DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Inhaltsverzeichnis

Compiled on 10. April 2019

Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$ topologische Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen + glatte `Strukturen` von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ zusammen mit einer Karte $x \colon U \to \mathbb{R}^n$

Idee: da M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf M zu verstehen.

`Wichtig dabei`: das Objekt auf M muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. `Tangentialraum` „über" jedem Punkt $p \in M$ „hängt" ein Vektorraum T_pM, $\dim T_pM = \dim M$ Elemente von T_pM heißen Tangentialvektoren.

$$\begin{aligned} T_pM &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p)\cdot\partial(g) + g(p)\cdot\partial(f)\} \end{aligned}$$

   Motto: Tangentialvektor $\hat{=}$ Richtungsableitung!

   $\pi\colon TM \to M$ ist glatt $v \in T_pM \mapsto p$

   Nutzen: wir verstehen „wirklich", was Ableitungen sind

   Früher:

$$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \rightsquigarrow \quad & D_pf \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ & Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

   Jetzt in Diffgeo:

$$f \in C^\infty(M, N) \underset{p\in M}{\rightsquigarrow} D_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

   Vektorfeld: $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = id_M$ ($\Leftrightarrow X(p) \in T_pM$) Gegeben $X \rightsquigarrow \Phi\colon \underset{\subseteq \mathbb{R}\times M}{W} \to M$ (Fluss des Vektorfeldes)

   s.d. $\forall p \in M$ $\gamma_p(t) := \Phi(t,p)$ die ODE

$$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$$

   lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf M ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben $X, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{Vektorfeld} \rightsquigarrow [X,Y] \in \Gamma(TM)$

   $(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ wird zu einer Lie-Algebra.

   Def. Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ mit folgenden Eingenschaften:

   (a) $[X,Y] = -[Y,X], \quad X, Y \in V$
   (b) Jacobi-Identität: $X, Y, Z \in V$:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

   Beispiele:

(a) $\Gamma(TM)$, $[\cdot,\cdot]$ ist eine Lie-Algebra
(b) $\mathbb{M}_u(\mathbb{R})$, $[A,B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra

Verbindung zwischen a) und b) – Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

G Lie-Gruppe $\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(G) = 2(G) = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_p Lg} X = X\} =$

$\{x \mid x$ linksinvariantes Vektorfeld $\}$

$\to$ Lie-Algebra bzgl. $[\cdot,\cdot]$, heißt Lie-Algebra von G.

Eigenschaften: $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G$ als Vektoraum $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G) = \dim G$

$$\begin{aligned} Lg\colon G &\to G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Satz $G = GL(n,\mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G \underset{\text{Vektoraum}}{\cong} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathbb{R})), [\cdot,\cdot]) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$$

Für jedes $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist dann $\mathrm{Lie}(G) \subseteq (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$.

$$[A,B] = AB - BA$$

Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$p \in \mathbb{R}^n \quad \begin{aligned} D_p f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m (\text{linear}) \\ v &\mapsto \underbrace{\partial_v f(p)}_{= D_p f(v)} \end{aligned}$$

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p v^i$$

$$D_p f \underset{\text{als Matrix}}{=} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}}}$$

$$f\colon M \to N$$

$$\begin{array}{rll} p \in M \rightsquigarrow D_p f\colon & T_p M & \to T_{f(p)} N \text{ linear} \\ & \Cup & \\ & v & \mapsto (\underbrace{\varphi}_{C^\infty} \mapsto v(f^*\varphi)) = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)}) \end{array}$$

$v \mathrel{\hat{=}}$ Ableitungsoperation ($v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^*\varphi"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

TODO Bildchen

$$\begin{array}{rcl} M & \overset{f}{\to} & N \\ & \rightsquigarrow & \\ C^\infty(N) & \overset{f^*}{\to} & C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Jeder Tangentialvektor v ist eine lineare Abbildung $v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, dann ist $\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)} f(v) = f_* v} \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ linear

Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$\begin{array}{rcl} & \mathrm{Lie}(G) & = \mathrm{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(C) \mid X^* = -X\},\ [\cdot,\cdot] \\ & \cong & \\ & T_1 G & \subset T_1 \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ & \parallel & \\ \{ & \dot\gamma(0) & \mid \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G \wedge \gamma(0) = 1\} \end{array}$$

Sei $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G$ eine Kurve, $\gamma(0) = 1$

