DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Inhaltsverzeichnis

Compiled on 10. April 2019

Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$ topologische Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen + glatte `Strukturen` von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ zusammen mit einer Karte $x \colon U \to \mathbb{R}^n$

Idee: da M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf M zu verstehen.

`Wichtig dabei`: das Objekt auf M muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. `Tangentialraum` „über" jedem Punkt $p \in M$ „hängt" ein Vektorraum T_pM, $\dim T_pM = \dim M$ Elemente von T_pM heißen Tangentialvektoren.

$$\begin{aligned} T_pM &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p)\cdot\partial(g) + g(p)\cdot\partial(f)\} \end{aligned}$$

Motto: Tangentialvektor $\hat{=}$ Richtungsableitung!

$\pi\colon TM \to M$ ist glatt $v \in T_pM \mapsto p$

Nutzen: wir verstehen „wirklich“, was Ableitungen sind

Früher:

$$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \rightsquigarrow \quad & D_pf \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ & Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Jetzt in Diffgeo:

$$f \in C^\infty(M, N) \underset{p\in M}{\rightsquigarrow} D_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

   Vektorfeld: $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = id_M$ ($\Leftrightarrow X(p) \in T_pM$) Gegeben $X \rightsquigarrow \Phi\colon \underset{\subseteq \mathbb{R}\times M}{W} \to M$ (Fluss des Vektorfeldes)

   s.d. $\forall p \in M$ $\gamma_p(t) := \Phi(t, p)$ die ODE

   $$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$$

   lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf M ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben $X, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{Vektorfeld} \rightsquigarrow [X, Y] \in \Gamma(TM)$

   $(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ wird zu einer Lie-Algebra.

   Def. Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ mit folgenden Eingenschaften:

   (a) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\;X, Y \in V$
   (b) Jacobi-Identität: $X, Y, Z \in V$:

   $$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

   Beispiele:

   (a) $\Gamma(TM)$, $[\cdot,\cdot]$ ist eine Lie-Algebra
   (b) $\mathbb{M}_u(\mathbb{R})$, $[A, B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra

   Verbindung zwischen a) und b) – Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

G Lie-Gruppe $\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(G) = 2(G) = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_p Lg} X = X\} =$

$\{x \mid x$ linksinvariantes Vektorfeld $\}$

$\to$ Lie-Algebra bzgl. $[\cdot, \cdot]$, heißt Lie-Algebra von G.

Eigenschaften: $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G$ als Vektoraum $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G) = \dim G$

$$\begin{array}{rcl} Lg\colon G & \to & G \\ h & \mapsto & g \cdot h \end{array}$$

Satz $G = GL(n, \mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{Lie}(G) \cong T_1 G \underset{\text{Vektoraum}}{\cong} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})), [\cdot, \cdot]) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$$

Für jedes $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist dann $\mathrm{Lie}(G) \subseteq (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$.

$$[A, B] = AB - BA$$

Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$p \in \mathbb{R}^n \quad \begin{array}{rcl} D_p f\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m (\text{linear}) \\ v & \mapsto & \underbrace{\partial_v f(p)}_{= D_p f(v)} \end{array}$$

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p v^i$$

$$D_p f \underset{\text{als Matrix}}{=} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) \begin{array}{l} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{array}$$

$$f\colon M \to N$$

$$
\begin{array}{lll}
p \in M \rightsquigarrow D_p f\colon & T_p M & \to T_{f(p)} N \text{ linear} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & \\
& v & \mapsto (\underbrace{\varphi}_{C^\infty} \mapsto v(f^*\varphi)) = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)})
\end{array}
$$

$v \mathrel{\widehat{=}}$ Ableitungsoperation ($v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^*\varphi"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

TODO Bildchen

$$
\begin{array}{ccl}
M & \xrightarrow{f} & N \\
& \rightsquigarrow & \\
C^\infty(N) & \xrightarrow{f^*} & C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus} \\
\varphi & \mapsto & \varphi \circ f
\end{array}
$$

