

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Skript:

Analysis I & II

Version vom 2020-08-24

Verfasser

Franziska Kühn
überarbeitet durch Benedikt Bartsch
Typos und Fehler gerne und bitte an Benedikt Bartsch.
E-Mail-Adresse siehe:
<https://myfsr.de/dokuwiki/doku.php?id=fsr:mitglieder>

Daten

Prof. Dr. Jürgen Voigt
Wintersemester 2008/09 + Sommersemester 2009
Grundstudium

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis I	8
1	Natürliche Zahlen + Induktion	9
1.1	Peano-Axiome(1889)	9
1.1.1	Addition	9
1.1.2	Satz: Assoziativität der Addition	9
1.1.3	Kommutativität der Addition	10
1.1.4	Multiplikation	10
1.1.5	Relation	10
1.2	Prinzip der vollständigen Induktion	10
1.2.1	Satz: Gauß'sche Summenformel	11
1.3	Fakultät	11
1.3.1	Satz: Permutationen	11
1.4	Binomialkoeffizient	12
1.4.1	Hilfssatz	12
1.5	Satz: Binomischer Lehrsatz	12
1.6	Mengen	14
1.7	Abbildungen	14
1.8	Satz: Wohlordnungssatz	15
2	Körperaxiome der reellen Zahlen	17
2.1	Axiome der Addition	17
2.1.1	Folgerungen	17
2.2	Axiome der Multiplikation	18
2.2.1	Folgerungen	19
2.3	Axiom der Distributivität	19
2.3.1	Folgerungen	19
3	Ordnungsaxiome	21
3.1	Ordnungsaxiome	21
3.1.1	Folgerungen	22
3.2	Satz: \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R}	23
3.3	Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion/Signumfunktion	23
3.3.1	Folgerungen	24
3.4	Satz: Dreiecksungleichung	24
3.5	Archimedisches Axiom	24
4	Folgen und Vollständigkeitsaxiom	25
4.1	Folgen und Konvergenz	25
4.1.1	Folge	25
4.1.2	Konvergenz	26
4.1.3	Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes	27
4.2	Folgerungen	27
4.3	Cauchy-Folge	29
4.3.1	Satz: Konvergenz \Rightarrow Cauchy-Folge	29
4.3.2	Vollständigkeitsaxiom	29

4.4	Beschränktheit	30
4.4.1	Satz: Konvergenz \Rightarrow Beschränktheit	30
5	Supremum von Mengen, Satz von Bolzano-Weierstraß	32
5.1	Supremum & Infimum	32
5.1.1	Satz: Existenz des Supremums	32
5.2	Folgerung: Eindeutigkeit der Wurzel	33
5.3	Monotonie	33
5.3.1	Satz: Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen	34
5.4	Hilfssatz: Monotone Teilfolge	34
5.5	Satz von Bolzano-Weierstraß	34
5.6	Häufungswert	34
5.6.1	Satz: Häufungswert & konvergente Teilfolge	35
5.7	Limes superior/inferior	35
6	Reihen	36
6.1	Geometrische Reihe	37
6.2	Satz: Linearkombination	37
6.3	Konvergenzkriterien	38
6.3.1	Satz: Allgemeines Cauchy'sches Konvergenzkriterium	38
6.3.2	Satz: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen	38
6.3.3	Satz: Reihen mit positiven Gliedern	39
6.3.4	Satz: Majoranten-Kriterium	39
6.4	Absolute Konvergenz	40
6.4.1	Folgerung: Absolute Konvergenz \Rightarrow Konvergenz	40
6.4.2	Satz: Quotientenkriterium	40
6.4.3	Satz: Wurzelkriterium	41
6.5	Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen	41
6.5.1	Satz: Konvergenz von Dezimalbrüchen	41
6.5.2	Satz: Reihenentwicklung einer reellen Zahl	41
6.5.3	Folgerung: Dezimalbruchentwicklung	42
7	Überabzählbarkeit von Mengen	43
7.1	Satz: Vereinigung von abzählbaren Mengen	43
7.2	Satz: Abzählbarkeit von \mathbb{Q}	44
7.3	Satz: Überabzählbarkeit von \mathbb{R}	44
7.3.1	Folgerung: Abzählbarkeit irrationaler Zahlen	44
8	Umordnung von Reihen	45
8.1	Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen	45
8.2	Satz: Großer Umordnungssatz	45
8.3	Folgerung: Cauchy-Produkt	47
9	Exponentialreihe	48
9.1	Satz: Konvergenz	48
9.2	Satz: Funktionalgleichung	48
9.3	Folgerungen	48
10	Metrische Räume	50
10.1	Definition	50
10.1.1	Hilfssatz	50
10.1.2	Komplexe Zahlen	51
10.1.3	Beispiel: Die metrischen Räume \mathbb{C}^n und \mathbb{R}^n	52
10.2	Konvergenz	53
10.2.1	Satz: Konvergenz im \mathbb{K}^n	54
10.3	Satz: Vollständigkeit des \mathbb{R}^n	54
10.4	Kugeln	54

10.4.1	Satz: Abgeschlossenheit & Konvergenz	55
10.4.2	Häufungswert im Metrischen Raum	55
11	Stetigkeit	56
11.1	Definition	56
11.1.1	Grundbegriffe	56
11.1.2	Stetigkeit	57
11.1.3	Satz: Folgenstetigkeit	58
11.2	Satz: Addition + Multiplikation von stetigen Funktionen	58
11.3	Satz: Stetigkeit der Komposition	59
12	Sätze über stetige Funktionen	60
12.1	Satz: Zwischenwertsatz	60
12.2	Folgerung	60
12.3	Satz vom Maximum	60
12.4	Folgenkompaktheit	61
12.4.1	Satz: Beschränktheit & Abgeschlossenheit \Leftrightarrow Folgenkompaktheit	61
12.5	Übertragung der Folgenkompaktheit	62
12.5.1	Korollar: Satz vom Maximum	62
12.5.2	Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit	62
12.6	Satz: Folgenkompaktheit + gleichmäßige Stetigkeit	62
13	Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen, Potenz, Logarithmus	64
13.1	Satz: Monotonie & Stetigkeit	64
13.2	Satz: Injektivität & Umkehrfunktion	64
13.2.1	Wurzelfunktion	65
13.2.2	Natürlicher Logarithmus	65
13.2.3	Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$: a^x	65
13.3	Satz: Funktionalgleichung	67
13.4	Abschluss	67
13.5	Grenzwert in Metrischen Räumen	68
14	Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen	69
14.1	Satz: Majorantenkriterium	69
14.2	Satz: Quotientenkriterium	69
14.2.1	Beispiel: Exponentialfunktion	69
14.2.2	Trigonometrische Funktionen	70
14.3	Satz: Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen	70
14.4	Satz: Additionstheoreme	71
14.5	Satz: Reihenentwicklung	71
14.6	Satz: Nullstelle von \cos	71
14.7	Hilfssatz: $\cos 2$	71
14.8	Hilfssatz: $\sin x > 0$ in $(0, 2]$	72
14.9	Hilfssatz: Monotonie von \cos in $[0, 2]$	72
14.9.1	Beweis Satz 14.6 & Definition von π	72
14.10	Satz: spezielle Werte der komplexen Exponentialfunktion	72
14.11	Folgerung: Periodizität	73
14.12	Folgerung: Nullstellen von \sin und \cos	73
14.12.1	(Co)Tangens	74
14.12.2	Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	74
14.13	Satz: Polardarstellung	74
14.14	Fundamentalsatz der Algebra	75
15	Differentiation	76
15.1	Satz: Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion	77
15.2	Folgerung: Differenzierbarkeit von \cos , \sin	77
15.3	Satz: Weierstraßsche Zerlegungsformel	78

15.4	Satz: Produkt-/Quotienten-/Summenregel	78
15.5	Satz: Kettenregel	79
15.6	Satz: Ableitung der Umkehrfunktion	80
15.7	Ableitungen höherer Ordnungen	81
16	Lokale Extrema, Mittelwertsatz	82
16.1	Satz: Ableitung an der Stelle des Extremums	82
16.2	Satz von Rolle	82
16.3	Folgerung: Mittelwertsatz	83
16.4	Folgerung: Monotonie	83
16.5	Folgerung: striktes Extrema	83
16.6	Folgerung: Verallgemeinerter Mittelwertsatz	84
16.7	Folgerung: Regel von de l'Hôpital	84
17	Das Riemann-Integral	86
17.1	Definition	86
17.1.1	Treppenfunktion	86
17.1.2	Integral	86
17.1.3	Satz: Linearität	87
17.1.4	Riemann-Integrierbarkeit	88
17.2	Satz: Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen	88
17.3	Satz: Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen	89
17.4	Satz: Riemann-Summen	90
17.5	Hilfssatz: Rechenregeln für Ober-/Unterintegrale	91
17.6	Satz: Linearität des Integrals	92
17.7	Folgerung: Positiv-/Negativteil	93
17.8	Satz: „Aufsplitten“ von Integralen	93
18	Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“	94
18.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I	94
18.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II	95
18.3	Satz: Substitutionsregel (Kettenregel rückwärts)	96
18.4	Satz: Partielle Integration	97
19	Uneigentliche Integrale	99
19.1	Satz: Integralvergleichskriterium für Reihen	100
19.2	Satz: (Euler'sche) Gamma-Funktion	100
20	Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen	102
20.1	Satz: Gleichmäßige Konvergenz + Stetigkeit	102
20.2	Satz: Konvergenzkriterium von Weierstraß	103
20.3	Potenzreihe	104
20.3.1	Satz: Konvergenzradius	104
20.4	Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral	105
20.5	Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation	106
20.6	Folgerung: Differentiation der Potenzreihe	106
20.7	Folgerung: beliebige Differenzierbarkeit der Potenzreihe	107
II	Analysis II	108
21	Taylor'sche Formel und Taylor-Reihe	109
21.1	Satz: Erweiterung der Weierstraß'schen Zerlegungsformel	109
21.2	Satz: Taylor'sche Formel	110
21.3	Folgerung: Polynom	110
21.4	Satz: Integralrestglied	111
21.5	Taylor-Reihe	111

21.6	Satz: Logarithmusreihe	112
21.7	Satz: Arcus-Tangens-Reihe	113
21.8	Satz: Binomische Reihe	113
21.9	Folgerung: Absolutbetrag	114
22	Topologie metrischer Räume, Kompaktheit	116
22.1	Satz: Eigenschaften offener Mengen	116
22.2	Komplement, Inneres, Rand, Abschluß	117
22.2.1	Satz: Eigenschaften	117
22.3	Kompaktheit	118
22.3.1	Satz: Kompaktheit & Folgenkompaktheit	118
22.4	Satz von Heine-Borel	119
23	Kurven im \mathbb{R}^n	120
23.1	Rektifizierbarkeit	121
23.1.1	Satz: Rektifizierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen	121
23.2	Hilfssatz: „Mittelwertsatz“	122
23.3	Parametertransformation	124
24	Partielle Ableitungen	125
24.1	Lemma von Schwarz	127
24.2	Folgerung: Vertauschen partieller Ableitungen	128
25	Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	131
25.1	Satz: Berechnung der Jacobi-Matrix	132
25.2	Satz: Totale Differenzierbarkeit	133
25.3	Satz: Kettenregel	134
26	Normierte Räume, lineare Abbildungen	137
26.1	Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen	138
26.2	Satz: Mittelwertsatz/Schranksatz	139
26.3	Satz: Konvexe Funktion	141
26.4	Folgerung	142
26.5	Satz: Höldersche Ungleichung	142
26.6	Satz: Minkowskische Ungleichung	143
27	Taylorformel, lokale Extrema	145
27.1	Multinomialtheorem	145
27.2	Hilfssatz	145
27.3	Satz: Taylorsche Formel	146
27.4	Folgerung: Restglied Taylorformel	147
27.5	Satz: Notwendiges Kriterium für Extremum	149
27.6	Satz: Hinreichende Kriterien für Extrema	150
28	Implizite Funktionen, 1. Auflösungsatz	153
28.1	Satz: Banach'scher Fixpunktsatz	153
28.2	Satz über implizite Funktionen, 1. Auflösungsatz	154
28.3	Satz: Differenzierbarkeit impliziter Funktionen	157
28.4	Satz: Stetige Differenzierbarkeit impliziter Funktionen (Zusatz zu 28.2)	158
29	Lokale Invertierbarkeit, Lagrange-Multiplikatoren	159
29.1	Satz: Satz der lokalen Invertierbarkeit, 2. Auflösungsatz	159
29.2	Satz: Notwendige Bedingung für lokales Extremum unter Nebenbedingung	160
31	Integral von Treppenfunktionen im \mathbb{R}^n	163
31.1	Satz: Eigenschaften des Integrals	164
31.2	Folgerung: Positivität des Integrals	166

31.3	Satz: Weitere Treppenfunktionen	166
31.4	Hilfssatz	166
32	Das n-dimensionale Riemann-Integral	167
32.1	Hilfssatz: Rechenregeln Ober- und Unterintegral	167
32.2	Satz: Linearität des Riemann-Integrals	168
32.3	Satz: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium	168
32.4	Satz: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen	168
32.4.1	Kompakte Träger	169
32.5	Satz: Fundamentale Ungleichung	169
32.5.1	Jordan-Messbarkeit	170
33	Satz von Fubini, Berechnung von Integralen	172
33.1	Satz von Fubini	172
33.2	Folgerung: Berechnung von Integralen	172
33.3	Folgerung: Prinzip von Cavalieri	173
33.4	Satz: Stetigkeit bei iterierten Integralen	174
33.5	Satz: Jordan-Messbarkeit	174
33.6	Hilfssatz: Jordan-Messbarkeit kartesisches Produkt	174
34	Transformationsformel	180
34.1	Satz: Urform der Transformationsformel	180
34.2	Satz: Transformationsformel	181
34.3	Satz: Riemann-Integrierbarkeit auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$	184
34.4	Beweis: Satz 34.2	185
35	Beweis der Transformationsformel	186
35.1	Hilfssatz: Transformationsformel auf Produkt von Diffeomorphismen	186
35.2	Hilfssatz: Induktion	187
35.3	Satz: Zerlegung des Diffeomorphismus	187
35.4	Satz: Partition der Eins (leichte Form)	188
35.5	Beweis: Satz 34.1	189
36	Fourier-Reihen	190
36.1	Hilfssatz: Orthogonalitätsrelation	192
36.2	Satz: Dirichlet-Kerne	193
36.3	Satz: Cesàro-Mittel	194
36.4	Satz von Fejér	195
36.5	Satz: Approximationssatz von Weierstraß	196
36.5.1	2-Norm	196
36.6	Hilfssatz	197
36.7	Hilfssatz	197
36.8	Satz: Parsevalsche Gleichung	197

Teil I
Analysis I

1

Natürliche Zahlen + Induktion

1.1 Peano-Axiome(1889)

Peano (1858-1932)/Dedekind (1831-1916)

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} bilden eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist genau ein $n' \in \mathbb{N}$ zugeordnet, genannt der Nachfolger von n .
2. Es gibt ein Element in \mathbb{N} – von uns bezeichnet mit 1 –, das nicht Nachfolger ist.
3. Sind $m, n \in \mathbb{N}$, ($m \neq n$), dann gilt $n' \neq m'$.
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$ und für alle $n \in M$ gilt $n' \in M$, dann ist $M = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)

Es gilt: Zwei Mengen mit den Eigenschaften 1 bis 4 sind im wesentlichen gleich.

1.1.1 Addition

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren (für $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}k + 1 &:= k' \\k + n' &:= (k + n)' \\ \Rightarrow k + 2 &= (k + 1)' = (k')' \\k + 3 &= (k + 2)' = ((k')')' \\k + 4 &= (k + 3)' = (((k')')')' \\k + 5 &= (k + 4)' = (((((k')')')')')')'\end{aligned}$$

(rekursive Definition)

1.1.2 Satz: Assoziativität der Addition

Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(k + m) + n = k + (m + n)$

Beweis:

- Sei $k, m \in \mathbb{N}$. Sei

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid (k + m) + n = k + (m + n)\}$$

Dann gilt $1 \in M$, da:

$$\begin{aligned}(k + m) + 1 &= (k + m)' \\ &= k + m' \\ &= k + (m + 1)\end{aligned}$$

- Aus $n \in M$ folgt $n' \in M$, da: laut Voraussetzung bedeutet $n \in M: (k+m)+n = k+(m+n)$.
Daher:

$$\begin{aligned}
 (k+m) + n' &= ((k+m) + n)' \\
 &\stackrel{IV}{=} (k + (m+n))' \\
 &= k + (m+n)' \\
 &= k + (m+n')
 \end{aligned}$$

Also $n' \in M$ und damit nach Axiom 4: $M = \mathbb{N}$.

1.1.3 Kommutativität der Addition

ähnlich wie Addition zu beweisen (siehe Übung 1)

Für alle $m, n \in \mathbb{N}: m + n = n + m$

1.1.4 Multiplikation

Definition: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 k \cdot 1 &:= k \\
 k \cdot n' &:= k \cdot n + k
 \end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Daraus folgen die üblichen Rechenregeln, z.B. Distributivgesetz:

$$k \cdot (n + m) = k \cdot n + m \cdot k$$

1.1.5 Relation

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir definieren: $m \leq n$ wenn $m = n$ oder wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $m + k = n$ (auch $n \geq m$).

1.2 Prinzip der vollständigen Induktion

außer $\mathbb{N}: \mathbb{N}_0 := 0, 1, 2, \dots$

Um eine Aussage $A(n)$ (von n abhängig) für alle $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) zu beweisen, genügt es zu zeigen:

1. $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)
2. Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig (Induktionsvoraussetzung), so ist auch $A(n+1)$ richtig. (Induktionsschritt)

Beweis mit Hilfe des Induktionsaxioms: Setze $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A(n_0 + n) \text{ richtig}\}$
 \rightarrow Dann $M = \mathbb{N}_0$ nach Induktionsaxiom

1.2.1 Satz: Gauß'sche Summenformel

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k &:= 1 + 2 + \dots + n \\ &:= 0 \quad (n=0) \\ \sum_{k=1}^{n'} k &:= \sum_{k=1}^n k + n' \end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 0$ l.S. = 0 r.S. = $0 \cdot 1 = 0$
- Induktionsschritt: $n \rightarrow n' (= n + 1)$

Induktionsvoraussetzung:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n \cdot (n+1)$$

dann:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n k + 2 \cdot (n+1) \\ &= n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \end{aligned}$$

1.3 Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert (rekursive Definition):

$$\begin{aligned} n! &:= \prod_{k=1}^n k = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \\ (n+1)! &:= n! \cdot (n+1) \\ 0! &:= 1 \end{aligned}$$

1.3.1 Satz: Permutationen

Die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen) einer n -elementigen Menge ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 1$ – logischerweise 1 Anordnung
- Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: n -elementige Mengen haben $n!$ Anordnungen

Anordnungen einer $(n+1)$ -elementigen Menge $1, 2, \dots, n+1$ zerfallen in $(n+1)$ disjunkte Teilmengen K_1, K_2, \dots, K_{n+1} :

$K_k :=$ Menge der Permutationen mit dem Element k an 1. Stelle

In K_k liegen $n!$ Elemente (nach Induktionsvoraussetzung)

Also Gesamtzahl: $n! \cdot (n+1) \stackrel{\text{Def.}}{=} (n+1)!$

1.4 Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &:= \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)}{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ \binom{n}{0} &:= 1\end{aligned}$$

Wir setzen dabei voraus, dass wir mit reellen Zahlen rechnen können. Dass alle $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ sind, folgt aus Hilfssatz 1.4.1.