$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$

$$\begin{array}{rcl} \dot\gamma(0)^*\gamma(0) & + & \gamma(0)^*\dot\gamma(0) = 0 \\ & \parallel & \\ \dot\gamma(0)^* & + & \dot\gamma(0) = 0 \end{array}$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige $\supseteq$ betrachte:

$$\begin{aligned}\gamma(t) := e^{tX} \left(:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* = e^{tX^*} = e^{-tX} \\ \gamma(t) * \gamma(t) = e^{-tX} \cdot e^{tX} = 1 \Rightarrow \gamma(t) \in \mathrm{U}(n) \\ \dot{\gamma}(t) = Xe^{tX} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = X\end{aligned}$$

wie gewünscht. $\Rightarrow$ Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \mathrm{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \, \mathrm{og} = \underline{u}(n) \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{aligned}\exp\colon \quad & \mathrm{og} && \to G \\ & \ \Psi && \\ & X && \mapsto \exp(X)\end{aligned}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \exp(tX)$$

$$\dot{\gamma}(t) = Xe^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = \left(L_{\gamma(t)}\right)_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei $\tilde{X}$ das linksinvariante Vektorfeld zu X ist

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist eine Integralkurve von $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$G \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve $A(t) \in G$ von $\tilde{X}$ erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$ mit $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

$$\begin{aligned} x &\mapsto A \cdot x \\ f \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f = f \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$f \colon V \to W \text{ linear}$$

mit Übung 28 $p \in V$:

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{D_p f} & T_p W \\ \cong & & \cong \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\det \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D_1 \det \colon \mathbb{M}_n(R) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto ? = \mathrm{Tr}(A) \end{aligned}$$

$$\det(1 + tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1 + tA) = \det(1 + tBAB^{-1})$$

Wenn A diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{aligned}
\det(1+tA) &= \begin{vmatrix} 1+t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t\lambda_n \end{vmatrix} \\
&= (1+t\lambda_1)\cdots(1+t\lambda_n) \\
&= 1+t(\lambda_1+\lambda_n)+O(t^2) \\
&= 1+t\cdot\mathrm{Trace}(A)+O(t^2)
\end{aligned}$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

$\overset{U}{\overline{\hspace{6em}}}$ $\mathbb{R}^n$

$\downarrow$ $\alpha\colon U \overset{\cong}{\to} V$ Diffeo

$\underset{V}{\overline{\hspace{6em}}}$ $\mathbb{R}^n$

Betrachte $n = 1$:

U, $V \subseteq \mathbb{R}$ offenen Intervalle. $\alpha\colon \underbrace{U}_{=(a,b)} \to V$ Diffeo (= strikt monotone glatte Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

„Mnemonik“:

$$\mathrm{d}v = v'(u)\,\mathrm{d}u$$

$f\colon V \to \mathbb{R}$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u)\alpha'(u)\,\mathrm{d}u = \int_V f(v)\,\mathrm{d}v \neq \int_V \alpha^*(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u\alpha)\,\mathrm{d}_{u_1}\cdots\mathrm{d}_{u_n} = \int_V f(v)\,\mathrm{d}_{v_1}\cdots\mathrm{d}_{v_n}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \quad & U && \to V \text{ Diffeo} \\
& (u_1, \ldots, u_n) && \mapsto (v_1, \ldots, v_n)
\end{aligned}
$$

$v = v(u)$

$$\int_V f(v) \, \mathrm{d}v_1 \, \mathrm{d}v_2$$

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \, \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \, \mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \, \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \, \mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_1 \, \mathrm{d}v_2 = \xcancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_1} + \xcancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_2} + \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_1 =: (*)$$

$$= \int_V f(v) \, \mathrm{d}v_1 \, \mathrm{d}v_2 = \int_U f(v(u)) \left(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\underset{\substack{\text{sollte} \\ (*) \text{ sein}}}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}} \right) \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 &= \mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_2 = 0 \\
\mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_2 &= -\mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_1 = 0
\end{aligned}
$$

Erkenntniss:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine n-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist (informell) ein Ausdruck

$$\omega = f(x) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit den Rechenregeln: wenn $x = x(y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y))\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n\wedge\ldots\wedge\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n\right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}y_j = -\,\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}y_i, \qquad i,j=1,\ldots,n$$

folglich ist $\int \omega$ unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektoraum $V(=T_pM, T_p^*M)$ einen Kalkühl zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie $\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_k$ mit Rechenregeln $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$ erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multiliniearen (z.B. $\det\colon \underbrace{\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}}\to\mathbb{R}$) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multilinieare Abbildung $f\colon V_1\times\ldots\times V_n\to W$. Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

