

# DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent:            Satz:            Version:

## Inhaltsverzeichnis

<b>Erinnerungen an WS</b>	<b>1</b>
<b>Übung 1</b>	<b>3</b>
Beispiel . . . . .	4
<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>7</b>
<b>Das Tensorprodukt</b>	<b>9</b>
Definition: Tensorprodukt . . . . .	9
Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \otimes W$ . . . . .	9
Existenz von $V \otimes W$ . . . . .	10
Lemma . . . . .	11
Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG) . . . . .	12
Proposition . . . . .	12
Korollar . . . . .	13
Korollar . . . . .	14
Definition Tensor . . . . .	14
Proposition . . . . .	14
Korollar . . . . .	14
<b>Tensorprodukte von Vektorräumen</b>	<b>15</b>
Proposition . . . . .	15
Tensorprodukte von Vektorräumen . . . . .	16
Äußere Potenzen, äußere Algebra . . . . .	17
Definition . . . . .	18
Proposition . . . . .	18
Äußere Potenzen, äußere Algebra . . . . .	19

Compiled on 16. April 2019

## Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$  topologische Räume, die lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussehen + glatte **Strukturen** von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt  $p \in M$  gibt es eine Umgebung  $U \ni p$  zusammen mit einer Karte  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

Idee: da  $M$  lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf  $M$  zu verstehen.

Wichtig dabei: das Objekt auf  $M$  muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. **Tangententialraum** „über“ jedem Punkt  $p \in M$  „hängt“ ein Vektorraum  $T_p M$ ,  $\dim T_p M = \dim M$  Elemente von  $T_p M$  heißen Tangentialvektoren.

$$\begin{aligned} T_p M &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p) \cdot \partial(g) + g(p) \cdot \partial(f)\} \end{aligned}$$

Motto: Tangentialvektor  $\hat{=}$  Richtungsableitung!

$\pi: TM \rightarrow M$  ist glatt  $v \in T_p M \mapsto p$

Nutzen: wir verstehen „wirklich“, was Ableitungen sind

Früher:

$$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\rightsquigarrow D_p f \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ &Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Jetzt in Diffgeo:

$$f \in C^\infty(M, N) \rightsquigarrow_{p \in M} D_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

Vektorfeld:  $X: M \rightarrow TM$  mit  $\pi \circ X = id_M$  ( $\Leftrightarrow X(p) \in T_p M$ ) Gegeben  $X \rightsquigarrow \Phi: \underbrace{W}_{\subseteq \mathbb{R} \times M} \rightarrow M$  (Fluss des Vektorfeldes)

s.d.  $\forall p \in M \gamma_p(t) := \Phi(t, p)$  die ODE

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf  $M$  ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben  $X, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{\text{Vektorfeld}} \rightsquigarrow [X, Y] \in \Gamma(TM)$

$(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$  wird zu einer Lie-Algebra.

Def. Eine Lie-Algebra  $(V, [\cdot, \cdot])$  ist ein Vektorraum  $V$  mit einer bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,  $X, Y \in V$   
 (b) Jacobi-Identität:  $X, Y, Z \in V$ :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Beispiele:

- (a)  $\Gamma(TM)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  ist eine Lie-Algebra  
 (b)  $M_u(\mathbb{R})$ ,  $[A, B] = AB - BA$  ist eine Lie-Algebra

Verbindung zwischen a) und b) – Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

$$G \text{ Lie-Gruppe} \rightsquigarrow \text{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_p Lg} X = X\} =$$

$$\{x \mid x \text{ linksinvariantes Vektorfeld}\}$$

→ Lie-Algebra bzgl.  $[\cdot, \cdot]$ , heißt Lie-Algebra von  $G$ .