1.4.1 Hilfssatz

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis siehe Übung 2

1.5 Satz: Binomischer Lehrsatz

Seien x, y reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$
$$0^0 := 1$$

für x reell: $x^0 := 1$ für $n \in \mathbb{N}$: $x^{n+1} := x^n \cdot x$

Beweis: Induktion nach n

- Induktionsanfang: $n = 0$, $(x+y)^0 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$
- Induktionsschritt:
 - Induktionsvoraussetzung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

– Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) \\
 &\stackrel{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \right) \cdot (x+y) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} \\
 &\stackrel{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n-l+1} \cdot y^l \\
 &\stackrel{\text{ausklammern}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + y^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $(x+y)^0 = 1$
- $(x+y)^1 = x+y$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
- usw. (Faktoren zu finden im Pascal'schen Zahlendreieck)

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & &
 \end{array}$$

→ Folgerungen aus dem bin. Lehrsatz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

1.6 Mengen

Seien A, B, C Mengen:

- $A \subseteq B : \Leftrightarrow \langle x \in A \Rightarrow x \in B \rangle$: A Teilmenge von B ; auch $B \supseteq A$: B Obermenge von A
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$: Vereinigung
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$: Schnittmenge
- $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ Differenzmenge
- $A^{c_B} := B \setminus A$ Komplement
- $A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ kartesisches Produkt

Regeln:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Distributivgesetz I
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, Distributivgesetz II
3. $(A^{c_B})^{c_B} = A$
4. $A \setminus B = A \cap B^{c_C}$

Nachweis von Distributivgesetz I:

- Zeige „ \subseteq “: Sei $x \in A \cap (B \cup C)$, dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$
 - Fall 1: $x \in B$: $x \in (A \cap B) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - Fall 2: $x \in C$: $x \in (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Zeige „ \supseteq “: $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap B$ und $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap C$, daraus folgt: $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Aus „ \subseteq “ und „ \supseteq “ folgt „ $=$ “.

1.7 Abbildungen

- $f: A \rightarrow B$ bedeutet: Jedem Element $a \in A$ ist genau ein Element $f(a) \in B$ zugeordnet. Elementweise: $a \mapsto f(a)$. f heißt Abbildung (Funktion) von A nach B
- Bezeichnungen: $A \dots$ Definitionsmenge (Definitionsbereich), $B \dots$ Zielmenge (Wertevorrat), $f(A) \dots$ Wertebereich
- für $M \subseteq A$: $f(M) := \{f(a) \mid a \in M\} \dots$ Bild von M
- für $N \subseteq B$: $f^{-1}(N) := \{a \in A \mid f(a) \in N\} \dots$ Urbild von N
- f injektiv: Aus $a_1, a_2 \in A$, $(a_1 \neq a_2)$ folgt $f(a_1) \neq f(a_2)$
- f surjektiv: $f(A) = B$

- f bijektiv: f injektiv und surjektiv
 → Umkehrabbildung: $f^{-1}: B \rightarrow A \quad f^{-1}(b) := a, \text{ falls } b = f(a)$
- Für $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ist

$$f(x_1, \dots, x_n) := f((x_1, \dots, x_n))$$

$$f(x_1, \dots, x_i, \cdot, x_{i+2}, \dots, x_n) := (x \mapsto f(x_1, \dots, x_i, x, x_{i+2}, \dots, x_n))$$

Beispiele:

1. • Sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, also $n \rightarrow n'$ (Nachfolgerabbildung, Peano-Axiom 1)
 - $1 \notin \varphi(\mathbb{N})$ (Peano-Axiom 2)
 - φ ist injektiv (Peano-Axiom 3)
 - Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$, $\varphi(M) \subseteq M$, dann $M = \mathbb{N}$. (Peano-Axiom 4)
 - Damit genauer: Natürliche Zahlen sind $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ [Eigenbemerkung (Grundbereich M , Konstante, Abbildung) = Peano-Struktur]

2. Permutationen von $\{1, \dots, n\}$:

$$\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

sind bijektiv.

3. Eine Menge M hat n Elemente: Es gibt $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ ist bijektiv
4. Sei A, B Mengen und $b \in B$. Dann ist die konstante Funktion

$$\text{const } b: A \rightarrow B$$

definiert durch

$$(\text{const } b)(x) := b$$

1.8 Satz: Wohlordnungssatz

Jede nichtleere Teilmenge M von \mathbb{N} besitzt ein Minimum (d.h. $m \in M$ mit: $m \leq n$ für alle $n \in M$).

Beweis durch Widerspruch:

- Vorbemerkung:
 Sind $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $k \neq m$, dann gilt $k + 1 \leq m$.

Beweis dazu:

- Es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $k + n = m$ (laut Definition). Ist $n = 1$, so folgt $k + 1 = m \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} k + 1 \leq m$.
 Ist $n \neq 1$, so gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $n = l + 1$, daher $k + l + 1 = m$, also $(k + 1) + l = m$, also $k + 1 \leq m$.

- Beweis:
 Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Annahme: M hat kein Minimum. Definiere

$$L := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } m \in M \text{ gilt } k \leq m\}$$

Dann $L \cap M = \emptyset$, denn $m \in L \cap M$ wäre ein Minimum von M . Wir zeigen nun, dass $L = \mathbb{N}$ (Axiom 4):

- $1 \in L$ (siehe Aufgabe 4 Übung 1): $1 \leq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$
- Sei $k \in L$, sei $m \in M$. Dann $k \neq m$ und $k \leq m$, damit $k + 1 \leq m$ (s. Vorbemerkung).
Somit $k + 1 \in L$.

Aus $L = \mathbb{N}$ und $L \cap M = \emptyset$ folgt, dass $M = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist obige Annahme nicht zutreffend.

Bemerkung zur Logik des Widerspruchsbeweises:

- Seien A, B Aussagen. Man will zeigen: Aus A folgt B .
- Dazu äquivalent: Aus $\text{non } B$ folgt $\text{non } A$. Oder gleichzeitiges Gelten von A und $\text{non } B$ nicht möglich. („tertium non datur“)

Bemerkung: Aus \mathbb{N} kann man durch mehrmalige Erweiterungen die reellen Zahlen konstruieren:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

2

Körperaxiome der reellen Zahlen

\mathbb{R} bezeichne die Menge der reellen Zahlen. (Genauer: Sei \mathbb{R} eine Menge, die den Axiomen §2-4 genügt- Dann ist \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen.)

2.1 Axiome der Addition

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Summe $x + y \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Addition) 1: Assoziativgesetz (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

- Körperaxiom (Addition) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$)

$$x + y = y + x$$

- Körperaxiom (Addition) 3: Existenz der Null – Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Körperaxiom (Addition) 4: Existenz des Negativen – Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreibt man

$$x - y := x + (-y)$$

2.1.1 Folgerungen

1. 0 ist eindeutig

Beweis: Aus $0' \in \mathbb{R}$ und $0 + 0' = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 = 0 + 0' \\ &= 0 \quad \backslash \end{aligned}$$

2. Negatives ist eindeutig.

Beweis: Aus $x + y = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + (-x)) \\ &= (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) \\ &= 0 + (-x) = (-x) + 0 = -x \quad \backslash \end{aligned}$$

3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ (eindeutig) mit $a + x = b$ und zwar $x = b + (-a) =: b - a$.

Beweis: $x = b - a$ erfüllt Behauptung:

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= a + (b + (-a)) = (a + b) + (-a) \\ &= (b + a) + (-a) = b + 0 = b \quad \backslash \backslash \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Aus $a + y = b$ folgt:

$$\begin{aligned} y &= y + (a + (-a)) = (y + a) + (-a) \\ &= (a + y) + (-a) = b + (-a) = b - a \quad \backslash \backslash \end{aligned}$$

4. $-0 = 0$

Beweis:

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$$

5. Für alle $x \in \mathbb{R}$: $-(-x) = x$

Beweis:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

Damit ist x das Negative zu $-x$.

6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $-(x + y) = -x - y$

Beweis:

$$\begin{aligned} (x + y) + (-x - y) &= (x + y) + ((-x) + (-y)) \\ &= (x + (-x)) + (y + (-y)) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad \backslash \backslash \end{aligned}$$

2.2 Axiome der Multiplikation

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist das Produkt $x \cdot y := xy \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Multiplikation) 1: Assoziativgesetz (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$):

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$):

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 3: Existenz der Eins: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, sodass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Körperaxiom (Multiplikation) 4: Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit: $x \cdot x^{-1} = 1$.

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, setzt man

$$\frac{x}{y} := (x : y) := x/y := x \cdot y^{-1}$$

2.2.1 Folgerungen

Beweise entsprechend Folgerungen 2.1

1. 1 ist eindeutig.
2. Inverses ist eindeutig.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt, mit $a \cdot x = b$ und zwar $x = \frac{b}{a}$.
4. $1^{-1} = 1$
5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$) ist x Inverses zu x^{-1} .
6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0, y \neq 0$) ist das Produkt $x^{-1} \cdot y^{-1}$ Inverses zu $x \cdot y$.

2.3 Axiom der Distributivität

Körperaxiom (Distributivität): Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

2.3.1 Folgerungen

1. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Klar durch Kommutativität der Multiplikation ...

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 0 = 0$ (Insbesondere: 0 besitzt kein Inverses.)

Beweis: mit Folgerung 2.1.1.3 (Schritt 3-4)

$$\begin{aligned} x \cdot 0 + x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) \\ &= x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

3. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Beweis: Sei $y = 0$. Ist $x \neq 0$, dann

$$\begin{aligned} y &= (x^{-1} \cdot x) \cdot y \\ &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) \\ &= x^{-1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Entsprechend: $y \neq 0$ impliziert $x = 0$

→ Ist $x = 0$ oder $y = 0$, dann $x \cdot y = 0$ nach 2.3.1.2

4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(-x) \cdot y = -x \cdot y := -(x \cdot y)$$

Insbesondere gilt: $(-1) \cdot x = -x$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \cdot y + (-x) \cdot y &= (x + (-x)) \cdot y \\ &= 0 \cdot y = 0 \end{aligned}$$

Aus Folgerung 2.3.1.2: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$

5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

Bemerkungen:

1. Allgemeines Assoziativgesetz:

Sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) so definiert man:

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n := (\dots((x_1 + x_2) + x_3) + \dots + x_n)$$

rekursive Definition:

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n$$

Aus Assoziativgesetz folgt: Jede andere Klammerung führt zum gleichen Ergebnis.

Entsprechend:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{k=1}^n x_k$$

2. Allgemeines Kommutativgesetz:

In Summen kann man Summanden umordnen ohne das Ergebnis zu ändern.

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

Entsprechend für Produkte

3. Allgemeines Distributivgesetz:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j$$

4. Umordnung

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{ij}$$

Induktionsanfang:

$$\sum_{i=0}^0 \sum_{j=0}^i a_{ij} = \sum_{j=0}^0 a_{0j} = a_{00} = \sum_{i=0}^0 a_{i0} = \sum_{j=0}^0 \sum_{i=0}^j a_{ij}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^i a_{ij} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} \stackrel{IV}{=} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{ij} \right) + \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^j a_{ij}$$

Eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$, \cdot , die den Axiomen (KA 1-4), (KM 1-4) sowie (KD) genügt, nennt man einen Körper. Genauer: $(K, +, \cdot)$. Bisher bewiesene Eigenschaften gelten in jedem Körper.

3

Ordnungsaxiome

3.1 Ordnungsaxiome

In \mathbb{R} sind gewisse Elemente als positiv – geschrieben als $x > 0$ – ausgezeichnet, sodass gilt:

- (O.1): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen: $x > 0$, $x = 0$ oder $-x > 0$.
- (O.2): Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x + y > 0$.
- (O.3): Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x \cdot y > 0$.

Bezeichnungen:

- $x > y : \Leftrightarrow x - y > 0$
- $x \geq y : \Leftrightarrow x > y \vee x = y$
- $x < y : \Leftrightarrow y > x$
- $x \leq y : \Leftrightarrow y \geq x$

Bezeichnungen: Für $a, b \in \mathbb{R}$, ($a \leq b$):

- abgeschlossenes Intervall:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

- offenes Intervall:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$

- halboffenes Intervall:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

- uneigentliche Intervalle:

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R}; a \geq x\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R}; a > x\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

3.1.1 Folgerungen

1. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

Beweis:

$$\begin{aligned} x < 0 &\Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow 0 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow -x > 0 \quad \\\ \end{aligned}$$

2. $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)

Beweis:

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x > 0 & y < z &\Leftrightarrow z - y > 0 \\ \Rightarrow (y - x) + (z - y) &\stackrel{O.2}{>} 0 \\ &\Leftrightarrow z - x > 0 \\ x &< z \quad \\\ \end{aligned}$$

3. $x, y, a \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x + a < y + a$

Beweis:

$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow (y + a) - (x + a) > 0 \quad \\\$$

4. $x < y, x_1 < y_1 \Rightarrow x + x_1 < y + y_1$

Beweis: mit 2) und 3)

$$x < y \Leftrightarrow x + x_1 < y + x_1 < y + y_1 \quad \\\$$

5. $x < y, a > 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

Beweis:

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \stackrel{O.3}{\Rightarrow} a \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x < a \cdot y \quad \\\$$

6. $x < y, a < 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$

Beweis:

$$y - x > 0, -a > 0 \stackrel{O.3}{\Rightarrow} (-a) \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x > a \cdot y \quad \\\$$

7. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ Insbesondere: $1 = 1^2 > 0$

8. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

Beweis: $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2$. Dann (O.3) bzw. 3.1.1.6

9. $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Beweis: $x \cdot y > 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y)^{-1} > 0$. Dann $0 < x < y$ mit $x^{-1} \cdot y^{-1}$ durchmultiplizieren und 3.1.1.5 benutzen. $\\\$

10. Gelten $x \geq 0$ und $x \leq 0$, dann $x = 0$.

Beweis: Nach (O.1) gilt genau eine der Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$. Wegen $x \geq 0$ ist $x < 0$ ausgeschlossen und wegen $x \leq 0$ ist $x > 0$ ausgeschlossen. Also $x = 0$. $\\\$

11. $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

Beweis:

$$\begin{array}{ll} x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 & y \leq x \Leftrightarrow x - y \geq 0 \\ \stackrel{3.1.1,10}{\Rightarrow} y - x = 0 & \quad \quad \quad \backslash \end{array}$$

12. Ist $x \in \mathbb{R}$ so, dass $x \leq y$ für alle $y > 0$, so gilt $x \leq 0$.

Beweis durch Kontraposition ($A \Rightarrow B$ beweist man durch „non $B \Rightarrow$ non A):
 Angenommen $x > 0$. Dann $\frac{x}{1+1} > 0$ nach 3.1.1.8 bzw (O.3), daher $x \leq \frac{x}{1+1}$ (Voraussetzung).
 Also $(1+1) \cdot x \leq x$ (5), $x \leq 0$ (3) – im Widerspruch zu $x > 0$. $\quad \backslash \backslash$

3.2 Satz: \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R}

- Nachfolgerabbildung ist Addition von 1, also $n \mapsto n' = n \mapsto n + 1$
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn gilt: $\forall x \in M : x + 1 \in M$.
- Sei $\mathcal{M} := \{M \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in M, M \text{ induktiv}\}$. Dann erfüllt

$$N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{m \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{M} : m \in M\}$$

die Peano-Axiome mit Nachfolgerabbildung $\varphi(n) = n + 1$.

- Beweis:
 - $\mathcal{M} \neq \emptyset$, denn $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$. Sei $n \in N$. Für $M \in \mathcal{M}$ ist dann $n \in M$, daher auch $n + 1 \in M$ (M induktiv). Damit $n + 1 \in N$.
 Wegen $1 \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ gilt $1 \in N$. Da die Menge $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\} \in \mathcal{M}$ ist, folgt $0 \notin N$. Also ist 1 nicht Nachfolger. Sind $m, n \in N (m \neq n)$, so folgt $m + 1 \neq n + 1$.
 - Sei $M \subseteq N, 1 \in M$, für alle $n \in M$ sei $n + 1 \in M$ (also M induktiv). Aus der Definition von N folgt $N \subseteq M$. Also $M = N$.

- Bemerkungen:

– Im Folgenden: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Satz 3.2. Dazu:

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

– Ein Körper mit Teilmenge positiver Elemente mit (O1-3) heißt ein geordneter Körper.

Bsp.: \mathbb{R}, \mathbb{Q}

ohne Ordnung: \mathbb{F}_2, \mathbb{C} (denn $i^2 = -1$)

3.3 Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion/Signumfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag (Absolutbetrag) von x und

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

das Vorzeichen von x . Es gilt:

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$$

3.3.1 Folgerungen

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (falls $y \neq 0$)

Beweis: Aus $x = \frac{x}{y} \cdot y$ folgt mit 3): $|x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$.

3.4 Satz: Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Damit auch $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$ \ \ \

Folgerung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis:

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y| - |y| \leq |x - y|$$

$$\text{Ebenso: } |y| - |x| \leq |y - x| (= |x - y|)$$

$$\Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

3.5 Archimedisches Axiom

- (O.4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x \geq y$. (Archimedisches Axiom)
- Bemerkung: Archimedisches geordneter Körper: geordneter Körper mit (O.4)
- Folgerungen:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

Beweis: Nach 1. existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{n}$.

4

Folgen und Vollständigkeitsaxiom

\mathbb{Q} erfüllt bisherige Axiome. Daher ist die Existenz von $a > 0$ mit $a^2 = 2$ nicht beweisbar mit bisherigen Axiomen.

→ Es gibt nicht $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Beweis durch Widerspruch:

- Annahme: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Dabei kann man annehmen, dass eine der beiden Zahlen p oder q ungerade ist. Dann ist $p^2 = 2 \cdot q^2$, also p gerade. p lässt sich als $p = 2 \cdot p'$ darstellen. Also $4p'^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$. Damit ist auch q gerade.

4.1 Folgen und Konvergenz

4.1.1 Folge

Sei R eine Menge. Eine Folge in R ist eine Abbildung $a: N \rightarrow R$ mit $N \subseteq \mathbb{Z}$.

