Konstruktion gilt: $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, daher spannt

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_k \leqslant n\}$$

den Raum $\bigwedge^k V$. Wir brauchen also zu zeigen, dass

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = 0$$

Sei $I = (i_1, \ldots, i_k)$ $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ fixiert.

Sei $J = \{1, \ldots n\} \setminus I = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$

Betrachte das Element $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und multipliziere es an $(*)$:

$$\pm\alpha_{i_1,\ldots,i_k} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$$

Alle anderen Terme verschwinden, weil eine Vektor im Produkt doppelt vorkommt.

Gestern:

$$\bigwedge(V) = T(V)/I(V)$$

$I(V) = \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle$ Ideal erzeugt durch $v \otimes v$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i \otimes v_i \otimes v_i z_i \,\middle|\, t_i, t_i' \in T(V), v_i \in V \right\}$$

$$\underbrace{[v_1 \otimes \ldots \otimes v_n]}_{\in T(V)} =: i v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge(V)$$

nach Konstruktion gilt $v \wedge v = 0$, $v' \in V$ (daraus folgt: $v \wedge w = -w \wedge w$, v, $w \in V$, $0 = (v+w) \wedge (v+w) = \underbrace{v \wedge v}_{=0} + v \wedge w + w \wedge v + \underbrace{w \wedge w}_{=0} = v \wedge w + w \wedge v$)

Das Bild von $V^{\otimes k}$ in $\bigwedge(V)$ heißt $\bigwedge^k(V)$ – die Elemente der Länge k,

$$\bigwedge^k(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \middle| v_{i_l} \in V \right\}$$

Proposition

Wenn $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V ist, ist $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant u\}$ eine Basis von $\bigwedge^k(V)$; insbesondere $\dim \bigwedge_k(V) = \binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ für $k > n$

Beweis:

Wir haben die Aussage darauf reduziert, dass in $\bigwedge_k(V)$ $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \longrightarrow$ Reduktion für $k = 2$, $n = 4$. wird behauptet, dass $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ linear unabhängig sind. Wenn nicht $\exists \alpha_{ij}$:

$$\alpha_{12} e_1 \wedge e_2 + \alpha_{13} e_1 \wedge e_j + \alpha_{14} e_1 \wedge e_4 + \ldots = 0$$

$\to \alpha_{13} e_1 e_{324} = 0 = -\alpha_{13}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \Leftrightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I(V)$$

Wenn

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \\ v \otimes v &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j e_i \otimes e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i \otimes e_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<y}}^{n} \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) \end{aligned}$$

Sei $x \in I_n(V) = I(V) \cap V^{\mathrm{op}}$. Aus der obigen Rechnung folgt: Wenn man x in der Tensorbasis ausdrückt.

$$x = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n} x^{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$$

dann gilt: wenn alle i_j's verschieden sind, so gilt

$$x^{i_1, \ldots, i_j, i_{j+1}, \ldots, l_n} = x^{i_1, \ldots, i_{j+1}, i_j, \ldots, i_n}$$

Bei $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ ist der Koeffizient $x^{1,2,\ldots,n} = 1$ alle anderen $0 \Rightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I_n(V)$

Bemerkung:

Jede lineare Abbildung $f\colon V \to V$ induziert eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \bigwedge f\colon \bigwedge V &\to \bigwedge V \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) &\mapsto (f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_k)) \end{aligned}$$

Insbesondere bekommt man die Abbildung ($\dim V = n$) $\bigwedge_n f\colon \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R} \xrightarrow{\det f} \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R}$

$$\begin{aligned} \bigwedge(g \circ f) = \bigwedge g \circ \bigwedge f \quad &\Rightarrow \quad \det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f) \\ & \quad \det(\mathrm{id}) = 1 \end{aligned}$$

Die explizite Formel ergibt sich daraus, dass $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ ein Basisvektor in $\bigwedge^n V$ ist. $\rightsquigarrow$