Definition: Tensorprodukt

Ein Vektoraum $V\otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V\times W\to V\otimes W$ heißt Tensorprodukt von V und W, wenn für jede bilineare Abbildung $f\colon V\times W\to Z$, (Z beliebiger Vektoraum) eine eindeutige lineare Abbildung $\bar f\colon V\otimes W\to Z$ existiert mit $\bar f\circ i=f$ (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V\otimes W \arrow[d, dashed, "\exists!\bar f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V\otimes W$

Wenn $V\otimes W$ existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} V+W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V\otimes W)_1 \arrow[d, dashed, "\exists! f_1"] \\ & (V\otimes W)_2 \arrow[u, dashed, bend right=60, "\exists! f_2"'] \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_1$ liefert $f_1\colon (V \otimes W)_1 \to (V \otimes W)_2$ mit $f_1 \circ i_1 = i_2$.

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_2$ liefert $f_2\colon (V \otimes W)_2 \to (V \otimes W)_1$ mit $f_2 \circ i_2 = i_1$.

Beh. f_1, f_2 sind invers zueinander. Betrachte z.B.: $f_1 \circ f_2$

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_2 \arrow[d, "f_1 \circ f_2"] & \\ & (V \otimes W)_2 & {} \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

Wegen der Eigenschaften in der Definition von $(V \otimes W)_2$ ist $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{(V \otimes W)_2}$. Analog gilt $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{(V \circ W)_1}$

Existenz von $V \otimes W$

Idee: $V \otimes W$ soll von Ausdrücken der Form $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$ aufgespannt werden und $v \otimes w$ soll linear in V und W sein.

Definition: Sei X eine Menge. Der freie (reelle) Vektoraum auf X, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$, ist der (reelle) Vektoraum mit Basis X.

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) \cong \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W) \Big/ \left\langle \begin{smallmatrix} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), v_1,v_2 \in V, w \in W \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), v \in V, w_1,w_2 \in W \\ \left.\begin{smallmatrix} (\lambda v,w)-\lambda(v,w) \\ (v,\lambda w)-\lambda(v,w) \end{smallmatrix}\right\} v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{smallmatrix} \right\rangle$$

Sei

$$\begin{aligned} i\colon \quad V \times W &\to V \otimes W \\ (v,w) &\mapsto [(v,w)] =: v \otimes w \end{aligned}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\langle \cdot \rangle = \mathrm{span}(\cdot)$$

wenn E ein Vektoraum ist, $E' \subseteq E$ Untervektorraum, dann ist $E/E' = \{e + E' \mid e \in E\}$ mit mengenmäßiger Addition und Skalarmultiplikation. (bei uns ist $E = \mathcal{F}(V \times W)$, $E' = \langle \ldots \rangle$)

Interpretation: E/E' = Vektoraum der Äquivalenzklassen von Vektoraum in E modulo E'. ($e' = 0$, $e' \in E'$) Entsprechend ist

$$V \otimes W = \operatorname{span}\{\underbrace{v \otimes w}_{=[(v,w)]} \mid v \in V, w \in W\}$$

mit den Relationen:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
\lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lemma

Die angegebene Konstruktion von $V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Beweis:

Sei $f\colon V \times W \to Z$ gegeben, bilinear

Definiere

$$\begin{aligned}
\hat{f}\colon V \times W &\to Z, \quad \text{linear} \\
\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i, w_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i, w_i)
\end{aligned}$$

Behauptung: $\hat{f}$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{f}$

$$\begin{aligned}
\bar{f}\colon V \otimes W &\to Z \\
(v \otimes w) &\mapsto \hat{f}((v, w))
\end{aligned}$$

Dazu muss man überprüfen, dass $(v_1 + v_2, w) - (v, w) - (v_2, w)$ sowie andere Relationen von irgendwas oben im Kern von $\hat{f}$ liegen. Das ist dadurch gewährleistet, dass f bilinear ist, z.B.

$$\begin{aligned}
& \hat{f}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) \\
\overset{\text{Def. } \hat{f}}{=} \; & f(v_1 + v_2, w) - f(v_1, w) - f(v_2, w) \\
\overset{\text{Bilinearität von } f}{=} \; & 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\bar{f}$ erfüllt dann $\bar{f}(v \otimes w) = f(v, w) \Rightarrow V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG)

V, W Vektorräume $\rightsquigarrow$ $Hom(V, W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ linear }\}$ ist selbst ein Vektoraum, wenn V, W endlichdimensional $\Rightarrow \dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ $(\operatorname{Hom}(V, W) \cong \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$, wenn $V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^m)$