- Jedem $n \in N$ ist $a(n) \in R$ zugeordnet.
- Statt $a(n)$ schreibt man a_n .
- Schreibweisen: $(a_n)_{n \in N} \subseteq R$ oder $(a_n; n \in N) \subseteq R$
- Zahlreiche Verkürzungen, wenn aus dem Kontext klar ist was gemeint ist: $(a_n)_{n \in N}$, $(a_n)_n$, (a_n)
- Wenn N endlich ist schreibe auch: (a_1, \dots, a_n)
- Wenn $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ für $n_0 \in \mathbb{Z}$, dann schreibe: $(a_n)_{n \geq n_0} \subseteq R$

Folge reeller Zahlen

- $R = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{N}$
- Beispiele:
 1. $a \in \mathbb{R}$, $a_n := a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die konstante Folge
 2. $a_n := (-1)^n$, eine alternierende Folge
 3. $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ (rekursiv), $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

Folge der Fibonacci-Zahlen (Fibonacci = Leonardo de Pisa (1170-1250))

4.1.2 Konvergenz

- Sei a_n eine Folge in \mathbb{R} . Sie heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Bezeichnungen:

- $\Leftrightarrow: a_n \longrightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$
- $\Leftrightarrow: a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
- $\Leftrightarrow: a$ ist Grenzwert der Folge
- $\Leftrightarrow: a$ ist Limes der Folge

- Schreibweise: Für eine Folge in \mathbb{R} bedeutet der Ausdruck:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

dass

$$a_n \longrightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$$

gilt und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$$

definiert wird

- Andere Formulierung: In jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle Terme der Folge. (ε -Umgebung: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$; fast alle: alle außer endlich vielen)
- (a_n) heißt Nullfolge, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (a_n) heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \longrightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$
- (a_n) heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Sie heißt divergent (oder uneigentlich konvergent) gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn:

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \text{ (bzw. } a_n \leq K)$$

für alle $n \geq N$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (bzw. } -\infty) \quad (\pm\infty \notin \mathbb{R})$$

- Beispiele:

1. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$: $|a_n - a| = |0| < \varepsilon$ für alle $n \geq 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 3.6.1.2 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

3. $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Beweis: Annahme: konvergent. Sei a Grenzwert.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= | -(-1)^n - (-1)^n | \\ &= | -((-1)^n + (-1)^n) | \\ &= |2| \cdot |(-1)^n| \\ &\stackrel{\text{Induktion}}{=} |2| \cdot |(-1)|^n \\ &= 2 \cdot |1|^n = 2 \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$. Damit für $n \geq N$:

$$|a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 2$$

4. Fibonacci-Zahl a_n . Mit Induktion: $a_n \geq n$. Damit (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ .

4.1.3 Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei (a_n) konvergent: $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = a'$. Dann $a = a'$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.
Es gibt $N' \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq \max\{N, N'\}$ folgt:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $|a - a'| < \varepsilon$. Aus Folgerung 3.1.1.10 folgt: $|a - a'| = 0$, $a = a'$.

Sei (a_n) konvergent mit eindeutigem Grenzwert a . Dann definiere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$$

4.2 Folgerungen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in \mathbb{R} : $a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow b$.

Dann:

1. $a_n + b_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty)$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt $N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N' : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

$$\begin{aligned} |(a + b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |(a - a_n)| + |(b - b_n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \backslash \end{aligned}$$

2. $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b \quad (n \rightarrow \infty)$

Beweis:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \end{aligned}$$

- Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |b_n - b| < \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \underbrace{\frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)}}_{< 1} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &< |a_n| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\ &\leq (|a| + |a_n - a|) \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left(\underbrace{\frac{|a| + \overbrace{|a_n - a|}^{< \varepsilon}}{|a| + \varepsilon}}_{< 1} + \underbrace{\frac{|b|}{(|b| + 1)}}_{< 1} \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1 + 1) = \varepsilon \quad \backslash \backslash \end{aligned}$$

3. $a_n - b_n \rightarrow a - b$ ($n \rightarrow \infty$)

Beweis: $a_n + (-1) \cdot b_n \rightarrow a + (-1) \cdot b$ nach 1. und 2. $\backslash \backslash$

4. Ist $b \neq 0$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Es gilt:

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad \left(\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0} \right)$$

Beweis:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{1}{2} \cdot |b|$$

Für $n \geq n_0$ folgt:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{1}{2} \cdot |b| > 0$$

Genügt zu zeigen: $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ (wegen 2.) Für $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b \cdot b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \rightarrow 0$$

Daraus folgt: $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$. (Vgl. Folgerung 4.2.8) $\backslash \backslash$

5. Aus $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $a \leq 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für $n \geq N$ folgt:

$$a = (a - a_n) + a_n \leq |a - a_n| + a_n < \varepsilon + 0 = 0$$

d.h. $a < \varepsilon$. Daher $a \leq 0$ (Folg. 3.1.1.11)

6. Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \leq b$.

Beweis: $a_n - b_n \leq 0$. Dann 5. $\backslash \backslash$

7. Sind $A, B \in \mathbb{R}$, $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $A \leq a \leq B$.

Beweis: mit 6. mit konst. Folgen $(A)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B)_{n \in \mathbb{N}}$ $\backslash \backslash$

8. Sei (a_n) Nullfolge, (c_n) in \mathbb{R} mit $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann (c_n) Nullfolge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt: $|c_n - 0| = |c_n| \leq a_n < \varepsilon$

• Beispiel:

$$a_n = \frac{n^2 - 13}{5 \cdot n^2 + n} \longrightarrow \frac{1}{5}$$

Nämlich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 - \frac{13}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} \\ b_n &:= 1 - \frac{13}{n^2} \longrightarrow 1 && 4.2.1, 4.2.2. \\ c_n &:= 5 + \frac{1}{n} \longrightarrow 5 && 4.2.1 \end{aligned}$$

Dann 4.2.4:

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{5}$$

4.3 Cauchy-Folge

Eine Folge (a_n) in \mathbb{R} heißt Cauchy-Folge

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(A.L. Cauchy (1789-1837))

4.3.1 Satz: Konvergenz \Rightarrow Cauchy-Folge

Sei (a_n) eine konvergente Folge in \mathbb{R} . Dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ folgt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.3.2 Vollständigkeitsaxiom

Vollständigkeitsaxiom: (V) Jede Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist konvergent.

Bemerkungen:

- Damit alle Axiome für \mathbb{R} formuliert. In \mathbb{Q} ist nicht jede Cauchy-Folge konvergent.
- Axiome für \mathbb{R} (Zusammenfassung): Körperaxiome, Ordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom. Ein Körper mit diesen Axiomen heißt vollständiger archimedisch geordneter Körper. Je zwei solche Strukturen sind isomorph (ohne Beweis). Also \mathbb{R} eindeutig bestimmt.

4.4 Beschränktheit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

- M nach oben beschränkt:

$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq K$$
 K heißt obere Schranke von M .
- M nach unten beschränkt:

$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \geq K$$
 K heißt untere Schranke von M .
- M beschränkt:

$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : |x| \leq K$$
 (M nach oben und nach unten beschränkt)
- Eine Folge (a_n) heißt beschränkt (nach oben/unten), wenn dies für die Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ gilt.

Bemerkungen:

1. Jede endliche Menge ist beschränkt.
2. Sind M_1, M_2 beschränkt, dann auch $M_1 \cup M_2$.

4.4.1 Satz: Konvergenz \Rightarrow Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

- Die Folge (a_n) sei konvergent: $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$). Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < 1$.
 Für $n \geq N$:

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$
 (Also beschränkt)
- $\{a_n; n < N\}$ endlich, also beschränkt.
- Damit $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid n < N\} \cup \{a_n; n \geq N\}$ beschränkt nach Bemerkung 2.

Bemerkung: Umkehrung ist falsch! (z.B. $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$)

Beispiel: $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $b \in \mathbb{R}$.

1. $b > 1$: Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$.

Beweis: Sei $K > 0$. Nach bin. Lehrsatz:

$$b^n = (1 + (b - 1))^n \geq 1 + n \cdot (b - 1)$$

Nach (O.4) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 \cdot (b - 1) \geq K$. Damit für $n \geq n_0$:

$$b^n \geq 1 + n \cdot (b - 1) \geq n_0 \cdot (b - 1) \geq K$$

2. $0 < b < 1$: Dann $\lim b^n = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 1. gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\Leftrightarrow \varepsilon \geq b^n = |b^n - 0|)$$

für alle $n \geq n_0$.

3. Sei $|b| < 1$. Dann $\lim b^n = 0$.

Beweis: Klar für $b = 0$. Sonst $|b^n| = |b|^n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$. Daraus $b^n \rightarrow 0$. (Folg. 4.2.8)

4. $b = 1$: $\lim b_n = 1$

5. $b = -1$: (b_n) divergent.

6. $b < -1$: (b_n) divergent, da unbeschränkt (nicht bestimmt divergent).

5

Supremum von Mengen, Satz von Bolzano-Weierstraß

5.1 Supremum & Infimum

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, nach oben beschränkt.
- $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M $:\Leftrightarrow s$ ist die kleinste obere Schranke ($\Leftrightarrow s$ obere Schranke und für jede obere Schranke K gilt: $s \leq K$.)
- Bezeichnung: $s = \sup M$
- Falls M nicht nach oben beschränkt ist: $\sup M := \infty$
- Ist $s = \sup M \in M$ so heißt s auch Maximum: $s = \max M$
- Entsprechend: Infimum ($\inf M$), $\inf M = -\infty$, $\min M$ (Minimum)
- Beispiel: $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = 1$ (nicht Maximum!)

5.1.1 Satz: Existenz des Supremums

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, M nach oben beschränkt. Dann existiert $\sup M$.

Beweis:

1. rekursive Definition von Folgen (u_n) und (K_n) , wobei u_n keine oberen Schranken und K_n obere Schranken sind und $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq K_1 \leq K_0$. Es soll gelten:

$$K_n - u_n = 2^{-n} \cdot (K_0 - u_0)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Anfang: u_0 nicht obere Schranke, K_0 obere Schranke.

Rekursionschritt: Seien u_0, \dots, u_n und K_0, \dots, K_n gewählt.

Ist $\frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ obere Schranke, dann $K_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ und $u_{n+1} = u_n$. Sonst: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ und $K_{n+1} = K_n$.

Damit $u_n \leq u_{n+1} \leq K_{n+1} \leq K_n$. Es gilt:

$$K_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n - u_n) = 2^{-(n+1)} \cdot (K_0 - u_0)$$

2. (u_n) ist Cauchyfolge:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} \cdot (K_0 - u_0) < \varepsilon$.

- Für $m \geq n \geq N$ folgt:

$$|u_m - u_n| = u_m - u_n \leq K_N - u_N = 2^{-N} \cdot (K_0 - u_0) < \varepsilon$$

- Daraus folgt:

$$\exists s := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (K_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$$

3. s ist Supremum von M :

- (a) s ist obere Schranke: Sei $x \in M$. Dann $x \leq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \rightarrow \infty$: $x \leq s$.
- (b) s kleinste obere Schranke: Sei K obere Schranke. Dann $u_n < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst u_n obere Schranke). Für $n \rightarrow \infty$: $s \leq K$.

Bemerkung: Archimedisches Axiom + Vollständigkeitsaxiom \Leftrightarrow Existenz von $\sup M$ für alle nach oben beschränkten Mengen

5.2 Folgerung: Eindeutigkeit der Wurzel

Seien $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eindeutig bestimmtes b mit $b \geq 0$ mit $b^n = a$.

Bezeichnung: $b =: \sqrt[n]{a} =: a^{\frac{1}{n}}$

Beweis: Klar für $a = 0$

1. Seien $x, y \geq 0$. Dann

$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$$

(Beweis siehe Übung 4). Daraus folgt Eindeutigkeit.

2. Existenz: $b := \sup\{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ (existiert, denn $\max\{a, 1\}$ obere Schranke).

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $b + \frac{1}{k} \notin \{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ (da b obere Schranke ist). Daher

$$a < \left(b + \frac{1}{k}\right)^n \rightarrow b^n \quad (k \rightarrow \infty)$$

Also $a \leq b^n$. Insbesondere $b > 0$.

Ist $0 < x < b$, so gibt es $y \in \{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ mit $x < y$, also gilt $x^n < y^n \leq a$. Damit:

$$a > \left(b \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^n \rightarrow b^n \quad (k \rightarrow \infty)$$

Also $a \geq b^n$. $\quad \backslash \backslash$

5.3 Monotonie

(a_n) in \mathbb{R} heißt...

- monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- streng monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- (streng) monoton fallend: $(-a_n)$ (streng) monoton wachsend

5.3.1 Satz: Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen

Sei (a_n) in \mathbb{R} monoton wachsend (oder fallend) und beschränkt, dann ist (a_n) konvergent.

Beweis:

- Nach Satz 5.1 besitzt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum a .
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $a - \varepsilon < a_N$ (sonst $a - \varepsilon$ obere Schranke). $\Rightarrow a - a_N < \varepsilon$
- Für $n \geq N$ folgt:

$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon$$

Also gilt: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. $\setminus \setminus$

5.4 Hilfssatz: Monotone Teilfolge

Ist (a_n) in \mathbb{R} und $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, so heißt die Folge $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Hilfssatz 5.4: Jede Folge (a_n) in \mathbb{R} besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis:

- Ein Index n heiße „Gipfelstelle“, wenn $a_n \geq a_m$ für alle m mit $n \leq m$.
- Gibt es unendlich viele Gipfelstellen, so gibt es Gipfelstellen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Damit ist (a_{n_j}) monoton fallend ($(a_{n_{j+1}}) \leq (a_{n_j})$).
- Gibt es endlich viele Gipfelstellen, so gibt es n_1 größer als alle Gipfelstellen. Dann gibt es $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$ (da n_1 nicht Gipfelstelle), $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}, \dots$. Damit (a_{n_j}) (streng) monoton wachsend.

5.5 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) in \mathbb{R} besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach HS 5.4: Es gibt eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt, nach Satz 5.3 folgt konvergent.

5.6 Häufungswert

Ist (a_n) in \mathbb{R} so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungswert (auch Häufungspunkt), wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N > \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

In jeder ε -Umgebung von a liegen Folgeterme mit beliebig großem Index, also unendlich viele.

Beispiele:

1. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$
Menge der Häufungswerte = $[0, 1]$
2. (a_n) konvergent, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ einziger Häufungswert
3. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$
0 als einziger Häufungswert (aber nicht konvergent!)

5.6.1 Satz: Häufungswert & konvergente Teilfolge

Sei (a_n) in \mathbb{R} . Dann a Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge (a_{n_k}) mit $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$. (Beweis siehe Übung 7 Aufgabe 7.4)

5.7 Limes superior/inferior

Für (a_n) in \mathbb{R} :

- limes superior (auch $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- limes inferior (auch $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Sind $\emptyset \neq M' \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$, dann $\inf M \leq \inf M' \leq \sup M' \leq \sup M$
- $\sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{a_k \mid k \geq n+1\}$, also $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_n$ monoton fallend
- $\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$
- für nach oben beschränkte Teilmengen A von \mathbb{R} gibt es eine Folge $a_n \rightarrow \sup A$ in A , (Beweis mithilfe Übung 8.2)
- $(x_n) \subseteq A, (y_n) \subseteq \lambda A$ mit $x_n \rightarrow \sup(A)$ und $y_n \rightarrow \sup(\lambda A), \lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} \sup(\lambda A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \underbrace{\tilde{y}_n}_{\in A} \\ &= \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\tilde{y}_n}_{\in A} \\ &\leq \lambda \cdot \sup A \\ &= \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot \underbrace{x_n}_{\in \lambda A} \\ &\leq \sup(\lambda A) \end{aligned}$$

Also $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$

Beispiele:

- $\limsup(-1)^n = 1 \quad \liminf(-1)^n = -1$
- $(\frac{1}{1}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots)$ $\limsup = \infty \quad \liminf = 0$

6

Reihen

- Sei (a_n) in \mathbb{R} , $s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k$ für $n \geq n_0$.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := (s_n)_{n \geq n_0}$$

heißt (unendliche) Reihe, s_n Partialsummen.

- Reihe ist also die Folge, z.B. für $n_0 = 1$: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$
- Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, d.h. (s_n) konvergent, dann auch Summe der Reihe:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k$$

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen.

- Beispiel:

– Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1}$

– Umformung durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k-1} \\ \Rightarrow 1 &= A \cdot (2k-1) + B \cdot (2k+1) = (A+B) \cdot 2k + (B-A) \\ \Rightarrow A+B &= 0 \quad B-A=1 \\ \Rightarrow A &= -0,5 \quad B=0,5 \end{aligned}$$

– Umformung der Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= 0,5 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \quad \text{Teleskopsumme} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.1 Geometrische Reihe

1. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

2. Für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Für $|x| \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ nicht konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 - x} = \frac{x + x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{x + 1}$$

Beweis:

1. $(1 - x) \cdot \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}$
2. Klar mit 1).

6.2 Satz: Linearkombination

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \quad \text{konvergent}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k \\ &\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

Entsprechend 2. Behauptung.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe):

1. Variante 1: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots$ Geklammerte Ausdrücke sind alle jeweils $> 0,5$.

2. Variante 2: Annahme, dass harmonische Reihe konvergent. Dann:

$$\begin{aligned}
 s &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\
 &> \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\
 &= 2 \cdot \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} = s \\
 &\Rightarrow s > s
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$$

(Umkehrung falsch!)

- Sei $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Reihe, $n_1 \geq n_0$. Dann:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n \text{ konvergent?}$$

$$\sum_{k=n_0}^n a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^n a_k$$

6.3 Konvergenzkriterien

6.3.1 Satz: Allgemeines Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Sei (a_n) in \mathbb{R} . Dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq N : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \\
 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Beweis:

- $s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \sum_{k=m}^n a_k = s_n - s_{m-1}$.

- Reihe konvergent $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (s_n)$ konvergent $\stackrel{4.3.1 \ \& \ \text{Vollständigkeitsaxiom}}{\Leftrightarrow} (s_n)$ Cauchy-Folge \Leftrightarrow rechte Seite mit:

$$|s_n - s_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

6.3.2 Satz: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei (a_n) in \mathbb{R} , monoton fallend, $a_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad \text{konvergent}$$

Beweis: s. Übung 6

Beispiele:

1. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergent. (Summe ist $\ln 2$, Logarithmus siehe 13.2.2)
2. $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ konvergent. (Summe: $\frac{\pi}{4}$, pi siehe 14.9.1)

6.3.3 Satz: Reihen mit positiven Gliedern

Sei (a_n) in \mathbb{R} . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \geq 0$. Dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)_n \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Hinweis: Diese Bezeichnung nur für Reihen mit positiven Gliedern.

Beweis:

- \Rightarrow Konvergente Folgen sind beschränkt.
- \Leftarrow Monotone beschränkte Folgen sind konvergent.

6.3.4 Satz: Majoranten-Kriterium

$(a_n), (b_n)$ in \mathbb{R} , $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Beweis:

- Sei $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ $t_n := \sum_{k=1}^n b_k$
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq m \geq N$ gilt: $|t_n - t_m| < \varepsilon$. ((t_n) Cauchy-Folge)
- Wegen:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=m+1}^n |a_k| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n b_k = t_n - t_m \\ &< \varepsilon, \quad (*) \text{ endliche Summe} \Rightarrow \text{Dreiecksungleichung anwendbar} \end{aligned}$$

Also (s_n) Cauchy-Folge \Rightarrow konvergent. Aus $|s_n| \leq t_n$ folgt letzte Ungleichung für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel:

- Für $k \geq 2$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty$
- Beweis: Wie bereits bewiesen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ konvergent.