Jeder Tangentialvektor v ist eine lineare Abbildung $v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, dann ist $\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)} f(v) = f_* v} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ linear

Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$
\begin{array}{cl}
\mathrm{Lie}(G) & = \mathrm{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(C) \mid X^* = -X\},\ [\cdot,\cdot] \\
\rotatebox{90}{$\cong$} & \\
T_1 G & \subset T_1 \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\
\| & \\
\{ \quad \dot\gamma(0) & \mid \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G \wedge \gamma(0) = 1\}
\end{array}
$$

Sei $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G$ eine Kurve, $\gamma(0) = 1$

$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$

$$
\begin{array}{ccc}
\dot\gamma(0)^*\gamma(0) & + & \gamma(0)^*\dot\gamma(0) = 0 \\
& \| & \\
\dot\gamma(0)^* & + & \dot\gamma(0) = 0
\end{array}
$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige $\supseteq$ betrachte:

$$\begin{aligned}\gamma(t) := e^{tX} \left(:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* = e^{tX^*} = e^{-tX} \\ \gamma(t) * \gamma(t) = e^{-tX} \cdot e^{tX} = 1 \Rightarrow \gamma(t) \in \mathrm{U}(n) \\ \dot{\gamma}(t) = Xe^{tX} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = X\end{aligned}$$

wie gewünscht. $\Rightarrow$ Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \mathrm{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,\mathrm{og} = \underline{u}(n) \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{array}{lll} \exp\colon & \mathrm{og} & \to G \\ & \cup & \\ & X & \mapsto \exp(X) \end{array}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \exp(tX)$$

$$\dot{\gamma}(t) = Xe^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = \left(L_{\gamma(t)}\right)_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei $\tilde{X}$ das linksinvariante Vektorfeld zu X ist

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist eine Integralkurve von $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$G \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve $A(t) \in G$ von $\tilde{X}$ erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$ mit $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

$$\begin{aligned} x &\mapsto A \cdot x \\ f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f = f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$f\colon V \to W \text{ linear}$$

mit Übung 28 $p \in V$:

$$\begin{array}{ccc} T_pV & \xrightarrow{D_pf} & T_pW \\ \cong & & \cong \\ V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W \end{array}$$

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\det\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D_1 \det\colon \mathbb{M}_n(R) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto ? = \mathrm{Tr}(A) \end{aligned}$$

$$\det(1 + tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1 + tA) = \det(1 + tBAB^{-1})$$

Wenn A diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{aligned} \det(1 + tA) &= \begin{vmatrix} 1 + t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + t\lambda_n \end{vmatrix} \\ &= (1 + t\lambda_1) \cdots (1 + t\lambda_n) \\ &= 1 + t(\lambda_1 + \lambda_n) + O(t^2) \\ &= 1 + t \cdot \mathrm{Trace}(A) + O(t^2) \end{aligned}$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

$\overset{U}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}$ $\mathbb{R}^n$

$\downarrow\ \alpha\colon U \xrightarrow{\cong} V$ Diffeo

$\underset{V}{\underline{\qquad\qquad\qquad}}$ $\mathbb{R}^n$

Betrachte $n = 1$:

U, $V \subseteq \mathbb{R}$ offenen Intervalle. $\alpha\colon \underbrace{U}_{=(a,b)} \to V$ Diffeo (= strikt monotone glatte Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

„Mnemonik":

$$\mathrm{d}v = v'(u)\,\mathrm{d}u$$

$f\colon V \to \mathbb{R}$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u)\alpha'(u)\,\mathrm{d}u = \int_V f(v)\,\mathrm{d}v \neq \int_V \alpha^*(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u\alpha)\,\mathrm{d}_{u_1}\cdots\mathrm{d}_{u_n} = \int_V f(v)\,\mathrm{d}_{v_1}\cdots\mathrm{d}_{v_n}$$

$$\begin{aligned} \alpha\colon \quad & U && \to V \text{ Diffeo} \\ & (u_1,\dots,u_n) && \mapsto (v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