Eigenschaften:  $\text{Lie}(G) \cong T_1 G$  als Vektorraum  $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \text{Lie}(G) = \dim G$

$$\begin{aligned} Lg: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Satz  $G = GL(n, \mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} M_n(\mathbb{R})$

$\text{Lie}(G) \cong T_1 G \underset{\text{Vektorraum}}{\cong} M_n(\mathbb{R})$

Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\text{Lie}(GL(n, \mathbb{R})), [\cdot, \cdot]) \cong (M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$$

Für jedes  $G < GL(n, \mathbb{R})$  ist dann  $\text{Lie}(G) \subseteq (M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$ .

$$[A, B] = AB - BA$$

## Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} p \in \mathbb{R}^n \quad D_p f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m (\text{linear}) \\ v &\mapsto \underbrace{\partial_v f(p)}_{= D_p f(v)} \end{aligned}$$

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p v^i$$

$$D_p f \text{ als Matrix } \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

$$f: M \rightarrow N$$

$$p \in M \rightsquigarrow D_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ linear}$$

$$\Downarrow$$

$$v \mapsto \underbrace{(\varphi \mapsto v(f^* \varphi))}_{C^\infty} = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)})$$

$v \hat{=}$  Ableitungsoperation ( $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ) mit  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f^* \varphi}$$

TODO Bildchen

$$M \xrightarrow{f} N$$

$$\Downarrow$$

$$C^\infty(N) \xrightarrow{f^*} C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus}$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Jeder Tangentialvektor  $v$  ist eine lineare Abbildung  $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist

$$\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)} f(v) = f_* v}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}$$

## Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = 1\} \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$\text{Lie}(G) = \text{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}, [\cdot, \cdot]$$

$\parallel$

$$T_1 G \subset T_1 \text{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

$\parallel$

$$\{ \dot{\gamma}(0) \mid \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G \wedge \gamma(0) = 1 \}$$

Sei  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  eine Kurve,  $\gamma(0) = 1$

$$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(0)^* \gamma(0) + \gamma(0)^* \dot{\gamma}(0) &= 0 \\ \parallel \\ \dot{\gamma}(0)^* + \dot{\gamma}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige  $\supseteq$  betrachte:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= e^{tX} \left( := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* &= e^{tX^*} = e^{-tX} \\ \gamma(t)^* \gamma(t) &= e^{-tX} \cdot e^{tX} = 1 \Rightarrow \gamma(t) \in U(n) \\ \dot{\gamma}(t) &= X e^{tX} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = X \end{aligned}$$

wie gewünscht.  $\Rightarrow$  Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \text{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < GL(n, \mathbb{R}) \text{ og } = \underline{u}(n) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{aligned} \text{exp: } \text{og} &\rightarrow G \\ \cup & \\ X &\mapsto \text{exp}(X) \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \text{exp}(tX)$$

$$\dot{\gamma}(t) = X e^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = (L_{\gamma(t)})_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei  $\tilde{X}$  das linksinvariante Vektorfeld zu  $X$  ist

$\Rightarrow \gamma(t)$  ist eine Integralkurve von  $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$$G \in \text{GL}(m, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve  $A(t) \in G$  von  $\tilde{X}$  erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$  mit  $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

$$\begin{aligned} x &\mapsto A \cdot x \\ f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f &= f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$f: V \rightarrow W \text{ linear}$$

mit Übung 28  $p \in V$ :

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{D_p f} & T_p W \\ \parallel & & \parallel \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\det: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D_1 \det: \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto ? = \text{Tr}(A) \end{aligned}$$

$$\det(1 + tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1 + tA) = \det(1 + tBAB^{-1})$$

Wenn  $A$  diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{aligned} \det(1 + tA) &= \begin{vmatrix} 1 + t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + t\lambda_n \end{vmatrix} \\ &= (1 + t\lambda_1) \cdots (1 + t\lambda_n) \\ &= 1 + t(\lambda_1 + \lambda_n) + O(t^2) \\ &= 1 + t \cdot \text{Trace}(A) + O(t^2) \end{aligned}$$

## Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

$$\text{-----} \xrightarrow{U} \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow \alpha: U \xrightarrow{\cong} V \text{ Diffeo}$$

$$\text{-----} \xrightarrow{V} \mathbb{R}^n$$

Betrachte  $n = 1$ :