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{4n^2-1}$$

Nach Satz 6.3.4 $\setminus \setminus$.

Bemerkung:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ konvergent?
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

6.4 Absolute Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent

$$:\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

(Hier ist bei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Erste Bedeutung gemeint.)

6.4.1 Folgerung: Absolute Konvergenz \Rightarrow Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Es gilt:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Beweis mit Satz 6.3.4.

6.4.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in \mathbb{R} . Es gebe $N \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta < 1$, außerdem $a_n \neq 0$, sodass:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \vartheta \quad \text{für alle } n \geq N$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Für $n \geq N$: $|a_n| \leq \vartheta^{n-N} \cdot |a_N|$, da:

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &\leq \vartheta \cdot |a_N| \\ |a_{N+2}| &\leq \vartheta \cdot |a_{N+1}| \leq \vartheta^2 \cdot |a_N| \\ |a_{N+n}| &\leq \vartheta^n \cdot |a_N| \quad (\text{Induktion nach } n) \end{aligned}$$

- Dann gilt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_N| \cdot \vartheta^{n-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k < \infty \quad \text{geom. Reihe}$$

Dann Satz 6.3.4 (Majorantenkriterium)

Beispiele:

- $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{\underbrace{n+1}_{<1, \text{ für } N \geq 2}} \rightarrow 0$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent:

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \right| = \left(\frac{(n+1)}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ mit Quotientenkriterium nicht entscheidbar:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \rightarrow 1$$

6.4.3 Satz: Wurzelkriterium

Sei (a_n) in \mathbb{R} , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Wähle $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < \vartheta < 1$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$: $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \vartheta$ für alle $n \geq N$, d.h. $|a_n| \leq \vartheta^n$.
Da $\sum_{n=N}^{\infty} \vartheta^n < \infty$ (geom. Reihe), folgt die Behauptung aus Satz 6.3.4.

Beispiele:

1. $1 + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + \dots$. Quotientenkriterium nicht anwendbar, aber Wurzelkriterium liefert Konvergenz.
2. $\sum \frac{1}{n^k}$ mit Wurzelkriterium nicht entscheidbar:

$$\left(\frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^k}} \right)^k$$

Sicher nicht $\limsup < 1$, sonst $\sum \frac{1}{n}$ konvergent. (Übung: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$)

6.5 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen

Ein Dezimalbruch ist eine Reihe

$$\pm \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq a_n \leq 9$.

6.5.1 Satz: Konvergenz von Dezimalbrüchen

Jeder Dezimalbruch ist absolut konvergent, also konvergent gegen eine reelle Zahl.

Beweis: Es gilt: $|a_n \cdot 10^{-n}| \leq 9 \cdot 10^{-n}$. Daraus folgt:

$$9 \sum_{n=k}^{\infty} 10^{-n} = 9 \cdot 10^k \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-k} < \infty \quad \text{geom. Reihe}$$

Dann Satz 6.3.4. \\\

6.5.2 Satz: Reihenentwicklung einer reellen Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $(b_n)_{n \geq 0}$ Folge in $(0, \infty)$, $b_n \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$, $x < b_0$. Dann gibt es $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{N}_0 : $b_{n-1} > a_n \cdot b_n$ für alle n , sodass:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Beweis:

- Folge (a_n) rekursiv definieren:

- $a_1 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot b_1 \leq x\}$, also $x_1 := a_1 \cdot b_1$. Dann $a_1 \cdot b_1 < b_0$.
- Seien a_1, \dots, a_n schon bestimmt mit:

$$a_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot k_j + k \cdot b_n \leq x \right\}$$

- Wir definieren:

$$a_{n+1} := \max \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{j=1}^n a_j \cdot k_j + k \cdot b_{n+1} \leq x \right\}$$

Dann $a_{n+1} \cdot b_{n+1} < b_n$, sonst Widerspruch zur Definition von a_n .

- (x_n) monoton wachsend und aus $x_n + b_n > x$ folgt $b_n > x - x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x_n \rightarrow x, (n \rightarrow \infty)$.

6.5.3 Folgerung: Dezimalbruchentwicklung

Jede reelle Zahl lässt sich in einem Dezimalbruch entwickeln.

Beweis:

- ohne Einschränkung: $x \geq 0$
- Es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < 10^{-k}$. Anwendung von Satz 6.5.2 mit $(b_n) = (10^{-n})_{n \geq k}$ ergibt Behauptung, da (b_n) die geforderten Voraussetzungen erfüllt:

$$\begin{aligned} 10^{-n} &\longrightarrow 0 \\ a &< \frac{10^{-(n-1)}}{10^{-n}} = 10 \quad \backslash \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Satz 6.5.1, Folgerung 6.5.3: Bekannte Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen gesichert.
- Statt Basis 10 beliebige Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$: b -adische Brüche:
 - $b = 2$: duale/dyadische Brüche
 - $b = 8$: Oktalzahlen
 - $b = 16$: Hexadezimalzahlen (Ziffern: $0, \dots, 9, A, \dots, F$)
 - $b = 60$: sexagesimale Zahlen (Babylonier/Uhrzeit)

7

Überabzählbarkeit von Mengen

Seien M, N Mengen.

- M heißt endlich $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f: \{0, \dots, n\} \rightarrow M$ (bijektiv)
($\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f: \{0, \dots, n\} \rightarrow M$ surjektiv)
- M heißt unendlich $:\Leftrightarrow$ wenn M nicht endlich ist
- M heißt abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \rightarrow M$ bijektiv
($\Leftrightarrow M$ ist unendlich, $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow M$ surjektiv)
- M heißt abzählbar $:\Leftrightarrow M$ endlich oder abzählbar unendlich
- M heißt überabzählbar $:\Leftrightarrow M$ nicht abzählbar
- M und N haben die gleiche Mächtigkeit $:\Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$ bijektiv

Bemerkungen:

- M abzählbar, $N \subseteq M \Rightarrow N$ abzählbar
- $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow M$ surjektiv $\Rightarrow M$ abzählbar

Beispiele:

1. \mathbb{N} ist abzählbar
2. \mathbb{Z} ist abzählbar: $(0, 1, -1, 2, -2, \dots)$

7.1 Satz: Vereinigung von abzählbaren Mengen

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis:

- Für $m \in \mathbb{N}$: $M_m := \{x_{mn} \mid n \leftarrow \mathbb{N}\}$
- Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens (G. Cantor, 1845-1918)

$$(y_1, y_2, \dots) = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, \dots)$$

Dann:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$$

- Genauer: $\exists \varphi: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv. Zum Beispiel:

$$(m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m$$

7.2 Satz: Abzählbarkeit von \mathbb{Q}

\mathbb{Q} ist abzählbar

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ abzählbar. Also ist $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar nach Satz 7.1. \\

7.3 Satz: Überabzählbarkeit von \mathbb{R}

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist $[a, b]$ überabzählbar. Also auch \mathbb{R} überabzählbar.

Beweis:

- Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $[a, b]$. Wir zeigen, dass es $x \in [a, b] \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gibt. (Daher gibt es keine surjektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$.)
- Es gibt $a \leq a_1 < b_1 < b$ oder $a < a_1 < b_1 \leq b$ und $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b - a)$, sodass $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Dann gibt es $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{3}(b_1 - a_1)$, sodass $x_2 \notin [a_2, b_2]$.

Allgemein:

$$\exists a_n < b_n, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a) : x_1, \dots, x_n \notin [a_n, b_n]$$

- Dann $(a_n)_n$ Cauchy-Folge. Für $m \geq n$:

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \leq b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a)$$

$x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Also $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

- Es folgt $x \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \mathbb{R} als Obermenge von $[a, b]$ ist auch überabzählbar. (Bemerkung 1) \\

Bemerkung:

1. Für eine Menge M sei $\wp := \{N; N \subseteq M\}$ die Potenzmenge.
2. $(0, 1)$ bzw. \mathbb{R} hat die gleiche Mächtigkeit wie $\wp(\mathbb{N})$.
3. $M \neq \emptyset$. Dann $\# \wp: M \rightarrow \wp(M)$ surjektiv.

7.3.1 Folgerung: Abzählbarkeit irrationaler Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) ist überabzählbar.

Beweis: Anderenfalls $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ abzählbar. \\

Bemerkung:

- $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} : a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$
- \mathbb{A} : Menge der algebraischen Zahlen
- \mathbb{A} ist ein Körper, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$
- \mathbb{A} ist abzählbar.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt transzendent $:\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ konkrete transzendenten Zahlen schwer zu finden
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ ist überabzählbar (also $\neq \emptyset$)
- e, π sind transzendent. (Für π 1882 durch Lindemann. Quadratur des Kreises ist nicht möglich)

8

Umordnung von Reihen

Darf man konvergente Reihen umordnen? Im Allgemeinen nicht möglich!

8.1 Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in \mathbb{R} und eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ Umordnung. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, Grenzwert a . Dann konvergiert jede Umordnung ebenfalls gegen a .

Beweis:

- Sei $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- Es gibt $N' \in \mathbb{N}$ mit $\tau(n) > N$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq N'$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} - a \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} - \sum_{k=1}^N a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^N a_k - a \right| \\ &\leq 2 \cdot \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon \quad \forall \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\sum a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent, so gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$ und es gibt divergente Umordnungen. (Riemannscher Umordnungssatz)

Hinweise:

1. Es gibt zwei Teilfolgen (a_{n_j}) , (a_{m_j}) , sodass $a_{n_j} \geq 0$ und $a_{m_j} < 0$. Also $\sum_j a_{n_j} = \infty$ und $\sum_j a_{m_j} = -\infty$.
2. Sei $c \in \mathbb{R}$. Summiere 1. Reihe bis erstmals $> c$. Dann summiere 2. Reihe bis erstmals $< c$. Dann summiere 1. Reihe bis erneut erstmals $> c$, Aus (a_n) Nullfolge folgt: Grenzwert = c .

8.2 Satz: Großer Umordnungssatz

Für $i, j \in \mathbb{N}_0$ sei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$M := \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \mid m \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty$$

Dann:

1. Ist $\tau: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ injektiv, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent. Insbesondere sind $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ ($i \in \mathbb{N}_0$) und $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ ($j \in \mathbb{N}_0$) absolut konvergent.
2. Die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l,l} \right)$ sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert.

Beweis:

1. Sei $\tau: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine injektive Abbildung. Bezeichnung: $\tau(n) := (\tau_1(n), \tau_2(n))$ Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \leq p \leq n\}$. Dann:

$$\sum_{p=0}^n |a_{\tau(p)}| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq M$$

Damit $\sum_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)}$ absolut konvergent.

2. Es genügt dies für die erste und die dritte Reihe zu zeigen (Symmetrie). Für $m \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=0}^m \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} \right| \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_{ij}| \leq M$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$\sum_{i=0}^m \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| \leq M$$

Damit 1. Reihe absolut konvergent.

Sei $\tau: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ bijektiv, z.B. durch das 1. Cantorsche Diagonalverfahren, gegeben.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}_0$, sodass $\sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \leq \varepsilon$.

Sei $n \geq N$, $m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \leq p \leq n\}$. Für $k, l \geq m$ folgt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij} - \sum_{p=0}^n a_{\tau(p)} \right| &\leq \sum_{p>n} |a_{\tau(p)}| \\ &\leq \sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Grenzübergänge: $l \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ liefern:

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - \sum_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)} \right| \leq \varepsilon$$

Damit = 0. Also Reihensumme gleich.

Die 3. Reihe entspricht dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren.

8.3 Folgerung: Cauchy-Produkt

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ absolut konvergente Reihen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k b_{k-l} \cdot c_l$$

wobei die letzte Reihe absolut konvergent ist.

Beweis: Satz 8.2 benutzen mit $a_{ij} := b_i \cdot c_j$:

$$\begin{aligned} \text{linke Seite} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i \sum_{j=0}^{\infty} c_j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_i \cdot c_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |b_i \cdot c_j| = \sum_{i=0}^m |b_i| \cdot \sum_{j=0}^m |c_j| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \\ &= M < \infty \end{aligned}$$

9

Exponentialreihe

9.1 Satz: Konvergenz

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis: mit Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Eulersche Zahl e :

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

9.2 Satz: Funktionalgleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis: mit Cauchy-Produkt (Satz 8.3)

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \cdot k! \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x + y)^k \\ &= \exp(x + y) \end{aligned}$$

9.3 Folgerungen

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = (\exp(x))^{-1} =: \exp(x)^{-1} \quad (\exp(x) \neq 0)$$

Beweis:

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

2. Für alle $x > 0$: $\exp(x) > 1$

Beweis:

$$\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{>0} + \dots$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$

Beweis: Für $x > 0$ siehe 2. Für $x < 0$:

$$\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$$

4. $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$

Beweis:

$$1 < \exp(y - x) = \exp(y) \cdot \exp(x)^{-1}$$

5. $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$

Beweis:

- Induktion für \mathbb{N}_0 :

- I.A.: $\exp(0) = 1 = e^0$

- I.S.: $\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$

- Für $n < 0$:

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$$

10

Metrische Räume

Ziel: Abstrakte Struktur, für die Konvergenz erklärt werden kann.

Für Mengen X, Y ist das kartesische Produkt definiert:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \quad \text{Menge der geordneten Paare}$$

10.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ mit:

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung) („Umwege sind mindestens genauso lange“)
3. $\forall x \in X : d(x, x) = 0$ (Positive Definitheit)
4. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Trennungseigenschaft)

Metrischer Raum ist Paar (X, d) . (ohne 4.: d Halbmetrik)

Beispiele:

- (\mathbb{R}, d) , $d(x, y) = |x - y|$ (mit Dreieckungleichung des Betrages)
- X Menge (d : diskrete Metrik)

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

- Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $d_A: A \times A \rightarrow [0, \infty)$, $d_A(x, y) := d(x, y)$ ($x, y \in A$). Dann (A, d_A) metrischer Raum. d_A : auf A induzierte Metrik

z.B.: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

10.1.1 Hilfssatz

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann:

$$\forall x, y, z \in X : |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \quad \setminus \end{aligned}$$

10.1.2 Komplexe Zahlen

- Ziel: \mathbb{R} vergrößern, sodass es i gibt mit $i^2 = -1$: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

- \mathbb{C} ist ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$.
- Ist $(x, y) \neq (0, 0)$, d.h. mindestens eine der Zahlen $x, y \neq 0$, dann:

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$, Abbildung erhält Addition und Multiplikation. In diesem Sinne $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Setzt man $i := (0, 1)$, so erhält man

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y$$

Es gilt $i^2 = (0, 1)^2 = -1$.

- Für $z = x + i \cdot y, x, y \in \mathbb{R}$:

– $\text{Re}(z) := x$ [Realteil von z]

$$\text{Re}(z) = 0,5 \cdot (z + \bar{z})$$

– $\text{Im}(z) := y$ [Imaginärteil von z]

$$\text{Im}(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$$

– $\bar{z} := x - i \cdot y$, die konjugiert komplexe Zahl

– $\bar{\bar{z}} = z$, wenn z reell

– $\bar{\bar{\bar{z}}} = z$

– $z \cdot \bar{z} \geq 0$

- Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

- Betrag einer komplexen Zahl:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{z}|$$

Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich der schon bekannte Betrag.

Eigenschaften des Betrages: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2. $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} &= z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ &= (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) \end{aligned}$$

3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ (Beweis wie in \mathbb{R})

- Aus dem Betrag: Metrik d

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

- Für $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Sind $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ so ergibt sich als Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:

$$z_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

Ist $b^2 - 4ac < 0$, dann $z_{1/2}$ komplex:

$$z_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a} \cdot \sqrt{4ac - b^2}$$

- Auch Gleichungen $a_n \cdot z_n + \dots + a_0 = 0$ (wobei sogar $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$) besitzen immer (n) Lösungen (Fundamentalsatz der Algebra). \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.

10.1.3 Beispiel: Die metrischen Räume \mathbb{C}^n und \mathbb{R}^n

- $M^\Lambda := \{f \mid f: \Lambda \rightarrow M\}$, die Menge der Abbildungen von Λ in die Menge M
- Im Folgenden: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x \mid x: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}\} \quad \text{dabei } x_j := x(j) \\ &= \mathbb{K}^{\{1, \dots, n\}} \end{aligned}$$

- \mathbb{K}^n ist Vektorraum über \mathbb{K} . (Beweis siehe Lineare Algebra.)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &:= (x_1, \dots, x_n) \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Für $x \in \mathbb{K}^n$ definieren wir den (euklidischen) Betrag (euklidische Norm):

$$|x|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(entspricht dem „Abstand“ des Vektors x zur 0)

- Wir zeigen, dass dann die Dreiecksungleichung

$$|x + y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2$$

erfüllt ist für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.

- Dazu wird zunächst die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$\sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| \leq |x|_2 \cdot |y|_2$$

bewiesen. Für Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j, y_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), sonst betrachte $|x_j|$ und $|y_j|$.

1. Klar, falls $x = 0$ oder $y = 0$.
2. $|x|_2 = |y|_2 = 1$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j + \sum_{j=1}^n y_j^2 \\ &= 2 \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j \right) \end{aligned}$$

3. $x \neq 0, y \neq 0$. Dann:

$$\left| \frac{1}{|x|_2} \cdot x \right|_2 = \left| \frac{1}{|y|_2} \cdot y \right|_2 = 1$$

Nach 2:

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j \cdot y_j}{|x|_2 \cdot |y|_2} \leq 1 \quad \backslash \backslash$$

- Beweis der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x + y|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|)^2 \quad \text{Dreiecksungleichung in } \mathbb{K} \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j|^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| + \sum_{j=1}^n |y_j|^2 \\ &\leq |x|_2^2 + 2 \cdot |x|_2 \cdot |y|_2 + |y|_2^2 \\ &= (|x|_2 + |y|_2)^2 \quad \backslash \backslash \end{aligned}$$

- Durch $d(x, y) := |x - y|_2$ ist auf \mathbb{K}^n eine Metrik erklärt.
- \mathbb{K}^n metrischer Raum immer mit obiger Metrik, falls nicht anders gesagt. Statt $|x|_2$ auch $|x|$.

- Schreibweise: Statt $f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ schreibe $f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ oder $f(x_1, \dots, x_n)$

10.2 Konvergenz

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X (d.h. $x : \mathbb{N} \rightarrow X$), $x \in X$. $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) (oder $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$)

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)})$$

Also (x_n) konvergent gegen x .