$V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ ist dann der Dualraum von V. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V ist, dann gibt es die duale Basis $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset V^*$ mit: $\alpha_j(e_i) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Schließlich ist für V $< \infty$ die Einbettung $i\colon V \to V^{**}$, $v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v))$ ein Isomorphismus

Proposition

$W \otimes V^*$ ist kanonisch isomorph zu $\operatorname{Hom}(V, W)$ für endlichdimensionale V, W. Insbesondere gilt dann:

$$\dim W \otimes V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim W \otimes V$$

Mehr: wenn $\{f_j\}_{j=1}^m$ und $\{e_i\}_{i=1}^n$ Basen in W bzw. V sind. Dann ist $\{f_j \otimes e_i\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ eine Basis in $W \otimes V$

Beweis:

Sei $L\colon W \times V^* \to \operatorname{Hom}(V, W)$, $(w, \alpha) \mapsto (\theta_{w,\alpha}\colon v \mapsto \alpha(v) \cdot w)$, ($\theta_{w,\alpha}$ Rang 1-Operator definiert durch α, w)

L ist bilinear, weil:

$$\begin{aligned} & (L(w_1 + \lambda w_2, \alpha_1 + \mu\alpha_2))(v) \\ = \ & (\alpha_1 + \mu\alpha_2)(v) \cdot (w_1 + \lambda w_2) \\ = \ & \underbrace{\alpha_1(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_1)(v)} + \underbrace{\mu\alpha_2(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_2)(v)} + \lambda \underbrace{\alpha_1(v)w_2}_{L(w_2,\alpha_1)(v)} + \mu\lambda \underbrace{\alpha_2(v) \cdot w_2}_{L(w_2,\alpha_2)(v)} \end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommen wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{L}\colon W \otimes V^* &\to \operatorname{Hom}(V, W) \\ w \otimes \alpha &\mapsto \theta_{w,\alpha} \end{aligned}$$

$\bar{L}$ ist ein Isomorphismus: geben wir das Inverse an. Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis on V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ die duale Basis in V^*. Definiere

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to W \otimes V^* \\
T &\mapsto \sum_{i=1}^{n} T(e_i) \otimes \alpha_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \bar{L}(w \otimes \alpha) &= \varphi(\theta_{w,\alpha}) \\
&= \sum_{w,\alpha} (e_i) \otimes \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) w \otimes \alpha_i \\
&= w \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) \cdot \alpha_i \right) \\
&= w \otimes \alpha \\
&\Rightarrow \varphi \circ \bar{L} = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{L} \circ \varphi(T)(v)) &= \sum_{i=1}^{n} \theta_{T(e_i),\alpha_i}(v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) T(e_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) e_i \right) \\
&= T(v) \\
&\Rightarrow \bar{L} \circ \varphi = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

$W \otimes W$ ist nach Konstruktion aufgespannt durch $f_j \otimes e_i$, $\dim W \otimes V = \dim W \cdot \dim V \Rightarrow \{f_j \otimes e_i\}$ ist eine Basis.

Korollar

Wenn X, Y endliche Mengen sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}(X \times Y) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$$

Erinnerung: hier gilt $\mathcal{F}(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$ mit punktweisen Operationen

Korollar

$W \otimes V \cong V \otimes W$, $W \otimes (V \otimes Z) = (W \otimes V) \otimes Z$

Bemerkung: Es gilt auch ohne Einschränkung auf Dimensionen

Definition Tensor

Ein Tensor vom Typ (r, s) (zum Vektoraum V) ist ein Element des Vektoraumes

$$T_{r,s}(V) := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

Bemerkung: Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset V^*$ duale Basis. $\rightsquigarrow$

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_r} \mid i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ist eine Basis in $T_{r,s}$ (Beweis: wende induktiv die Proposition an).

$\Rightarrow$ jedes $T \in T_{r,s}(V)$ ist darstellbar also

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s})$$

Beispiel $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}(V)$ d.h., elemente von $T_{1,1}$ kann man als lineare Abbildung von V nach V interpretieren. Multilinear heißt linear in jeder Komponente. Sei

$$M_{s,r}(V) := \{f\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$T_{r,s}(V)$ ist kanonisch isomorph zu $M_{s,r}(V)$

Korollar

$$\mathrm{Bil}(V) = \{b\colon V \times V \to \mathbb{R} \text{ biliniear}\} \cong V^* \otimes V^*$$

Insbesondere ist ein Skalarpodukt auf V ein Tensor vom Typ $(0, 2)$ Notation $g_{i,j}$ für Koordinaten einer Metrik ist konstant mit Tensorprodukten.