$U, V \subseteq \mathbb{R}$  offenen Intervalle.  $\alpha: \underbrace{U}_{=(a,b)} \rightarrow V$  Diffeo (= strikt monotone glatte

Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

„Mnemonik“:

$$dv = v'(u) du$$

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u) \alpha'(u) du = \int_V f(v) dv \neq \int_V \alpha^*(f)(t) dt$$

In  $\mathbb{R}^n$ :

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u \alpha) \, du_1 \cdots du_n = \int_V f(v) \, dv_1 \cdots dv_n$$

$$\alpha: \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & V \text{ Diffeo} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & (v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

$$v = v(u)$$

$$\int_V f(v) \, dv_1 \, dv_2$$

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} du_2$$

$$dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} du_2$$

$$dv_1 \, dv_2 = \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} du_1 du_1} + \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} du_2 du_2} + \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} du_2 du_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} du_1 du_2 =: (*)$$

$$= \int_V f(v) \, dv_1 \, dv_2 = \int_U f(v(u)) \left( \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\substack{= \det \\ \text{sollte} \\ (*) \text{ sein}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \right) du_1 \, du_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$\begin{aligned} du_1 \cdot du_1 &= du_2 \cdot du_2 = 0 \\ du_1 \cdot du_2 &= -du_2 \cdot du_1 = 0 \end{aligned}$$

Erkenntnis:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine  $n$ -Differentialform auf  $\mathbb{R}^n$  ist (informell) ein Ausdruck



$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit den Rechenregeln: wenn  $x = x(y)$  mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y)) \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n} dy_n \wedge \dots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n} dy_n \right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni dy_i \wedge dy_j = -dy_j \wedge dy_i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

folglich ist  $\int \omega$  unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

## Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektorraum  $V (= T_p M, T_p^* M)$  einen Kalkül zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  mit Rechenregeln  $dx_i \wedge dx_j = dx_j \wedge dx_i$  erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multilineareren (z.B.  $\det: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ ) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multilineare Abbildung  $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ . Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

### Definition: Tensorprodukt

Ein Vektorraum  $V \otimes W$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $i: V \times W \rightarrow V \otimes W$  heißt Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ , wenn für jede bilineare Abbildung  $f: V \times W \rightarrow Z$ , ( $Z$  beliebiger Vektorraum) eine eindeutige lineare Abbildung  $\bar{f}: V \otimes W \rightarrow Z$  existiert mit  $\bar{f} \circ i = f$  (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{i} & V \otimes W \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \bar{f} \\ & & Z \end{array}$$

### Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \otimes W$

Wenn  $V \otimes W$  existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc}
V + W & \xrightarrow{i_1} & (V \otimes W)_1 \\
& \searrow i_2 & \downarrow \exists! f_1 \\
& & (V \otimes W)_2
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \uparrow \exists! f_2 \\ \vdots \end{array}$$

Die universelle Eigenschaft von  $(V \otimes W)_1$  liefert  $f_1: (V \otimes W)_1 \rightarrow (V \otimes W)_2$  mit  $f_1 \circ i_1 = i_2$ .

Die universelle Eigenschaft von  $(V \otimes W)_2$  liefert  $f_2: (V \otimes W)_2 \rightarrow (V \otimes W)_1$  mit  $f_2 \circ i_2 = i_1$ .

Beh.  $f_1, f_2$  sind invers zueinander. Betrachte z.B.:  $f_1 \circ f_2$

$$\begin{array}{ccc}
V \otimes W & \xrightarrow{i_2} & (V \otimes W)_2 \\
& \searrow i_2 & \downarrow f_1 \circ f_2 \\
& & (V \otimes W)_2
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \uparrow id \\ \vdots \end{array}$$

Wegen der Eigenschaften in der Definition von  $(V \otimes W)_2$  ist  $f_1 \circ f_2 = id_{(V \otimes W)_2}$ . Analog gilt  $f_2 \circ f_1 = id_{(V \otimes W)_1}$ .