- (x_n) Cauchyfolge

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

- Bemerkung: (x_n) konvergent $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy-Folge

Beweis: $x_n \rightarrow x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \geq N$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \quad \setminus \setminus$$

- (X, d) heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge ist (in X) konvergent. (der Zusatz "in X " ist nicht notwendig, da dies sich schon aus der Definition ergibt, kann aber Verwechslungen vermeiden)

10.2.1 Satz: Konvergenz im \mathbb{K}^n

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K}^n , $y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

$$x_k \rightarrow y \Leftrightarrow x_{kj} \rightarrow y_j (k \rightarrow \infty) \forall j = 1, \dots, n$$

Beweis:

- „ \Rightarrow “ Für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$|x_{kj} - y_j| \leq |x_k - y|_2 = d(x_k, y) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

- „ \Leftarrow “ mit (1)

$$|x_k - y|_2^2 = \sum_{j=1}^n |x_{kj} - y_j|^2 \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$$

Folgerung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k1} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kn} \end{pmatrix}$$

10.3 Satz: Vollständigkeit des \mathbb{R}^n

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ ist vollständig.

Beweis:

- Sei (x_n) Cauchyfolge in \mathbb{R}^n . Wegen $|x_{kj} - x_{lj}| \leq |x_k - x_l|_2$ ist auch $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in \mathbb{R} , also konvergent. Nach Satz 10.2 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent. $\setminus \setminus$

Bemerkung: Insbesondere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vollständig und \mathbb{C}^n vollständig.

10.4 Kugeln

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $r > 0$, ($r \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in X \mid d(y, x) < r\} && \text{offene Kugel} \\ B[x, r] &:= \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\} && \text{abgeschlossene Kugel} \end{aligned}$$

- $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x

$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

Insbesondere: $B(x, \varepsilon)$ Umgebung von x genannt ε -Umgebung.

- $U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in U$ ist U Umgebung von x . Bzw. $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$

- $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ offen

- Beispiele:

1. Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- (a) (a, b) offen

Sei $x \in (a, b)$. Dann $B(x, \min\{b - x, x - a\}) \subseteq (a, b)$

- (b) (a, ∞) offen

- (c) $[a, b)$ nicht offen

- (d) $[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ also $[a, b]$ geschlossen.

2. (X, d) metrischer Raum, $a \in X, r > 0$. Dann $B(a, r)$ offen.

Sei $x \in B(a, r)$. Dann $\varepsilon := r - d(a, x) > 0$. Es gilt $B(x, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$. Für $y \in B(x, \varepsilon)$ (d.h. $d(y, x) < \varepsilon$) ist:

$$\begin{aligned} d(y, a) &\leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) \\ &= (r - d(a, x)) + d(x, a) = r \end{aligned} \quad \backslash \backslash$$

3. $U := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ist offen

10.4.1 Satz: Abgeschlossenheit & Konvergenz

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann: A abgeschlossen \Leftrightarrow Ist (x_n) in $A, x_n \rightarrow x$ (in X), dann $x \in A$.

Beweis:

1. „ \Rightarrow “

Sei (x_n) in $A, x_n \rightarrow x$ (in X). Annahme: $x \notin A$. Da $X \setminus A$ Umgebung von x ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in X \setminus A$ für alle $n \geq N$.

Bemerkung: (x_n) in $X, x \in X: x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall U \subseteq X, U$ Umgebung von $x \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U$

2. „ \Leftarrow “

Annahme: A nicht abgeschlossen, d.h. $X \setminus A$ nicht offen. Dann gibt es $x \in X \setminus A$, sodass $X \setminus A$ nicht Umgebung von x ist. Daher $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A$ für alle $n \in \mathbb{N} (\Leftrightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset)$.

Wähle $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann (x_n) in $A, x_n \rightarrow x (\notin A)$. D.h. rechte Seite von Satz 10.4 nicht erfüllt.

10.4.2 Häufungswert im Metrischen Raum

x ist Häufungswert von $(x_n) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} : B(x, \varepsilon) \cap \{x_j \mid n < j\} \neq \emptyset$$

In jeder ε -Kugel um x liegen unendlich viele Folgenglieder.

$$\Leftrightarrow \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_k}) \text{ mit } x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

(Beweis ist Verallgemeinerung zu Übung 7 Aufgabe 7.4)

11

Stetigkeit

11.1 Definition

11.1.1 Grundbegriffe

1. Funktionen:

- Sei D eine Menge.
 - $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktion
 - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ komplexe Funktion
 - $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorwertige Funktion
- Graph von f mit $f: D \rightarrow Y$.

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in D \times Y \mid x \in D\}$$

- Beispiele:

- (a) abs: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
- (b) entier: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{entier}(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.
Auch $\lfloor x \rfloor := \text{entier}(x)$ (Gauß-Klammer)
- (c) Exponentialfunktion
- (d) Dirichlet-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Rationale Operatoren auf reellen Funktionen:

- Sei $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann für alle $x \in D$:

$$f + g: D \rightarrow \mathbb{R} : (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

- Damit \mathbb{R}^D – die Menge der Abbildungen von $D \rightarrow \mathbb{R}$ – ein Vektorraum.

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R} : \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

für $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

3. Komposition von Abbildungen

- Seien D, E, F Mengen, $f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow F$. Dann

$$g \circ f: D \rightarrow F : (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

- Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$. Also abs = sqrt \circ sq, wobei sq(x) := x^2 und sqrt(x) := $\sqrt{x}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

11.1.2 Stetigkeit

- Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$, $a \in X$. f stetig in a

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon) \end{aligned}$$

(„ $f(x)$ nahe bei $f(a)$, wenn x nahe bei a ist.“)

- f stetig (auf X) $:\Leftrightarrow f$ in jedem Punkt von X stetig.

- Beispiele:

1. Konstante Abbildung:

$$f: X \rightarrow Y: x \mapsto c$$

ist stetig ($c \in Y$). Dabei δ beliebig wählbar.

2. Identische Abbildung:

$$id_x: X \rightarrow X: x \mapsto x$$

ist stetig. ($\delta := \varepsilon$)

- 3.

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$$

ist stetig.

Beweis: $a \in \mathbb{R}$. $||x| - |a|| \leq |x - a|$. ($\delta := \varepsilon$)

4. Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis:

- (a) Stetigkeit in $a=0$

– Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(0)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\ &\leq |x| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e \end{aligned}$$

– Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta := \min \{1, \frac{\varepsilon}{e}\}$ folgt: Aus $|x| = |x - 0| < \delta$ folgt $|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$.

- (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(a)| &= |\exp(a) \cdot \exp(x - a) - \exp(a)| \\ &= \exp(a) \cdot |\exp(x - a) - 1| \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach (a) existiert $\delta > 0$: Für $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$ gilt $|\exp(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{\exp(a)}$.
Für $|x - a| < \delta$ folgt:

$$|\exp(x) - \exp(a)| < \exp(a) \cdot \frac{\varepsilon}{\exp(a)} = \varepsilon$$

11.1.3 Satz: Folgenstetigkeit

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $a \in X$, $f: X \rightarrow Y$. Dann äquivalent:

1. f stetig in a
2. Für jede konvergente Folge (a_n) in X mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$$

(d.h. f ist folgenstetig in a).

Beweis:

1. „ \Rightarrow “

- Sei (a_n) in X , $a_n \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $f(B_x(a, \delta)) \subseteq B_y(f(a), \varepsilon)$.
- Es gibt $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \in B_x(a, \delta)$. Also für alle $n \geq N$:

$$f(a_n) \in B_y(f(a), \varepsilon) \quad (\Leftrightarrow e(f(a_n), f(a)) < \varepsilon)$$

2. „ \Leftarrow “ (Kontraposition)

- Annahme: f nicht stetig in a , d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in B_x(a, \delta) \text{ mit } f(x) \notin B_y(f(a), \varepsilon)$$

insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in X \text{ mit } d(x_n, a) < \frac{1}{n} (= \delta) \wedge e(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

Dann (x_n) in X , $x_n \rightarrow a$, $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Also 2. nicht erfüllt. $\setminus \setminus$

11.2 Satz: Addition + Multiplikation von stetigen Funktionen

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ in a stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}: X' \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $X' = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweis:

- Sei (a_n) in X , $a_n \rightarrow a$. Dann $f(a_n) \rightarrow f(a)$ und $g(a_n) \rightarrow g(a)$ nach Satz 11.1. Aus Folgerung 4.2 folgt:

$$\begin{aligned} f(a_n) + g(a_n) &\rightarrow f(a) + g(a) \\ (f + g)(a_n) &\rightarrow (f + g)(a) \end{aligned}$$

Nach Satz 11.1: $f + g$ in a stetig. Rest: entsprechend. $\setminus \setminus$

Beispiele:

1. Polynomfunktion:

Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_0 \cdot x^0$$

p ist stetig.

2. Rationale Funktionen:

Seien $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. $\frac{p}{q}: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ ist stetig.

11.3 Satz: Stetigkeit der Komposition

Seien (X_j, d_j) mit $j = 1, 2, 3$ metrische Räume, $f: X_1 \rightarrow X_2$, $g: X_2 \rightarrow X_3$, $a \in X_1$. f sei stetig in a , g in $f(a)$ stetig. Dann $g \circ f: X_1 \rightarrow X_3$ in a stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Da g in $f(a)$ stetig:

$$\exists \delta > 0 : g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon)$$

Da f stetig in a :

$$\exists \alpha > 0 : f(B_{X_1}(a, \alpha)) \subseteq B_{X_2}(f(a), \delta)$$

Dann:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(B_{X_1}(a, \alpha)) &= g(f(B_{X_1}(a, \alpha))) \subseteq g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \\ &\subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon) = B_{X_3}((g \circ f)(a), \varepsilon) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, X metrischer Raum. Dann ist $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |f(x)|$ stetig.

$$|f| = \text{abs} \circ f$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \exp(x^2)$ stetig.

Bemerkung: Noch nicht gezeigt, dass $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): x \mapsto \sqrt{x}$ stetig.

12

Sätze über stetige Funktionen

12.1 Satz: Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $A \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < A < f(b)$ (oder $f(a) > A > f(b)$). Dann gibt es $p \in [a, b]$ mit $f(p) = A$.
(Anschaulich klar. Falsch für $f: [0, 2] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, $A = 0$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: $A = 0$, $f(a) < 0 < f(b)$. Jetzt „Löwenjagd“: Intervallfolge $([a_n, b_n])$ mit $[a_0, b_0] = [a, b]$. Es sei $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b - a)$, $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$.
- Für $p := \lim a_n = \lim b_n$ folgt:

$$0 \geq f(a_n) \rightarrow f(p) \quad \wedge \quad 0 \leq f(b_n) \rightarrow f(p)$$

Also $f(p) = 0$. \\\

Beispiel:

- Jedes Polynom $f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$, n ungerade, besitzt mindestens eine (reelle) Nullstelle:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Also existiert eine Nullstelle.

- Aber: $g(x) = x^2 + 2$ besitzt keine reelle Nullstelle (n gerade).
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ gilt $f(x_n) \rightarrow c$

12.2 Folgerung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(D)$ ein Intervall.
(D Intervall $\Leftrightarrow \forall a, b \in D$, $a < b$: $[a, b] \subseteq D$)

Beweis:

- Sind $A, B \in f(D)$, $A \leq B$. Dann gibt es $a, b \in D$ mit $A = f(a)$ und $B = f(b)$. Aus Zwischenwertsatz: $[A, B] \subseteq f(D)$. \\\

Definition: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ beschränkt.

12.3 Satz vom Maximum

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und besitzt ein Maximum und Minimum, d.h. es gibt $p, q \in [a, b]$ mit $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.
(Falls $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dann im Allgemeinen nicht richtig.)

Beweis:

- Sei $A := \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann $\exists (x_n)$ in $[a, b]$: $f(x_n) \rightarrow A$, (x_n) beschränkt.
- Nach Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in [a, b]$.
- Dann $f(p) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = A$ (da f stetig). Daher f beschränkt ($A < \infty$) und $f(x) \leq A = f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.
- Für nach unten beschränkt und q betrachte $-f$.

Die Abgeschlossenheit von X ist notwendig. Betrachte $f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty): x \mapsto \frac{1}{x}$. f besitzt kein Extremum.

Die nächsten Sätze beschäftigen sich damit den Definitionsbereich auf allgemeinere Metrische Räume auszuweiten.

12.4 Folgenkompaktheit

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Definitionsgemäß muss der Grenzwert $\in X$ sein.)
- Bemerkung: Beweis von Satz 12.3 liefert: (X, d) folgenkompakt, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ beschränkt und besitzt Maximum und Minimum.
- Beispiel: Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann X folgenkompakt $\Leftrightarrow X$ beschränkt und abgeschlossen.

12.4.1 Satz: Beschränktheit & Abgeschlossenheit \Leftrightarrow Folgenkompaktheit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann äquivalent:

1. X ist folgenkompakt.
2. X ist beschränkt und abgeschlossen. (beschränkt $\Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subseteq B[0, R]$)

Beweis:

1. „1 \Rightarrow 2“
 - Annahme: X nicht beschränkt. Dann existiert $(x^k)_k$ in X mit $|x^k| \rightarrow \infty$, also ohne konvergente Teilfolge. (Ist $(x^{kj})_j$ konvergent, dann $|x^{kj}|$ konvergent, also beschränkt in \mathbb{R} . Widerspruch!) Also X nicht folgenkompakt. Widerspruch! Also: folgenkompakt \Rightarrow beschränkt.
 - Sei (x^k) in X , $x^k \rightarrow x$ in \mathbb{R}^n . Es gibt in X konvergente Teilfolge (x^{kj}) . Es folgt: $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{kj} \in X$. Also X abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n .
2. „2 \Rightarrow 1“
 - Sei (x^k) eine Folge in X . Die Folge $(x_1^k)_k$ in \mathbb{R} ist beschränkt ($|x_1^k| \leq |x^k|$) und besitzt daher nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_1^{k^1 j})_j$.
 - $(x_2^{k^1 j})_j$ in \mathbb{R} beschränkt, also existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_2^{k^2 j})_j$. (Bleibt: $(x_1^{k^1 j})_j$ konvergent)
 - Es gibt also (x^{kj}) , sodass $(x_l^{kj})_j$ konvergent in \mathbb{R} für alle $l = 1, \dots, n$.
 - Aus Satz 10.2 folgt: $(x^{kj})_j$ konvergent in \mathbb{R}^n . Aus Abgeschlossenheit von X : $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{kj} \in X$, also $(x^{kj})_j$ konvergent in X .

12.5 Übertragung der Folgenkompaktheit

Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume, X folgenkompakt, $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ folgenkompakt (als Teilfolge von (Y, e)).

Beweis:

- Sei (y_n) in $f(X)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$. Es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$, für $x \in X$ ein Element als Grenzwert.
- Da f stetig ist, gilt:

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \in f(X)$$

12.5.1 Korollar: Satz vom Maximum

Sei X folgenkompakt $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist beschränkt und nimmt inf und sup an. (d.h. $\exists p \in X : f(p) = \sup(f(X))$)

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Es gilt $b := \sup A \in A$, denn
- Angenommen, dass $\sup A \notin A$. Da $\mathbb{R} \setminus A$ offen gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $A \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$, damit ist $\sup A < b - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A$. Damit Widerspruch.
- Also existiert $p \in X$ mit $f(p) = b$

12.5.2 Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

- Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$. Dann heißt f
 - gleichmäßig stetig

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

- Lipschitz-stetig (dehnungsbeschränkt)

$$:\Leftrightarrow \exists L \geq 0 \forall x, x' \in X : e(f(x), f(x')) \leq L \cdot d(x, x')$$

- Beispiele:
 1. $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig
 2. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ nicht Lipschitz-stetig, aber gleichmäßig stetig
 3. $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, nicht gleichmäßig stetig
- Bemerkung: Lipschitz-stetig \Rightarrow gleichmäßig stetig \Rightarrow stetig

12.6 Satz: Folgenkompaktheit + gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig, X folgenkompakt. Dann f gleichmäßig stetig.

Beweis:

- Annahme: f nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

- Insbesondere:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x'_n \in X \text{ mit } d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} : e(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$, $x_{n_j} \rightarrow x$.

- Aus $d(x'_{n_j}, x) \leq d(x'_{n_j}, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) folgt $x'_{n_j} \rightarrow x$.
- Daher:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq e(f(x_{n_j}), f(x'_{n_j})) \leq e(f(x_{n_j}), f(x)) + e(f(x), f(x'_{n_j})) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Widerspruch!

13

Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen, Potenz, Logarithmus

Monotonie: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f

- monoton wachsend : $\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
- streng monoton wachsend : $\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
- monoton fallend : $\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
- streng monoton fallend : $\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

13.1 Satz: Monotonie & Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend), $f(D)$ ein Intervall. Dann ist f stetig.

Beweis: (nur für „wachsend“, sonst betrachte $-f$)

- Sei $a \in D$. Sei $\varepsilon > 0$. Gilt $f(x) \geq f(a) - \varepsilon$ für alle $x < a$, so wähle $\delta_1 = 1$.
- Anderenfalls gibt es $x < a$ mit $f(x) < f(a) - \varepsilon$, dann auch $x' < a$ mit $f(x') = f(a) - \varepsilon$, da $f(D)$ ein Intervall ist und daher $[f(x), f(a)] \subseteq f(D)$. Wir setzen $\delta_1 = a - x'$. Es folgt:

$$\forall x \in D \cap (a - \delta_1, a) : f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a)$$

- Entsprechend:

$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap (a, a + \delta_2) : f(a) \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon$$

- Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt:

$$\forall x \in B_D(a, \delta) : |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

13.2 Satz: Injektivität & Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend). Dann ist f injektiv. Mit $D := f(I)$ ist $f^{-1}: D \rightarrow I$ streng monoton wachsend (fallend) und stetig. (Ist f stetig, so ist D ein Intervall. (Folgerung 12.2))

Beweis: (nur für „wachsend“)

- f ist injektiv: Es seien $x, x' \in I$, dann o.B.d.A. $x < x'$, also $f(x) < f(x')$.
- $f^{-1}: D \rightarrow I$ streng monoton wachsend:
 - Seien $y, y' \in D$, $y < y'$, $y = f(x)$, $y' = f(x')$.
 - Annahme: $x \geq x'$. Dann $y = f(x) \geq f(x') = y'$.
 - Somit folgt: $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$
- f^{-1} stetig: Da $f^{-1}(D) = I$ ein Intervall ist, ist f^{-1} stetig nach Satz 13.1.

13.2.1 Wurzelfunktion

- Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^k$ ist stetig, streng monoton wachsend, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bijektiv.
- Die Umkehrfunktion $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist stetig und streng monoton wachsend.

$$f^{-1}(y) := \sqrt[k]{y} \quad k\text{-te Wurzel}$$

- Beweis:
 - f stetig, da ein Polynom.
 - f streng monoton wachsend (klar).
 - $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 - $f([0, \infty))$ ein Intervall, damit $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Rest Satz 13.2

13.2.2 Natürlicher Logarithmus

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv.
- $\exp^{-1} =: \ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
- Eigenschaften:
 1. $\ln 1 = 0$
 2. $\ln e = 1$
 3. Für $x, x' > 0$:

$$\ln(x \cdot x') = \ln x + \ln x' \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

- Beweis:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$, also $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ (da \exp stetig)
 - Nach Satz 13.2 \ln stetig und streng monoton wachsend
 - Eigenschaften:
 1. $\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$
 2. $\exp(1) = e \Rightarrow \ln e = 1$
 3. Seien $x, x' > 0$, $y = \ln x$, $y' = \ln x'$. Also $\exp(y) = x$ und $\exp(y') = x'$.