$v = v(u)$

$$\int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_1} + \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2} + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 =: (*)$$

$$= \int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \int_U f(v(u))\left(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\substack{= \\ \text{sollte} \\ (*)\text{ sein}} \det\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\end{pmatrix}}\right)\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 &= \mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_2 = 0 \\ \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_2 &= -\,\mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_1 = 0\end{aligned}$$

Erkenntniss:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine n-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist (informell) ein Ausdruck

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit den Rechenregeln: wenn $x = x(y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y))\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n\right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}y_j = -\,\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}y_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

folglich ist $\int \omega$ unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektoraum $V(= T_pM, T_p^*M)$ einen Kalkühl zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit Rechenregeln $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multiliniearen (z.B. det: $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multilinieare Abbildung $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

Definition: Tensorprodukt

Ein Vektoraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V \times W \to V \otimes W$ heißt Tensorprodukt von V und W, wenn für jede bilineare Abbildung $fV \times W \to Z$, (Z beliebiger Vektoraum) eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f}\colon V \oplus W \to Z$ existiert mit $\bar{f} \circ i = f$ (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \oplus W$

Wenn $V \oplus W$ existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} V + W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \oplus W)_1 \arrow[d, dashed, "\exists! f_1"] & \\ & (V \oplus W)_2 & \arrow[u, dashed, "\exists! f_2"] \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $(V \oplus W)_1$ liefert $f_1\colon (V \oplus W)_1 \to (V \oplus W)_2$ mit $f_1 \circ i_1 = i_2$.

Die universelle Eigenschaft von $(V \oplus W)_2$ liefert $f_2\colon (V \oplus W)_2 \to (V \oplus W)_1$ mit $f_2 \circ i_2 = i_1$.

Beh. f_1, f_2 sind invers zueinander. Betrachte z.B.: $f_1 \circ f_2$

$$\begin{tikzcd} V \oplus W \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \oplus W)_2 \arrow[d, "f_1 \circ f_2"] & \\ & (V \oplus W)_2 & \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

Wegen der Eigenschaften in der Definition von $(V \oplus W)_2$ ist $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{(V \oplus W)_2}$. Analog gilt $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{(V \circ W)_1}$

Existenz von $V \oplus W$

Idee: $V \oplus W$ soll von Ausdrücken der Form $v \oplus w$, $v \in V$, $w \in W$ aufgespannt werden und $v \oplus w$ soll linear in V und W sein.

Definition: Sei X eine Menge. Der freie (reelle) Vektoraum auf X, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$, ist der (reelle) Vektoraum mit Basis X.

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) \cong \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viel } x\}$$

$$V \oplus W := {}^{\mathcal{F}(V\times W)}\Big/ {\left\langle \begin{smallmatrix} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), v_1,v_2\in V, w\in W \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), v\in V, w_1,w_2\in W \\ \left.\begin{smallmatrix}(\lambda v,w)-\lambda(v,w)\\(v,\lambda w)-\lambda(v,w)\end{smallmatrix}\right\} v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{R} \end{smallmatrix} \right\rangle}$$

Sei

$$\begin{aligned} i\colon \quad V \times W &\to V \oplus W \\ (v,w) &\mapsto [(v,w)] =: v \oplus w \end{aligned}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2)\oplus w &:= v_1 \oplus w + v_2 \oplus w \\ v \oplus (w_1+w_2) &:= v\oplus w_1 + v \oplus w_2 \\ \lambda(v\oplus w) &= v \oplus \lambda w = \lambda v \oplus w, \quad v_1,v_2\in V, w_1,w_2\in W, \lambda\in\mathbb{R} \end{aligned}$$