### Existenz von $V \otimes W$

Idee:  $V \otimes W$  soll von Ausdrücken der Form  $v \otimes w$ ,  $v \in V$ ,  $w \in W$  aufgespannt werden und  $v \otimes w$  soll linear in  $V$  und  $W$  sein.

Definition: Sei  $X$  eine Menge. Der freie (reelle) Vektorraum auf  $X$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$ , ist der (reelle) Vektorraum mit Basis  $X$ .

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) \cong \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W) / \left\langle \begin{array}{l} (v_1+v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), v_1, v_2 \in V, w \in W \\ (v, w_1+w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), v \in V, w_1, w_2 \in W \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{array} \right\rangle$$

Sei

$$\begin{aligned}
i: V \times W &\rightarrow V \otimes W \\
(v, w) &\mapsto [(v, w)] =: v \otimes w
\end{aligned}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
\lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\langle \cdot \rangle = \text{span}(\cdot)$$

wenn  $E$  ein Vektorraum ist,  $E' \subseteq E$  Untervektorraum, dann ist  $E/E' = \{e + E' \mid e \in E\}$  mit mengenmäßiger Addition und Skalarmultiplikation. (bei uns ist  $E = \mathcal{F}(V \times W)$ ,  $E' = \langle \dots \rangle$ )

Interpretation:  $E/E' =$  Vektorraum der Äquivalenzklassen von Vektorraum in  $E$  modulo  $E'$ . ( $e' = 0$ ,  $e' \in E'$ ) Entsprechend ist

$$V \otimes W = \text{span}\left\{ \underbrace{v \otimes w}_{=:(v,w)} \mid v \in V, w \in W \right\}$$

mit den Relationen:

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Lemma

Die angegebene Konstruktion von  $V \otimes W$  erfüllt die universelle Eigenschaft.

Beweis:

Sei  $f: V \times W \rightarrow Z$  gegeben, bilinear

Definiere

$$\begin{aligned} \hat{f}: V \times W &\rightarrow Z, \quad \text{linear} \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i(v_i, w_i) &\mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i, w_i) \end{aligned}$$

Behauptung:  $\hat{f}$  induziert eine lineare Abbildung  $\bar{f}$

$$\begin{aligned} \bar{f}: V \otimes W &\rightarrow Z \\ (v \otimes w) &\mapsto \hat{f}((v, w)) \end{aligned}$$

Dazu muss man überprüfen, dass  $(v_1 + v_2, w) - (v, w) - (v_2, w)$  sowie andere Relationen von irgendwas oben im Kern von  $\hat{f}$  liegen. Das ist dadurch gewährleistet, dass  $f$  bilinear ist, z.B.

$$\begin{array}{l}
\hat{f}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) \\
\stackrel{\text{Def. } \hat{f}}{=} f(v_1 + v_2, w) - f(v_1, w) - f(v_2, w) \\
\stackrel{\text{Bilinearität von } f}{=} 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \bar{f}$  erfüllt dann  $\bar{f}(v \otimes w) = f(v, w) \Rightarrow V \otimes W$  erfüllt die universelle Eigenschaft.

## Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG)

$V, W$  Vektorräume  $\rightsquigarrow \text{Hom}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}$  ist selbst ein Vektorraum, wenn  $V, W$  endlichdimensional  $\Rightarrow \dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$   
 $(\text{Hom}(V, W) \cong \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}), \text{ wenn } V \cong \mathbb{R}^n, W \cong \mathbb{R}^m)$

$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$  ist dann der Dualraum von  $V$ . Wenn  $\{e_i\}_{i=1}^n$  eine Basis in  $V$  ist, dann gibt es die duale Basis  $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset V^*$  mit:  $\alpha_j(e_i) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Schließlich ist für  $V < \infty$  die Einbettung  $i: V \rightarrow V^{**}, v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v))$  ein Isomorphismus

## Proposition

$W \otimes V^*$  ist kanonisch isomorph zu  $\text{Hom}(V, W)$  für endlichdimensionale  $V, W$ . Insbesondere gilt dann:

$$\dim W \otimes V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim W \otimes V$$