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= \exp(y) \cdot \exp(y') = \exp(y + y') \\ \ln(x \cdot x') &= y + y' = \ln x + \ln x' \end{aligned}$$

Außerdem:

$$0 = \ln \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$$

13.2.3 Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$: a^x

- Sei $a > 0$. Dann:

$$\begin{aligned} a &= \exp(\ln a) \\ \Rightarrow a^n &= \exp(\ln a)^n \\ &= \exp(n \cdot \ln a) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.

- Für $q \in \mathbb{N}$:

$$\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right)^q = \exp(\ln a) = a$$

d.h.

$$\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right) = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$$

- Für $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) &= \exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln(a^p)\right) \\ &= \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right)\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p \end{aligned}$$

- Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$:

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a)$$

Offenbar \exp_a stetig.

- Schreibweise: $a^x := \exp_a(x) = e^{x \cdot \ln a}$. Insbesondere $\exp(x) = e^x$.

- Klar:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

- Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis a : $\forall a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}$

1. $\ln a^x = x \cdot \ln a$

Folgt aus $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.

2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Beweis:

$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln a^x) = \exp(x \cdot y \cdot \ln a) = a^{x \cdot y}$$

3. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^x \cdot b^x &= \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(x \cdot \ln b) \\ &= \exp(x \cdot (\ln a + \ln b)) \\ &= \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) \\ &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

Beweis:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln \frac{1}{a}\right) = \exp(-x \cdot \ln a) = a^{-x}$$

- Logarithmus zur Basis a : \log_a ist Umkehrfunktion von \exp_a für $a \neq 1$.

$$\ln = \log_e \quad \log = \log_{10}$$

13.3 Satz: Funktionalgleichung

Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:

$$F(x + y) = F(x) \cdot F(y)$$

Dann entweder $F(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $a = F(1) > 0$ und $F(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- $F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow F(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- 1. Fall: $F(1) = 0$. Dann:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x - 1) \cdot F(1) = 0$$

- 2. Fall:
 - $F(1) \neq 0$, also $a = F(1) > 0$.

$$F(1) \cdot F(0) = F(1) \Rightarrow F(0) = 1$$

- Für $n \in \mathbb{N}$:

$$F(n) = F(1)^n = a^n$$

- Für $n \in -\mathbb{N}$:

$$F(n) = \frac{1}{F(-n)} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

- Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{p}{q}\right)^q &= F(p) = a^p \\ F\left(\frac{p}{q}\right) &= \sqrt[q]{a^p} = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) \end{aligned}$$

Damit $F(x) = \exp_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

- Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es (x_n) in \mathbb{Q} mit $x_n \rightarrow x$. Da \exp_a und F stetig:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(x_n) = \exp_a(x)$$

13.4 Abschluss

Sei X ein metrischer Raum, $D \subseteq X$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \overline{D} &:= \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X \mid \exists (x_n) \subseteq D : x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)\} \end{aligned}$$

der Abschluss von D .

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}$, $D = (0, 1)$, $\overline{D} = [0, 1]$
2. $X = [0, 1] \cup (2, 3)$, $D = (0, 1) \cup (2, 3)$, dann $\overline{D} = X$.

13.5 Grenzwert in Metrischen Räumen

Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume, $D \subseteq X$, $f: D \rightarrow Y$, $a \in \overline{D}$, $b \in Y$, $A(x)$ eine Aussage.

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow a, A(x)} f(x) & :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap B(a, \delta) \cap \{x \mid A(x)\} : f(x) \in B(b, \varepsilon) \\
 & \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq \{x \in D \mid A(x)\}, x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty) : f(x_n) \rightarrow b (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$c = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) :\Leftrightarrow c = \lim_{x \rightarrow a, x \in (a, \infty)} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert:

$$c = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) :\Leftrightarrow c = \lim_{x \rightarrow a, x \in (\infty, a)} f(x)$$

Bemerkungen zu Grenzwerten:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } x \geq 0 \\
 \frac{e^x}{x^n} &\geq \frac{x}{(n+1)!} \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e^{-x} &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \infty \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= 0
 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 x^n \cdot e^{-x} &= \left(\frac{e^x}{x^n}\right)^{-1} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty) \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot e^y = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{y \rightarrow \infty} y^n \cdot e^{-y} = 0
 \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$

Beweis: Sei $K \in \mathbb{R}$. Dann $\ln e^K = K$. Da \ln monoton wachsend: $\ln x \geq K$ für $x \geq e^K$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{y} = - \lim_{y \rightarrow \infty} \ln y = -\infty$$

14

Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen

- Seien $(c_n), (d_n)$ in \mathbb{C} konvergent, $c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d$. Dann:

$$\begin{aligned} |c_n| &\rightarrow c & (||c_n| - |c|| \leq |c_n - c|) \\ \operatorname{Re}(c_n) &\rightarrow \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c_n) &\rightarrow \operatorname{Im}(c) \\ c_n + d_n &\rightarrow c + d \\ c_n \cdot d_n &\rightarrow c \cdot d \\ \frac{c_n}{d_n} &\rightarrow \frac{c}{d} \quad (d \neq 0) \end{aligned}$$

- Sei (c_n) in $\mathbb{C}, s_n := \sum_{k=1}^n c_k$. Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_n \text{ konvergent} &\Leftrightarrow (s_n)_n \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_n \text{ absolut konvergent} &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \end{aligned}$$

14.1 Satz: Majorantenkriterium

Sei (a_n) in $[0, \infty), \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, c_n in $\mathbb{C}, |c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, $|\sum_{n=1}^{\infty} c_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

14.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei (c_n) in $\mathbb{C}, c_n \neq 0 (n \geq n_0), \limsup \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

Ebenso Wurzelkriterium. Beweise analog zum reellen Fall.

14.2.1 Beispiel: Exponentialfunktion

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

2. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

Beweis wie in \mathbb{R} , Cauchy-Produkt auch in \mathbb{C} gültig.

3. $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Beweis:

$$1 = \exp(0) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

4. Für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} &= \overline{\left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right)} \\ \Rightarrow \exp(\bar{z}) &= \overline{\exp(z)} \end{aligned}$$

5. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis: (wie in \mathbb{R})

(a) Stetigkeit in $z = 0$

$$|\exp(z) - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq e \cdot |z| \quad \text{für } |z| \leq 1$$

(b) sonst mit Funktionalgleichung

14.2.2 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x := \operatorname{Re}(e^{i \cdot x}) \quad \sin x := \operatorname{Im}(e^{i \cdot x})$$

Somit:

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x \quad (\text{Eulersche Form})$$

Geometrische Deutung:

1. Für $x \in \mathbb{R}$:

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-i \cdot x} = 1$$

Bemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \cdot (e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \cdot (e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}) \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 (= |e^{ix}|^2) \end{aligned}$$

14.3 Satz: Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen

$\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis:

- Sei (x_n) in \mathbb{R} , $x_n \rightarrow x$. Dann $i \cdot x_n \rightarrow i \cdot x$, $e^{i \cdot x_n} \rightarrow e^{i \cdot x}$, also $\operatorname{Re}(e^{i \cdot x_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{i \cdot x})$ und $\operatorname{Im}(e^{i \cdot x_n}) \rightarrow \operatorname{Im}(e^{i \cdot x})$. \(\backslash\)

14.4 Satz: Additionstheoreme

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

- Beweis: Aus $e^{i(x+y)} = e^{i \cdot x} \cdot e^{i \cdot y}$:

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + i \cdot \sin(x + y) &= (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \\ &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) \end{aligned}$$

- Korollar:

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

14.5 Satz: Reihenentwicklung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Die Reihen sind absolut konvergent.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot x} &= 1 + \frac{i \cdot x}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \end{aligned}$$

14.6 Satz: Nullstelle von \cos

Die Funktion \cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

14.7 Hilfssatz: $\cos 2$

$$\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots \\ &\leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

... unter Verwendung des Leibniz-Kriteriums, da die Reihe alternierend ist und die Beträge der einzelnen Summanden abnehmen.

14.8 Hilfssatz: $\sin x > 0$ in $(0, 2]$

$$\forall x \in (0, 2] : \sin x > 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sin x &= x \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)}_{\text{Leibniz}} \\ &\geq x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \\ &\geq x \cdot \left(1 - \frac{4}{3!}\right) = \frac{1}{3} \cdot x\end{aligned}$$

14.9 Hilfssatz: Monotonie von \cos in $[0, 2]$

\cos ist in $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Beweis:

- Für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x' = \frac{x' + x}{2} + \frac{x' - x}{2} \quad x = \frac{x' + x}{2} - \frac{x' - x}{2}$$

- Für $0 \leq x < x' \leq 2$ folgt:

$$\begin{aligned}\cos x' - \cos x &= \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \cos \frac{x' - x}{2} - \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \sin \frac{x' - x}{2} \\ &\quad - \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \cos \left(-\frac{x' - x}{2}\right) + \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \sin \left(-\frac{x' - x}{2}\right) \\ &= \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \cos \frac{x' - x}{2} - \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \sin \frac{x' - x}{2} \\ &\quad - \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \cos \frac{x' - x}{2} - \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \sin \frac{x' - x}{2} \\ &= -2 \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \sin \frac{x' - x}{2} \\ &< 0 \quad \text{HS 14.8}\end{aligned}$$

14.9.1 Beweis Satz 14.6 & Definition von π

- Existenz:
 - $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$ (HS 14.7)
 - \cos stetig, also Zwischenwertsatz gültig
- Eindeutigkeit: Hilfssatz 14.9
- $\frac{\pi}{2}$ ist die Nullstelle von \cos in $[0, 2]$.

14.10 Satz: spezielle Werte der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i \cdot \pi} = -1 \quad e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

Beweis:

- Aus $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ folgt nach Hilfssatz 14.8:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Damit:

$$e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = i$$

- Aus der Funktionalgleichung folgt:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \pi} &= e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = -1 \\ e^{i \cdot 2\pi} &= e^{i \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot \pi} = 1 \end{aligned}$$

14.11 Folgerung: Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ (cos, sin haben Periode 2π)
2. $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$
3. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Beweis: Additionstheoreme

14.12 Folgerung: Nullstellen von sin und cos

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

1. „ \subseteq “

- $\cos x > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos x = \cos(-x) > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$
- Für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$: $\cos x < 0$ mit Folgerung 14.11.2
- Mit Folgerung 14.11.1:

$$\cos x \neq 0 \text{ für } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

„ \supseteq “ Klar mir $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und Folgerung 14.11.1, 14.11.2

2. Aus a und Folgerung 14.11.c
- 3.

$$\begin{aligned} 1 = e^{ix} &\Leftrightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

14.12.1 (Co)Tangens

- Tangens:

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

- Cotangens:

$$\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} : \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

- \tan streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$, da:
 - \sin streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$
 - \cos streng monoton fallend auf $[0, \frac{\pi}{2})$ mit Folgerung 14.11.3
 - beide > 0 auf $[0, \frac{\pi}{2})$

- Außerdem:

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$$

14.12.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

- Arcus cosinus: Umkehrfunktion von $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

- Arcus sinus: Umkehrfunktion von $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Arcus tangens: Umkehrfunktion von $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

14.13 Satz: Polardarstellung

Jede komplexe Zahl z lässt sich eindeutig schreiben als $z = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r = |z| \in [0, \infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. (Polardarstellung von z , φ Argument von z)

Beweis:

1. $z = 0$: Klar.

2. $z \neq 0$

- Es sei $r := |z|$, $\zeta := \frac{z}{r}$. Dann $|\zeta| = 1$. Es sei $\xi := \operatorname{Re} \zeta$, $\eta := \operatorname{Im} \zeta$. Dann gilt $\xi^2 + \eta^2 = 1$.
- Es sei $\alpha := \arccos \xi$ (also $\alpha \in [0, \pi]$). Aus $\cos \alpha = \xi$ folgt:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \eta$$

Man definiert nun:

$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \sin \alpha = \eta \\ -\alpha & \text{falls } \sin \alpha = -\eta \end{cases}$$

- Dann gilt $\sin \varphi = \eta$, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi = \zeta$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

- Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} &= e^{i\varphi_2} \\ \Rightarrow e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 &= 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Produkt von $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

2. (Existenz n -ter Wurzeln)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gibt es eine Lösung w der Gleichung $w^n = z$. Für $z = r \cdot e^{i\varphi}$ definiere

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}$$

3. (n -te Einheitswurzeln)

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen.

$$\zeta_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

14.14 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p(z) = z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_0$ mit $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_n) = 0$.

Beweis:

- Nimm an, dass $c_0 \neq 0$ sonst ist 0 gesuchte Nullstelle.
- Aus

$$p(z) = z^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n}\right)}_{\rightarrow 1 \text{ (} |z| \rightarrow \infty)}$$

folgt $|p(z)| \rightarrow \infty$ für $|z| \rightarrow \infty$. Damit gibt es $R > 0$, sodass $|p(z)| > |p(0)|$ für alle $|z| > R$. Auf $B[0, R]$ ist $z \mapsto |p(z)|$ stetig und besitzt daher ein Minimum: Es gibt $z_0 \in B[0, R]$ mit $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in B[0, R]$, daher für alle $z \in \mathbb{C}$.

- Angenommen $|p(z_0)| > 0$. Sonst ist z_0 die Nullstelle. Setze $\tilde{p}(z) := \frac{1}{|p(z_0)|} p(z + z_0)$. Dann nimmt $|\tilde{p}(\cdot)|$ sein Minimum in 0 an und $\tilde{p}(0) = 1$. Daraus folgt:
- \tilde{p} lässt sich darstellen als:

$$\tilde{p}(z) = 1 + c \cdot z^m + q(z) \cdot z^{m+1}$$

mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ und q Polynom. Es gibt $b \in \mathbb{C}$, sodass $b^m = -\frac{1}{c}$. Für $0 < t \ll 1$ hinreichend klein folgt:

$$\begin{aligned} |p(b \cdot t)| &\leq |1 + c \cdot b^m \cdot t^m| + |t^{m+1} \cdot b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)| \\ &= (1 - t^m) + t^m \cdot t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)| \\ &= 1 - t^m \cdot (1 - t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)|) \\ &< 1 \end{aligned}$$

($t^m < 1$ und $t \cdot |b^{m+1}| \cdot |q(b \cdot t)| < 1$.) Widerspruch zu $1 = p(0) \leq |\tilde{p}(z)|$, $z \in \mathbb{C}$

Bemerkungen:

- Beweisansatz von J. D'Alembert, 1746; vollständige Ausführung von J.R. Argand, 1806. Gauß 1799, Dissertation (4 Beweise)
- In Satz 14.14 folgt, dass es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

15

Differentiation

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D \setminus \{x_0\}}$. (Abschluss in D , siehe 13.4) f heißt in x_0 differenzierbar (oder auch nur diffbar)

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0, x_0 + h \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

- der Grenzwert heißt die Ableitung von f an der Stelle x_0 . Die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in D$ ist eine (reelle) Zahl. Definiere, falls der Grenzwert existiert:

$$f'(x) := \lim_{\xi \rightarrow x, \xi \in D \setminus \{x\}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

- f differenzierbar (in D) $:\Leftrightarrow f$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar. In diesem Fall definiere die Ableitungsfunktion f' von f

$$f' := \left(x \mapsto \lim_{\xi \rightarrow x, \xi \in D \setminus \{x\}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \right)$$

- Bemerkungen:

1. $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$ Steigung der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(\xi, f(\xi))$ (Sekante)
 $f'(x_0)$ Steigung der „Tangente“ an $\text{graph}(f)$ in $(x_0, f(x_0))$, falls sie existiert.
2. Anschauung: Differenzierbarkeit \Leftrightarrow Hineinzoomen am Graphen an $f(x_0)$ lässt den Graphen der Tangente an $f(x_0)$ annähern. \Leftrightarrow Eine Gerade am Punkt $f(x_0)$ kann nicht kippen.
3. Für $f = (x \mapsto f(x))$ existieren verschiedenste Schreibweisen:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (x \mapsto f(x))'(x_0) =: \left. \frac{d(f(x))}{dx} \right|_{x=x_0} \\ f' &= (x \mapsto f(x))' =: \frac{d(f(x))}{dx} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d(f(x))}{dx} \right|_{x=x_0} =: \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} =: \left. \frac{df}{dx}(x) \right|_{x=x_0} =: \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} \\ =: &\left. \frac{d(f(x))}{dx} \right|_{x_0} =: \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} =: \left. \frac{df}{dx}(x) \right|_{x_0} =: \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x_0} =: \frac{df(x)}{dx}(x_0) \\ &\frac{d(f(x))}{dx} =: \frac{df(x)}{dx} =: \frac{df}{dx}(x) =: \frac{d}{dx} f(x) \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich nicht um Brüche.

4. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig. Begründung:

$$f(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \cdot (\xi - x) + f(x) \xrightarrow{\xi \rightarrow x} f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x)$$

• Beispiele:

1. Konstante Funktion: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = c \cdot x$

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{c \cdot \xi - c \cdot x}{\xi - x} = c$$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

15.1 Satz: Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion

Für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \rightarrow z, \xi \neq z} \frac{\exp(\xi) - \exp(z)}{\xi - z} = \exp(z)$$

(„komplex differenzierbar“)

Beweis:

1. $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi}(\exp(\xi) - 1) &= \frac{1}{\xi} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + \xi \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n!} \\ &\leq 1 + |\xi| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{für } |\xi| \leq 1 \\ &\leq 1 + |\xi| \rightarrow 1 \quad (|\xi| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

2. allgemeines z :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi) - \exp(z)) &= \frac{\exp(z)}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi - z) - 1) \\ &\rightarrow \exp(z) (\xi \rightarrow z) \end{aligned}$$

15.2 Folgerung: Differenzierbarkeit von cos, sin

Die Funktionen exp, cos, sin sind differenzierbar:

1. $\exp' = \exp$

2. $\cos' = -\sin$ $\sin' = \cos$

Beweis:

1. Klar mit Satz 15.1
2. Für $x, \xi \in \mathbb{R}, \xi \neq x$:

$$\frac{e^{i\xi} - e^{ix}}{\xi - x} = i \frac{e^{i\xi} - e^{ix}}{i \cdot \xi - i \cdot x} \rightarrow i \cdot e^{ix} (\xi \rightarrow x)$$

nach Satz 15.1. Dann:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \xi + i \cdot \sin \xi - \cos x - i \cdot \sin x}{\xi - x} &= \frac{\cos \xi - \cos x}{\xi - x} + i \cdot \frac{\sin \xi - \sin x}{\xi - x} \\ &\rightarrow i \cdot (\cos x + i \cdot \sin x) \\ &(\quad = -\sin x + i \cdot \cos x) \end{aligned}$$

Also \cos in x differenzierbar, $\cos' x = -\sin x$, und \sin in x differenzierbar, $\sin' x = \cos x$.