$f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \ldots \wedge f(e_n) = \ldots$ (Leibnitz-Formel) $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

$[f_{ij}] = M_\xi^\xi(f)$

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} e_j$$

$$\begin{aligned} f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} \\ &= \sum_{j=(j_1,\ldots,j_1)\in S_n} f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} \operatorname{sign}(j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \end{aligned}$$

Letzes Mal:

Tensoren vom Typ (n,s) $\hat{=} T_{r,s}(V) \cong M_{s,r}(V) \hat{=}$ lineare Abbildungen $V^{\otimes s} \otimes (V^*)^{\otimes r} \to \mathbb{R}$

Nächstes Ziel:

Interpretiere $\bigwedge^k V^*$ als gewisse multiliniear Abbildung $V^k \to \mathbb{R}$

$$\bigwedge^k V^* = (V^*)^{\otimes k} / I_k(V^*)$$

$$(V^*)^{\otimes k} = \{f \colon V^k \to \mathbb{R} \mid f \text{ multilinieare Abbildung } \}$$

$$I_k(V^*) = I(V^*) \wedge (V^*)^{\otimes k}$$

$I(V^*) = \{\sum t \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes t'\}$, erzeugt durch $\{\alpha \otimes \alpha \mid \alpha \in V^*\}$

$$(\alpha \otimes \alpha)(v_1 \otimes v_2) = \alpha(v_1)\alpha(v_2) = (\alpha \otimes \alpha)(v_2, v_1)$$

Definition

Eine multiliniear Abbildung $m \colon \underbrace{V^k}_{=V\times\ldots\times V} \to \mathbb{R}$ $(= m \colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R})$ heißt alternierend, wenn

$$m(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0 \ \text{ für alle } v \in V$$

$\Leftrightarrow$ m verschwindet, wenn zwei (beliebige) V gerade gleich sind)

Beispiel

$\det(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ ist eine alternierende Abbildung. Wenn $m\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ alternierend, dann gilt

$$m|_{I_k(V)} = 0$$

(nach Definition von $I_k(V)$)

$\longrightarrow m$ definiert eine Abbildung

$$\overline{m}\colon \bigwedge^k V \quad \to \quad \mathbb{R}$$

v$_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto m(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$

Proposition

$$\bigwedge^k V^* \cong (\bigwedge^k V)^* \cong A_k(V) = \{m\colon V^k \to \mathbb{R} \text{ alternierend } \}$$

Beweis:

Wie gerade gesehen, definiert jedes $m \in A_k \in (V)$ ein Element $\overline{m} \in \left(\bigwedge^k\right)^*$, $m \mapsto \overline{m}$ ist offensichtlich linear. Umgekehrt: jedes $\overline{m}\colon \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ definiert eine multilinieare Abbildung

$$\begin{aligned} m\colon V \times \ldots \times V \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_k) \quad &\mapsto \quad \overline{m}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \end{aligned}$$

sie ist alternierend, weil

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v_k = 0$$

Zum Iso $\bigwedge^k V^* \cong (\bigwedge^k V)^*$: wir brauchen eine nichtsinguläre bilineare Paarung $\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ (die für $K = 1$ offensichtlich ist)

$$V^* \times V \quad \to \quad \mathbb{R}(\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$$

Man definiert die Paarung so:

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \mapsto \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Die Paarung ist nicht ausgeartet, denn: in $\bigwedge^k V$ haben wir nach der Wahl einer Basis $e_1, \ldots, e_n \in V$ die Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)\}(*)$$

Wenn $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V$ dual zu $e_1, \ldots, e_n$, dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

dual zu $(*)$ bezüglich der Paarung:

$$(e_i^*(e_j))_{i,j=1}^k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

wenn aber $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots j_k)$, dann ist

$$(e_{il}^*(e_{jl})) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = 0$

Bemerkung

Unter der Identifikation aus der Proposition bekommen wir die Rechenregeln

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Insbesondere gilt für $k = 2$:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1)$$