Mehr: wenn  $\{f_j\}_{j=1}^m$  und  $\{e_i\}_{i=1}^n$  Basen in  $W$  bzw.  $V$  sind. Dann ist  $\{f_j \otimes e_i\}_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  eine Basis in  $W \otimes V$

Beweis:

Sei  $L: W \times V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W), (w, \alpha) \mapsto (\theta_{w, \alpha}: v \mapsto \alpha(v) \cdot w), (\theta_{w, \alpha} \text{ Rang 1-Operator definiert durch } \alpha, w)$

$L$  ist bilinear, weil:

$$\begin{aligned}
& (L(w_1 + \lambda w_2, \alpha_1 + \mu \alpha_2))(v) \\
&= (\alpha_1 + \mu \alpha_2)(v) \cdot (w_1 + \lambda w_2) \\
&= \underbrace{\alpha_1(v)w_1}_{L(w_1, \alpha_1)(v)} + \underbrace{\mu \alpha_2(v)w_1}_{L(w_1, \alpha_2)(v)} + \lambda \underbrace{\alpha_1(v)w_2}_{L(w_2, \alpha_1)(v)} + \mu \lambda \underbrace{\alpha_2(v) \cdot w_2}_{L(w_2, \alpha_2)(v)}
\end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommen wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\bar{L}: W \otimes V^* &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ w \otimes \alpha &\mapsto \theta_{w, \alpha}\end{aligned}$$

$\bar{L}$  ist ein Isomorphismus: geben wir das Inverse an. Sei  $\{e_i\}_{i=1}^n$  eine Basis on  $V$ ,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  die duale Basis in  $V^*$ . Definiere

$$\begin{aligned}\varphi: \text{Hom}(V, W) &\rightarrow W \otimes V^* \\ T &\mapsto \sum_{i=1}^n T(e_i) \otimes \alpha_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi \circ \bar{L}(w \otimes \alpha) &= \varphi(\theta_{w, \alpha}) \\ &= \sum_{w, \alpha} (e_i) \otimes \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) w \otimes \alpha_i \\ &= w \otimes \left( \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) \cdot \alpha_i \right) \\ &= w \otimes \alpha \\ &\Rightarrow \varphi \circ \bar{L} = \text{id}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{L} \circ \varphi(T))(v) &= \sum_{i=1}^n \theta_{T(e_i), \alpha_i}(v) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) T(e_i) \\ &= T \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) e_i \right) \\ &= T(v) \\ &\Rightarrow \bar{L} \circ \varphi = \text{id}\end{aligned}$$

$W \otimes W$  ist nach Konstruktion aufgespannt durch  $f_j \otimes e_i$ ,  $\dim W \otimes V = \dim W \cdot \dim V \Rightarrow \{f_j \otimes e_i\}$  ist eine Basis.

### Korollar

Wenn  $X, Y$  endliche Mengen sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}(X \times Y) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$$

Erinnerung: hier gilt  $\mathcal{F}(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$  mit punktweisen Operationen

## Korollar

$$W \otimes V \cong V \otimes W, \quad W \otimes (V \otimes Z) = (W \otimes V) \otimes Z$$

Bemerkung: Es gilt auch ohne Einschränkung auf Dimensionen

## Definition Tensor

Ein Tensor vom Typ  $(r, s)$  (zum Vektorraum  $V$ ) ist ein Element des Vektorraumes

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

Bemerkung: Wenn  $\{e_i\}_{i=1}^n$  eine Basis in  $V$ ,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset V^*$  duale Basis.  $\rightsquigarrow$

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}\}$$

ist eine Basis in  $T_{r,s}$  (Beweis: wende induktiv die Proposition an).