15.3 Satz: Weierstraßsche Zerlegungsformel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{D} \setminus \{a\}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. f in a differenzierbar, $f'(a) = c$
2. Die durch

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + |x - a| \cdot \varphi(x)$$

für $x \neq a$ definierte Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) := 0$ erfüllt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

(Weierstraßsche Zerlegungsformel)

f wird durch eine affin-lineare Funktion $f(a) + c \cdot (x - a)$ approximiert

Beweis:

1. 1. \Rightarrow 2.

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \frac{1}{|x - a|} \cdot |f(x) - f(a) - c \cdot (x - a)| \\ &= \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right| \rightarrow 0 (x \rightarrow a) \end{aligned}$$

2. 2. \Rightarrow 1.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c + \frac{|x - a|}{x - a} \cdot \varphi(x) \rightarrow c (x \rightarrow a)$$

15.4 Satz: Produkt-/Quotienten-/Summenregel

Seien $D \subseteq \mathbb{R}, f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ sind in x differenzierbar.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\lambda \cdot f)'(x) &= \lambda \cdot f'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

2. Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$

Beweis:

1. 1. und 2. Rechenregel klar. Produktregel:

$$\begin{aligned}\frac{f(\xi) \cdot g(\xi) - f(x) \cdot g(x)}{\xi - x} &= f(\xi) \cdot \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} + \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \cdot g(x) \\ &\rightarrow f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad (\xi \rightarrow x)\end{aligned}$$

2. Quotientenregel: Spezialfall $f = 1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(\xi)} - \frac{1}{g(x)}\right) \cdot \frac{1}{\xi - x} &= \frac{1}{g(\xi) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{\xi - x} \\ &\rightarrow -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x) \quad (\xi \rightarrow x)\end{aligned}$$

Rest mit Produktregel

Beispiele:

1. $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis: Induktion (für $n=0,1,2$ schon bekannt)

$$\begin{aligned}f_n &= f_{n-1} \cdot f_1 \\ \Rightarrow f'_n &= (f_{n-1} \cdot f_1)' = f'_{n-1} \cdot f_1 + f_{n-1} \cdot f'_1 \\ &= (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

2. Für $n \in \mathbb{Z}, n < 0, f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := x^n$. Dann $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis: mit Quotientenregel

$$\begin{aligned}f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{x^{-n}}\right) \\ &= \frac{-n \cdot x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

15.5 Satz: Kettenregel

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, f in $x \in D$ differenzierbar, g in $y := f(x)$ differenzierbar. Dann $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Beweis:

- Es sei $g^*: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g^*(\eta) := \begin{cases} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & \text{für } \eta \neq y \\ g'(y) & \text{für } \eta = y \end{cases}$$

Dann g^* in y stetig und für alle $\eta \in E$:

$$g(\eta) - g(y) = g^*(\eta) \cdot (\eta - y)$$

Damit:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} &= g^*(f(\xi)) \cdot \frac{(f(\xi) - f(x))}{\xi - x} \\ &\rightarrow g^*(f(x)) \cdot f'(x) \quad (\xi \rightarrow x) \\ & (= g'(f(x)) \cdot f'(x))\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x$
2. $\frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}$

15.6 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $D := f(I)$, $\varphi = f^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Sei f in $x \in I$ differenzierbar, $f'(x) \neq 0$. Dann φ in $y := f(x)$ differenzierbar.

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Beweis:

- Sei (η_n) in $D \setminus \{y\}$, $\eta_n \rightarrow y$. Setze $\xi_n := \varphi(\eta_n)$. Dann $\xi_n \rightarrow x$ (φ stetig nach Satz 13.1), $\xi_n \neq x$, da φ injektiv.

$$\frac{\varphi(\eta_n) - \varphi(y)}{\eta_n - y} = \frac{\xi_n - x}{f(\xi_n) - f(x)} \rightarrow \frac{1}{f'(x)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Beispiele:

1. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

$$\ln = \exp^{-1} \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln 1\right) \rightarrow \ln' 1 = 1 \\ \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \frac{1}{-\frac{1}{n}} \cdot \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln 1\right) \rightarrow \ln' 1 = 1 \end{aligned}$$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Dann $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Beweis: mit Kettenregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x) \\ f'(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

3. arcsin ist differenzierbar auf $(-1, 1)$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis:

- arcsin ist Umkehrfunktion von $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$. $\sin' x = \cos x \neq 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Für $-1 < y < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

4. $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

Beweis: siehe Übung 12 (Aufgabe 89)

15.7 Ableitungen höherer Ordnungen

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Es gebe $\varepsilon > 0$, sodass f in $D \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ differenzierbar ist. Ist f' in x differenzierbar so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) = (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x .

- Rekursiv: f k -mal differenzierbar in $x \in D$, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, sodass f in $D \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $(k - 1)$ -mal differenzierbar ist und die $(k - 1)$ -te Ableitung von f in x differenzierbar ist.
- 0-te Ableitung: $f^{(0)} := f$
- Syntaktische Beobachtung:

$$\frac{d \left(\frac{d \left(\frac{d(f(x))}{dx} \right)}{dx} \right)}{dx} \text{ „=“ } \frac{d^n}{(dx)^n} \text{ „=“ } \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} f(x) \text{ „=“ } \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x)$$

- Bezeichnungen:

$$f^{(k)}(x) := \frac{d^k}{dx^k} f(x) := \left(\frac{d}{dx} \right)^k f(x) := \frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x)$$

- f k -mal differenzierbar $:\Leftrightarrow f$ k -mal differenzierbar in jedem $x \in D$.
- f k -mal stetig differenzierbar $:\Leftrightarrow f$ k -mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig.

16

Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Sei D ein metrischer Raum, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in D$. f hat in $x \dots$

- lokales Maximum
: $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in B(x, \varepsilon)$
- (globales) Maximum:
: $\Leftrightarrow f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in D$
- (globales) Minimum:
: $\Leftrightarrow f(\xi) \geq f(x)$ für alle $\xi \in D$
- striktes Minimum/Maximum: $f(\xi) \neq f(x)$ für $\xi \neq x$
- Extremum: Minimum oder Maximum

16.1 Satz: Ableitung an der Stelle des Extremums

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum, f sei differenzierbar in x . Dann $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ohne Einschränkung: „Maximum“, $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in (a, b)$
- Dann gilt:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \\f'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \geq 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0\end{aligned}$$

16.2 Satz von Rolle

Sei $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b) = 0$, f in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ist $f = 0$ (Nullfunktion!), dann klar.
- Sei $f \neq 0$. Dann gibt es $y \in (a, b)$ mit $f(y) \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $f(y) > 0$. Nach Satz 12.3 hat f eine Maximumstelle $x \in [a, b]$ (also $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in [a, b]$) und $f(x) > 0$, also insbesondere $x \neq a, b$. Also $x \in (a, b)$. Aus Satz 16.1 folgt $f'(x) = 0$.

16.3 Folgerung: Mittelwertsatz

Sei $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, f in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis:

- Es sei $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Dann $F(a) = F(b) = 0$.
- Aus Satz 16.2 folgt:

$$\exists x \in (a, b) : 0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Anschauung: $f \hat{=}$ zurückgelegter Weg. $f' \hat{=}$ Geschwindigkeit. Mittelwertsatz $\hat{=}$ an mindestens einen Zeitpunkt fährt man so schnell wie die Durchschnittsgeschwindigkeit.

16.4 Folgerung: Monotonie

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, f in (a, b) differenzierbar.

1. Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann f konstant.
2. Sei $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f (streng) monoton wachsend.

Beweis:

- Sei $a \leq x < y \leq b$. Folgerung 16.3 auf $[x, y]$ angewendet ergibt:

$$\exists \xi \in (x, y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x)$$

1. Es folgt: $f(x) = f(y)$.
2. Es folgt:

$$f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

16.5 Folgerung: striktes Extrema

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$, f zweimal differenzierbar in x . Es gelte:

$$f'(x) = 0 \quad f''(x) > 0$$

Dann besitzt f in x ein striktes lokales Minimum. (Es folgt: Hat f in x lokales Maximum, dann $f'(x) = 0$ und $f''(x) \leq 0$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: f differenzierbar auf (a, b) .
- Aus $f''(x) > 0$ folgt:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b), \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0 \text{ für } 0 < |\xi - x| < \varepsilon$$

- Damit $f'(\xi) < 0$ für $x - \varepsilon < \xi < x$ und $f'(\xi) > 0$ für $x < \xi < x + \varepsilon$. Aus Folgerung 16.4.b): f streng monoton fallend auf $(x - \varepsilon, x]$ und f streng monoton steigend auf $[x, x + \varepsilon)$.

16.6 Folgerung: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Beweis:

- Betrachte

$$F(y) := [f(b) - f(a)] \cdot [g(y) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(y) - f(a)]$$

- Dann Satz 16.2 ($F(b) = F(a) = 0$) mit

$$F'(y) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(y) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(y)$$

16.7 Folgerung: Regel von de l'Hôpital

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Außerdem $f(a) = g(a) = 0$. Es existiere $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis:

- O.b.d.A ist $g(x) \neq 0$ für $x \neq a$
- Sei (x_n) in (a, b) mit $x_n \rightarrow a$. Nach Folgerung 16.6 gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \xi_n \in (a, x_n) \text{ mit } \underbrace{(f(x_n) - f(a))}_{=0} \cdot g'(\xi_n) = (g(x_n) - \underbrace{g(a)}_{=0}) \cdot f'(\xi_n)$$

wobei $\xi_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$). Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \\ &\Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\stackrel{13.5}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \end{aligned}$$

- Also ist $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ konvergent (nach 13.5) und $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dots$

Beispiele:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-1 + \cos x}{x \cdot \cos x + \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin x}{-x \cdot \sin x + 2 \cos x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Regel gilt auch für $\lim_{x \rightarrow \infty} \dots$ und für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ (Übung)

Beispiele:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \cdot \ln x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Also: $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$.

17

Das Riemann-Integral

Integral einer positiven Funktion $\hat{=}$ Fläche unter dem Graphen von f

17.1 Definition

17.1.1 Treppenfunktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Eine Funktion $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, sodass φ auf (x_{k-1}, x_k) konstant ist für $k = 1, \dots, n$. ($T[a, b]$ = Menge der Treppenfunktionen)

- Behauptung: $T[a, b]$ ist ein Vektorraum. (Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a, b]$)
- Beweis: Dazu zu zeigen:
 1. $0 \in T[a, b]$ (Nullfunktion) Klar.
 2. $\varphi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \varphi \in T[a, b]$ Klar.
 3. $\varphi, \psi \in T[a, b] \Rightarrow \varphi + \psi \in T[a, b]$
 - Unterteilung für $\varphi: a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{n'} = b$
 - Unterteilung für $\psi: a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_{n''} = b$
 - Seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ so, dass $\{x_0, \dots, x_n\} = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_{n'}\} \cup \{x''_0, x''_1, \dots, x''_{n''}\}$. Dann sind φ, ψ konstant auf (x_{k-1}, x_k) für alle $k = 1, \dots, n$, damit auch $\varphi + \psi$.

17.1.2 Integral

Sei $\varphi \in T[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\varphi(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ für $k = 1, \dots, n$. Wir definieren

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

als das Integral von a nach b über die Treppenfunktion φ . Es ist Noch zu zeigen, dass die Definition „wohldefiniert“ ist, d.h. rechte Seite unabhängig von Unterteilung.

- Seien dazu $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{n'} = b$ so, dass $\varphi(x) = c'_k$ für $x'_{k-1} < x < x'_k$ für $k = 1, \dots, n'$.

- Fall 1: Zweite Unterteilung ist feiner als erste, d.h. $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{x'_0, \dots, x'_{n'}\}$. Dann gibt es $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_n = n'$ mit $x_k = x'_{j_k}$ ($k = 1, \dots, n$). Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n'} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (x'_j - x'_{j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

- Fall 2: allgemein
Wähle Unterteilung, die feiner als $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und als $a = x'_0 < \dots < x'_{n'} = b$.
Dann mit 1. Schritt:

$$\sum_{\text{1. Unterteilung}} = \sum_{\text{Verfeinerung}} = \sum_{\text{2. Unterteilung}}$$

17.1.3 Satz: Linearität

Es seien X, Y Vektorräume über \mathbb{K} . $A: X \rightarrow Y$ heißt linear

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad &\forall x, y \in X : A(x + y) = A(x) + A(y) \\ &\forall x \in X, \lambda \in K : A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x) \end{aligned}$$

Seien $\varphi, \psi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

1.
$$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

2.
$$\int_a^b (\lambda \cdot \psi)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$$

d.h. die Abbildung $\delta: T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$ ist linear.

3. Aus $\varphi \geq 0$ (d.h. $\forall x : \varphi(x) \geq 0$) folgt $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$

4. Außerdem

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx \geq \left| \int_a^b \varphi(x)dx \right|$$

Beweis:

- Einfach, für a) Unterteilung verwenden, die für φ und ψ gilt:

$$\varphi(x) = c_k \quad \psi(x) = d_k \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \quad k = 1, \dots, n$$

Dann:

$$\sum_{k=1}^n (c_k + d_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n d_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Bemerkung: Letzte Eigenschaft impliziert Monotonie: $\varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq \psi$. Dann:

$$\begin{aligned} \int (\psi - \varphi)(x)dx &= \int \psi(x)dx - \int \varphi(x)dx \geq 0 \\ \Rightarrow \int \varphi(x)dx &\leq \int \psi(x)dx \end{aligned}$$

17.1.4 Riemann-Integrierbarkeit

- Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann

$$\overline{\int} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx; \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\}$$

das Oberintegral von f .

$$\underline{\int} f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \psi(x) dx; \psi \in T[a, b], \psi \leq f \right\}$$

das Unterintegral von f . Offenbar: (Monotonie des Treppenintegrals)

$$-\infty < \underline{\int} f(x) dx < \overline{\int} f(x) dx < \infty$$

- f heißt Riemann-Integrierbar, wenn

$$\underline{\int} f(x) dx = \overline{\int} f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

- $[a, b]$: Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen

- Beispiele:

1. Für $\varphi \in T[a, b]$ gilt:

$$\overline{\int} \varphi(x) dx = \underline{\int} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

(vorher definiertes Integral auf den Treppenfunktionen)

Also: $T[a, b] \subseteq R[a, b]$

2. Dirichlet-Funktion: Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\overline{\int} f(x) dx = 1$$

$$\underline{\int} f(x) dx = 0$$

Also $f \notin R[0, 1]$

- Bemerkung: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (Übung)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq f \leq \psi, \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

17.2 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow f \in R[a, b]$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen:

$$\exists \varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq f \leq \psi, \max_{a \leq x \leq b} (\psi(x) - \varphi(x)) \leq \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \int (\psi(x) - \varphi(x)) dx &\leq \int_a^b \max_{a \leq x \leq b} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon' dx \\ &= \varepsilon' \cdot (b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- f stetig auf $[a, b]$, also f gleichmäßig stetig. Also gibt es $\delta > 0$: Für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon'$.
- Seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $x_j - x_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \inf\{f(y) \mid x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \psi(x) &:= \sup\{f(y) \mid x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon'$ für alle $x \in [a, b]$.

17.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f \in R[a, b]$

Beweis: (nur für monoton wachsend)

- Sei $n \in \mathbb{N}$,

$$x_j := a + \frac{(b-a)}{n} \cdot j \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

- Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{j-1}) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \psi(x) &:= f(x_j) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$ (f monoton).

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &= \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\int_0^a x \, dx$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &:= \begin{cases} a \cdot j \cdot \frac{1}{n} & \text{für } a \cdot \frac{j-1}{n} \leq x \leq a \cdot \frac{j}{n}, j = 1, \dots, n \\ a & \text{für } x = a \end{cases} \\ \Rightarrow \int_0^a \varphi_n(x) \, dx &= \sum_{j=1}^n a \cdot j \cdot \frac{1}{n} \cdot a \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \rightarrow \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow \int_0^a x \, dx &= \frac{1}{2} a^2 \end{aligned}$$

17.4 Satz: Riemann-Summen

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass für jede δ -feine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ („Feinheit“: $\max_{j=1, \dots, n} (x_j - x_{j-1}) \leq \delta$) und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, \dots, n$) gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) \, dx \leq \varepsilon$. Es gibt $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, sodass φ und ψ konstant auf $[t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, \dots, m$)
- Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{m}$. Sei nun $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $\max_{j=1, \dots, n} (x_j - x_{j-1}) < \delta$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ ($j=1, \dots, n$)

$$F(x) := \begin{cases} f(\xi_j) & \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j) \ (j = 1, \dots, n) \\ f(x_j) & \text{für } x = x_j \ (j = 0, \dots, n) \end{cases}$$

Dann $F \in T[a, b]$ und

$$\int_a^b F(x) \, dx = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

- Sei

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{\substack{k \in \{0, \dots, m\} \\ t_k \in [x_{j-1}, x_j]}} \{(x_{j-1}, x_j)\} \\ M &:= \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} (< \infty) \\ \chi(x) &:= \begin{cases} 2M & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

A ist die Vereinigung von maximal $2m$ Intervallen.

- Dann $\chi \in T[a, b]$, $\varphi - \chi \leq F \leq \psi + \chi$, $\varphi - \chi \leq f \leq \psi + \chi$. sowieso:

$$\begin{aligned} \int (\varphi - \chi) &\leq \int F \leq \int \psi + \chi \\ \int (\varphi - \chi) &\leq \int f \leq \int \psi + \chi \\ \Rightarrow \int ((\psi + \chi) - (\varphi - \chi)) &= \int (\psi - \varphi) + 2 \cdot \int \chi \\ &\leq \varepsilon + 2 \cdot 2m \cdot \delta \cdot M \\ &= \varepsilon \cdot (1 + 4M) \\ \Rightarrow \left| \int f - \sum_{j=1}^f (\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| &\leq \varepsilon \cdot (1 + 4M) \end{aligned}$$

17.5 Hilfssatz: Rechenregeln für Ober-/Unterintegrale

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

$$\begin{aligned} \overline{\int} \lambda \cdot f(x) \, dx &= \lambda \cdot \overline{\int} f(x) \, dx \quad \text{für } \lambda \geq 0 \\ \overline{\int} (f(x) + g(x)) \, dx &\leq \overline{\int} f(x) \, dx + \overline{\int} g(x) \, dx \\ \underline{\int} f(x) \, dx &= -\overline{\int} (-f(x)) \, dx \end{aligned}$$

Beweis:

1. • Klar für $\lambda = 0$
- Sei $\lambda > 0$. Ist $\varphi \in T[a, b]$, $\varphi \geq f$, dann $\lambda \cdot \varphi \geq \lambda \cdot f$. Daher:

$$\begin{aligned} \overline{\int} \lambda \cdot f(x) \, dx &\leq \int \lambda \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= \lambda \cdot \int \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned} \overline{\int} \lambda \cdot f(x) \, dx &\leq \lambda \cdot \overline{\int} f(x) \, dx \\ &= \lambda \cdot \overline{\int} \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot f(x) \, dx \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{\int} \lambda \cdot f(x) \, dx \\ &= \overline{\int} \lambda \cdot f(x) \, dx \end{aligned}$$

Also alle „=“.