$\Rightarrow$  jedes  $T \in T_{r,s}(V)$  ist darstellbar also

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{j_s})$$

Beispiel  $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$  d.h., elemente von  $T_{1,1}$  kann man als lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  interpretieren. Multilinear heißt linear in jeder Komponente. Sei

$$M_{s,r}(V) := \{f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ multilinear} \}$$

## Proposition

$T_{r,s}(V)$  ist kanonisch isomorph zu  $M_{s,r}(V)$

## Korollar

$$\text{Bil}(V) = \{b: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ bilinear}\} \cong V^* \otimes V^*$$

Insbesondere ist ein Skalarprodukt auf  $V$  ein Tensor vom Typ  $(0, 2)$  Notation  $g_{i,j}$  für Koordinaten einer Metrik ist konstant mit Tensorprodukten.

## Tensorprodukte von Vektorräumen

$$\text{Hom}(V \otimes \underbrace{W}_{\mathbb{R}}) \cong \text{Bil}(V \times W, \underbrace{Z}_{\mathbb{R}})$$

Induktion  $\Rightarrow$   $\text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, Z) \cong \{f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow Z \mid f \text{ multilinear} \}$

Letzes mal:

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-mal}}$$

$$M_{s,r} := \{f: \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ multilinear} \}$$

### Proposition

$$T_{r,s}(V) \stackrel{\text{kan.}}{\cong} M_{s,r}(V)$$

Beweis:

Nach obigen Eigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} M_{s,r} &\cong \text{Hom}(T_{s,r}(V), \mathbb{R}) \cong t_{s,r}(V)^* = (V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V)^* \\ &\stackrel{?}{\cong} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}} \end{aligned}$$

Wir wollen also zeigen:  $W, Z$  zwei Vektorräume, wollen zeigen, dass  $W^* \cong Z$  ( $W = T_{s,r}(V), Z = T_{r,s}(V)$ )

Def./Erinnerung:

Eine nichtsinguläre Paarung zwischen  $W, Z$  ist eine bilineare Abbildung  $\beta: W \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $\beta(W, Z) = 0 \forall Z \in Z \Rightarrow w = 0$
- $\beta(W, Z) = 0 \forall w \in W \Rightarrow Z = 0$

Übung:

Wenn  $W, Z$  endlichdimensional,  $(w_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^m$  Basen in  $W$  bzw.  $Z$  dann ist  $\beta$  nichtsingulär  $\Leftrightarrow (\beta(w_i, z_j))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$  nicht ausgeartet ist  $\Rightarrow n = m$

$\beta$  gibt einen Isomorphismus  $\hat{\beta}: Z \rightarrow W^*$

Beispiel:

$W = Z$ , euklidischer Raum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\beta(W, Z) = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

Alos: Wir betrachten eine nichtsinguläre Paarung

$$\beta_i: T_{s,r}(V) \times T_{r,s}(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

Definiere

$$\begin{aligned} & \beta(v_1 \otimes \dots \otimes v_s \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_r^*, v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes u_1^* \otimes \dots \otimes u_s^*) \\ = & \prod_{i=1}^r v_i^*(u_i) \cdot \prod_{j=1}^s u_j^*(v_j)_s \text{ bilinear fortgesetzt} \end{aligned}$$

## Tensorprodukte von Vektorräumen

Zu zeigen ist, dass  $\beta$  nicht ausgeartet ist. Dazu sei  $0 \neq t \in T_{r,s}(V)$ , wir suchen  $t^* \in T_{s,r}(V)$  mit  $\beta(t^*, t) \neq 0$

Sei  $(e_i)_{i=1}^n$  eine Basis in  $V$ ,  $(\alpha_j)_{j=1}^n$  die Dualbasis in  $V^*$

Dann gilt:

$$t = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \\ j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}}} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{j_s}$$

$D_{at} \neq 0$ , ist eins von den Koeffizienten  $\neq 0$ :

$$0 \neq t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \beta(\alpha_{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}, t)$$

Bemerkung: Die Paarung zwischen  $T_{r,s}$  mal  $T_{s,r}$  wird gelegentlich einfach durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oder  $(\cdot, \cdot)$  bezeichnet.

Beispiel  $V = T_p M$ ,  $(U, x)$  eine Karte um  $p$ , dann hat  $V = T_p M$  eine Basis  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$

$V^* = T_p^* M$  bekommt die duale Basis  $\{dx^i\}_{i=1}^n$

Erinnerung:  $dx^i(\underbrace{T_p M(v)} := v(x^i))$ , daher  $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_{ij}$

Wir bekommen jetzt z.B.  $(i, j)$  fest)

$$1. \quad t_{ij} = dx^i \otimes dx^j \in V^* \otimes V^* = T_{0,2}(V) \cong T_{0,2}(V) \cong \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} t_{ij} &= (dx^i \otimes dx^j)(v, w) \\ &= dx^i(v) \cdot dx^j(w) \\ &= v(x^i) \cdot w(x^j), \quad v, w \in T_p M \end{aligned}$$



Beispiel:

$$g := \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

ist auch eine Bilinearform auf  $T_p M$ . Wenn  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p$  beliebig, dann ist  $g$  das Standardskalarprodukt auf  $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{=\delta_{ik}} \underbrace{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)}_{=\delta_{il}} \\ &= \delta_{kl} + \delta_{lk} \\ &= \delta_{kl} \end{aligned}$$

## Äußere Potenzen, äußere Algebra

Erinnerung:

für Integrationstheorie wollen wir die Rechenregeln

$$d_x^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

Beobachtung: Tensoren kann man miteinander multiplizieren. Es gibt eine kanonische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \underbrace{(V \otimes \dots \otimes V)}_{k\text{-mal}} \times \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{l\text{-mal}} &\rightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{(k+l)\text{-mal}} \\ ((v_1 \otimes \dots \otimes v_k), (v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_{k+l})) &\mapsto (v_1 \otimes \dots \otimes v_{k+l}) \end{aligned}$$

Notation:

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \\ \mathbb{R} & k = 0 \end{cases}$$

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

heißt die Tensoralgebra von  $V$

Multiplikation:  $t \in V^{\otimes r}, t' \in V^{\otimes s}$

$$t \cdot t' := t \otimes t' \in V^{\otimes(r+s)}$$

definiert eine Multiplikation auf  $T(V)$

In  $T(V)$  gelten die Relationen  $v \otimes v = 0$  nicht.

Diese wollen wir erzwingen.

Sei  $Z(V) = \langle v \otimes v | v \in V \rangle$  das Ideal in  $T(V)$  erzeugt von Elementen der Form  $v \otimes v$

Notation:

$$I_r(V) := I(V) \cap V^{\otimes r}, I(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I_r(V) \text{ (kleine Übung)}$$

Multiplikation wird durch  $\wedge$  bezeichnet. nach Konstruktion gilt  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = [v_1 \otimes \dots \otimes v_k]$

## Definition

$$\bigwedge(V) := T(V)/I(V)$$

heißt äußere Algebra von  $V$

Nach Konstruktion und Eigenschaft von  $I(V)$  gilt

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \underbrace{\bigwedge^r(V)}_{V^{\otimes r}/I_r(V)}$$

1.  $\bigwedge^0 V \cong \mathbb{R}$ , weil  $I_0(V) = \{0\}$
2.  $\bigwedge^1 V \cong V$ , weil  $I_1(V) = \{0\}$

## Proposition

Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis in  $V$ . Dann ist

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid k \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

eine Basis von  $\bigwedge^k(V)$  ( $\leftarrow$   $k$ -te äußere Potenz)

Insbesondere gilt:

$$\bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \bigwedge^k(V) = \{0\}, \quad k > n$$

## Äußere Potenzen, äußere Algebra

Beweis

Nach Konstruktion gilt:  $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ , daher spannt

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_k \leq n\}$$

den Raum  $\bigwedge^k V$ . Wir brauchen also zu zeigen, dass

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$$

Sei  $I = (i_1, \dots, i_k)$   $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  fixiert.

Sei  $J = \{1, \dots, n\} \setminus I = (j_1, \dots, j_{n-k})$   $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$

Betrachte das Element  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  und multipliziere es an (\*):

$$\pm \alpha_{i_1, \dots, i_k} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = 0$$

Alle anderen Terme verschwinden, weil eine Vektor im Produkt doppelt vorkommt.