2. • Seien $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $f \leq \varphi$, $g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \psi + \varphi (\in T[a, b])$. Damit:

$$\begin{aligned} \overline{\int} f + g &\leq \int \varphi + \psi \\ &= \int \varphi + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} (f + g) - \int \psi &\leq \int \varphi \end{aligned}$$

- Infimum über φ :

$$\begin{aligned} \overline{\int} (f + g) - \int \psi &\leq \overline{\int} f \\ \Rightarrow \overline{\int} (f + g) - \overline{\int} f &\leq \int \psi \end{aligned}$$

- Infimum über ψ :

$$\overline{\int} (f + g) - \overline{\int} f \leq \overline{\int} g$$

3. $\psi \in T[a, b]$:

$$\psi \leq f \Leftrightarrow -f \leq -\psi$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \underline{\int} f(x) \, dx &= \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \leq f, \varphi \in T[a, b] \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \varphi \mid -\varphi \geq -f, \varphi \in T[a, b] \right\} \\ &= \sup \left\{ \int -\psi \mid \psi \geq -f, \psi \in T[a, b] \right\} \\ &\stackrel{17.1}{=} \sup \left\{ -\int \psi \mid \psi \geq -f, \psi \in T[a, b] \right\} \\ &= -\inf \left\{ \int \psi \mid \psi \geq -f, \psi \in T[a, b] \right\} \\ &= -\overline{\int} (-f)(x) \, dx \end{aligned}$$

17.6 Satz: Linearität des Integrals

Seien $f, g \in R[a, b]$. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f \in R[a, b]$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt:

1.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

2.

$$\int_a^b (\lambda \cdot f(x)) \, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

3. Monotonie des Integrals:

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

Beweis:

- Mit Hilfssatz 17.5 folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\int} f + \underline{\int} g &= -\left(\overline{\int} (-f) + \overline{\int} (-g) \right) \\ &\leq -\overline{\int} (-f - g) \\ &= \underline{\int} f + g \leq \overline{\int} (f + g) \\ &\leq \overline{\int} f + \overline{\int} g \end{aligned}$$

- Aus $\overline{\int} f = \int f = \underline{\int} f$ und $\overline{\int} g = \int g = \underline{\int} g$ folgt Gleichheit, also $(f + g) \in R[a, b]$.
- Rest einfach mit Hilfssatz 17.5
- $\Rightarrow R[a, b]$ ist ein Vektorraum

17.7 Folgerung: Positiv-/Negativteil

Sei $f \in R[a, b]$. Dann gilt $f^+, f^-, |f| \in R[a, b]$ wobei:

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\{f(x), 0\} && \text{Positivteil von } f \\ f^-(x) &:= (-f)^+ && \text{Negativteil von } f \\ |f| &:= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \\ &\leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gilt $\varphi^+, \psi^+ \in T[a, b]$, $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$, $0 \leq \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$. Somit gilt:

$$\int(\psi^+ - \varphi^+) \leq \int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$$

Aus Riemannschen Integrierbarkeitskriterium: $f^+ \in R[a, b]$.

- Damit auch $f^- = -(f - f^+)$ und $|f| \in R[a, b]$ nach Satz 17.6.
- Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

$$\pm \int f(x) dx \leq \int |f(x)| dx$$

damit erste Ungleichung. Für die 2. Ungleichung $|f| \leq \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\}$

17.8 Satz: „Aufsplitten“ von Integralen

Sei $a < b < c$, $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar genau dann, wenn $f \in R[a, c]$. Dann gilt:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Beweis: einfach

Man setzt:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &:= 0 \\ \int_a^b f(x) dx &:= - \int_b^a f(x) dx \quad \text{für } b < a \end{aligned}$$

18

Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $F, f: I \rightarrow \mathbb{R}$. F heißt Stammfunktion von f , wenn F differenzierbar und $F' = f$.
- Sind F, G Stammfunktionen von f , so gibt es $C \in \mathbb{R}$ sodass gilt:

$$F' - G' = 0 \Rightarrow (F - G)' = 0 \Rightarrow F - G = \text{const}(C) \Rightarrow F = G + \text{const}(C)$$

wegen Folgerung 16.4a), d.h. verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

18.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar, F Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: |F(t)|_{t=a}^b =: F(t)|_{t=a}^b =: F|_a^b$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gibt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sodass φ, ψ auf (x_{k-1}, x_k) konstant für $k = 1, \dots, n$. Dann:

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1})$$

Nach Mittelwertsatz: $\exists \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, ($j = 1, \dots, n$) mit:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n F'(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

- Aus $\varphi(\xi_j) \leq f(\xi_j) \leq \psi(\xi_j)$ für $j = 1, \dots, n$ folgt:

$$\int \varphi \leq \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})}_{F(b) - F(a)} \leq \int \psi$$

- Aber auch $\int \varphi \leq \int f \leq \int \psi$. ($\int \varphi, \int \psi$) Intervall mit Länge $\leq \varepsilon$. Also $|\int f - (F(b) - F(a))| \leq \varepsilon$.

Beispiele:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dann:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot x^{\alpha+1} \Big|_a^b$$

Hierbei:

- Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$: $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig
- Für $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq -2$: $a, b > 0$ oder $a, b < 0$
- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$: $a, b > 0$

2.

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_a^b & \text{für } a, b > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b & \text{für } a, b < 0 \end{cases}$$

18.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(y) dy \quad \text{für } x \in I$$

Dann F differenzierbar und $F' = f$.

Beweis:

- Sei $x \in I, h \in \mathbb{R}, h \neq 0, x + h \in I$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot (F(x+h) - F(x)) - f(x) &\stackrel{18.1}{=} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) dy \right) - f(x) \\ &\stackrel{17.8}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

- Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(y) - f(x)) dy \right| &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup\{|f(y) - f(x)|; |y - x| \leq |h|\} \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

... da f in x stetig.

Bemerkung:

- Besitzt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F , so ist das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ die Menge aller Stammfunktionen.

$$\int f(x) dx := \{F \mid F' = f\}$$

- Falls c die Menge aller Konstanten Funktionen von I nach \mathbb{R} sind dann gilt:

$$\int f(x) dx = F + c \quad \left(\text{für ein } F \in \int f(x) dx \right)$$

$$N + M := \{n + m \mid n \in N \wedge m \in M\}$$

$$f + M := \{f\} + M$$

usw.

Beispiele

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln \circ \text{abs} + c$ mit Definitionsbereich ohne 0, Schreibe der Einfachheit halber wieder $\ln|x|$ für $x \neq 0$

2. Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \int \sin x \, dx &= -\cos x \\ \int \cos x \, dx &= \sin x \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

3. Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \int \exp x \, dx &= \exp x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \arcsin x = -\arccos x \quad \text{für } |x| < 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx &= \text{arcosh } x \quad \text{für } |x| > 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx &= \text{arsinh } x \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x \end{aligned}$$

Letzteres nur auf Intervallen ohne Nullstellen des \cos .

4. $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ auf Intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Partialbruchzerlegung:

$$(1-x^2) = (1-x) \cdot (1+x)$$

Gesucht sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

Lösung: $\alpha = \beta = 0,5$. Damit:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) \\ &\stackrel{13.2.2.3}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\ &= \begin{cases} \text{artanh } x & \text{für } |x| > 1 \\ \text{arcoth } x & \text{für } |x| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

18.3 Satz: Substitutionsregel (Kettenregel rückwärts)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([a, b]) \subseteq I$. Dann:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Rechenmethode: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) \cdot dt$

Beweis:

- Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von f . Für $F \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

- Aus Satz 18.1:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= (F \circ \varphi)(t) \Big|_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(x) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx\end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$\int_a^b f(t+c) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx \quad x = t+c = \varphi(t)$$

2.

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(b)} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_u^v \cos^2 t dt$$

mit $x = \sin t$, $dx = \cos t \cdot dt$, $u = \arcsin a$, $v = \arcsin b$. Fortsetzung Lösungsweg siehe Beispiele partielle Integration.

18.4 Satz: Partielle Integration

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, Stammfunktion G . Dann:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = f \cdot G - \int f'(x) \cdot G(x) dx$$

Beweis:

$$\begin{aligned}H \in \left(f \cdot G - \int f'(x) \cdot G(x) dx \right) &\Leftrightarrow \forall x \in [a, b]: H'(x) = f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot G'(x) - f'(x) \cdot G(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [a, b]: H'(x) = f(x) \cdot g(x) \\ &\Leftrightarrow H \in \left(\int f(x) \cdot g(x) dx \right)\end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot 1 dx &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \cdot (\ln x - 1)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int \arctan x \cdot 1 \, dx &= (\arctan x) \cdot x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \, dx \\ &\stackrel{\text{später}}{=} x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Dabei wird die Substitutionsregel genutzt mit $y = 1 + x^2$, $dy = 2x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} 2x \, dx = \int \frac{1}{2y} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t \, dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t \, dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \cos^2 t \\ \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels für Substitutionsregel:

$$\int_u^v \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\arcsin|_a^b + \sqrt{1-x^2} \cdot x|_a^b)$$

Insbesondere für $a = -1$, $b = 1$:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

19

Uneigentliche Integrale

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oder $b = \infty$. Sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, r]$ mit $a < r < b$ integrierbar. Falls

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx$$

existiert, heißt f auf $[a, b)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar. ($\int_a^b f(x) dx$ ist konvergent.) Analog für $-\infty \leq a < b < \infty$, $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ ist konvergent für $\alpha > 1$, nicht konvergent für $\alpha \leq 1$

Beweis: Für $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^r \frac{1}{x^\alpha} dx &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha} \Big|_1^r \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot (r^{1-\alpha} - 1) \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^r \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty)$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergent für $\alpha < 1$, nicht konvergent für $\alpha \geq 1$.
3. $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx := \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ nicht konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$
- 4.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &:= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} (-\arctan r) + \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan r \\ &= \pi \end{aligned}$$

5. $\int_{-\infty}^\infty \sin x dx = ?$. Es existiert zwar $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin x dx = 0$, aber

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \sin x dx = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \cos r$$

nicht. Damit ist auch $\int_{-\infty}^\infty \sin x dx$ nicht definiert.

19.1 Satz: Integralvergleichskriterium für Reihen

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent}$$

Beweis:

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=2}^n f(j) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$

- Daher $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ konvergent

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n f(j) \right)_n \text{ beschränkt} \\ &\Leftrightarrow \left(\int_1^n f(x) dx \right)_n \text{ beschränkt} \\ &\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent} \quad \left(r \mapsto \int_1^r f(x) dx \text{ monoton wachsend} \right) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Beweis: $\int_1^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} dx$ konvergent für $\alpha > 1$ (siehe oben)

19.2 Satz: (Euler'sche) Gamma-Funktion

Für $x > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

konvergent. $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Euler'sche) Gamma-Funktion. Es gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für alle } x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Für $0 < t \leq 1$ gilt $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$. Damit ist $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dx$ konvergent. Für $1 \leq t \leq \infty$ gilt:

$$0 < t^{x-1} e^{-t} = \underbrace{t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \leq C_x e^{-\frac{t}{2}}$$

für ein $C_x > 0$. Damit ist $\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ konvergent, denn für $\alpha > 0$ ist $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$. Die beiden letzten Gleichungen gelten wegen

$$\int_{r'}^r t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_{r'}^r + \int_{r'}^r x t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma(x+1) = 0 + x\Gamma(x)$ durch Grenzübergänge $r \rightarrow \infty$ und $r' \rightarrow 0$ und nach Induktion:

$$\Gamma(0+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

Bemerkung:

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ Damit kann man $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ berechnen. Wir werden später in Kapitel Transformationsformel das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ berechnen und damit auch $\Gamma(\frac{1}{2})$.
- Die Gammafunktion „interpoliert“ die Fakultät. z.B. wichtig für die Berechnung des Volumens der n -dimensionalen Einheitskugel.

20

Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

- Sei K eine Menge, (M, d) ein metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: K \rightarrow M$, $f: K \rightarrow M$.

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ punktweise} & \Leftrightarrow \forall x \in K : f_n(x) \rightarrow f(x) \\ & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in K \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in K \quad \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

- Ist $g: K \rightarrow \mathbb{K}$ so definieren wir

$$\|g\|_K := \sup\{|g(x)|; x \in K\}$$

die Supremumsnorm.

- Bemerkungen:

1. g beschränkt $\Leftrightarrow \|g\|_K < \infty$
2. Im Metrischen Raum (N, e) mit $N := \{f \mid f: K \rightarrow M\}$ und $e(x, y) := \|x - y\|_K$

$$f_n \rightarrow f \text{ punktweise} \Leftrightarrow \lim f_n = f$$

3.

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} & \Leftrightarrow \sup_{x \in K} d(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ & \Leftrightarrow \|f_n - f\|_K \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{wenn } M = \mathbb{K} \end{aligned}$$

4. $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ punktweise (i.A. \Leftarrow)

Beispiel: $K = [0, 1]$

$$f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$f_n \rightarrow f$ punktweise. Aber $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), also nicht $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig

20.1 Satz: Gleichmäßige Konvergenz + Stetigkeit

Seien (K, c) und (M, d) metrische Räume, $f_n: K \rightarrow M$ stetig für $n \in \mathbb{N}$, $f: K \rightarrow M$, $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig. Dann f stetig.

Beweis:

- Sei $x \in K$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f(y), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in K$.
- Da f_n stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass für alle $y \in K$ mit $c(y, x) < \delta$: $d(f_n(y), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

- Für y mit $c(y, x) < \delta$ folgt:

$$\begin{aligned} d(f(y), f(x)) &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f(x)) \\ &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also f stetig in x .

20.2 Satz: Konvergenzkriterium von Weierstraß

Sei K eine Menge, (f_n) eine Folge in $B(K) := \{f: K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ beschränkt}\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty \quad \left(\Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sei } \|\cdot\|_K\text{-absolut konvergent} \right)$$

und F sei durch

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in K$$

definiert. Dann sind die Folgen $(\sum_{k=0}^n f_k(x))_n$ absolut konvergent (damit ist F dann wohldefiniert) und

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k \right)_n \rightarrow F \quad \text{gleichmäßig}$$

Beweis:

- Absolute Konvergenz: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq \|f_n\|_K \Rightarrow \sum_{n=1}^n f_n(x) \leq \sum_{n=1}^n \|f_n\|_K$ und $(\sum_{n=1}^n \|f_n\|_K)_n$ konvergent, dann Majorantenkriterium
- Für $x \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\stackrel{6.4.1}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} \left\| F - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_K &= \sup_{x \in K} \left| F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$ gleichmäßig konvergent auf \mathbb{R} ($\|\cdot\|_K$ -absolut konvergent), damit stetig.

20.3 Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

mit (c_n) in \mathbb{K} , Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{K}$ für $x \in \mathbb{K}$. $0^0 := 1$

Beispiele:

1. Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

20.3.1 Satz: Konvergenzradius

Sei

$$r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

mit $\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty$. Dann gilt: Für alle $\varrho \in (0, r)$ konvergiert die Potenzreihe $\| \cdot \|_{B[a, \varrho]}$ -absolut, insbesondere gleichmäßig auf $B[a, \varrho]$. Für x mit $|x - a| > r$ ist die Potenzreihe divergent. r heißt Konvergenzradius von der Potenzreihe, Cauchy-Hadamard-Formel für r .

Beweis:

- Für $r = 0$ keine Konvergenz zu zeigen. Sei $f_n(x) := c_n \cdot (x - a)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $0 < \varrho < r$,

$$1 > \varrho \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |\varrho^n \cdot c_n|^{\frac{1}{n}}$$

Nach Wurzelkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^n < \infty$.

Aus

$$\|f_n\|_{B[a, \varrho]} = \sup_{|x-a| \leq \varrho} |c_n \cdot (x - a)^n| = |c_n| \cdot \sup_{|x-a| \leq \varrho} |x - a|^n = |c_n| \cdot \varrho^n$$

folgt die Behauptung $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{B[a, \varrho]} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^n < \infty$.

- Sei $|x - a| > r$. Dann:

$$\begin{aligned} 1 &< |x - a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_n \cdot (x - a)^n|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Daher gibt es $1 < q$ Teilfolge $|c_{n_j} \cdot (x - a)^{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} > q$. Also $(c_n \cdot (x - a)^n)_n > q^n$ unbeschränkt.

Bemerkung: Es folgt:

$$\begin{aligned} r &= \sup \left\{ |x - a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n \text{ konvergent/beschränkt} \right\} \\ &= \sup \{ \varrho \geq 0 \mid (c_n \cdot \varrho^n)_n \text{ beschränkt} \} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Exponentialreihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius ∞ , konvergiert gleichmäßig auf Kreisen $B[0, \varrho]$ für $0 < \varrho < \infty$, nicht gleichmäßig auf \mathbb{C} (oder \mathbb{R}).

Bemerkung:

- $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Für jedes $\varrho \in (0, r)$ ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent auf $B[0, \varrho]$, also

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

stetig auf $B(a, r)$ nach Satz 20.1.

Es gibt keine Konvergenzaussage für $|x - a| = r$!

Beispiele:

	$z = -1$	$z = 1$
$\sum n z^n$	Divergenz	Divergenz
$\sum \frac{1}{n} z^n$	Konvergenz	Divergenz
$\sum \frac{1}{n^2} z^n$	absolute Konvergenz	absolute Konvergenz

20.4 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) stetig, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig. Dann:

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \right)$$

Beweis:

- f stetig nach Satz 20.1. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\stackrel{17.1.3.1}{=} \left| \int_a^b (f_n - f)(x) dx \right| \\ &\stackrel{17.1.3.4}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\stackrel{17.1.3.3}{\leq} \int_a^b \|f_n - f\|_{[a,b]} dx \\ &= (b - a) \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ gilt i.a. nicht bei punktweiser Konvergenz

Beispiel:

- Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n - 2n^2 x & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $f_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) punktweise, aber $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$ also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=0} dx$$

20.5 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n \rightarrow f \text{ punktweise} \quad f'_n \rightarrow g \text{ gleichmäßig}$$

Dann ist f stetig differenzierbar und

$$f' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' &\stackrel{18.1}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(a) + \int_a^{\cdot} f'_n(y) dy \right) \right)' \\ &\stackrel{20.1}{=} \left(f(a) + \int_a^{\cdot} g(y) dy \right)' \\ &\stackrel{18.2}{=} 0 + g \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \end{aligned}$$

- Bemerkung: $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig, f_n, f stetig differenzierbar $\not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$
- Beispiel:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n} \cdot \sin nx \\ f_n &\rightarrow 0 = f \quad (\text{gleichmäßig}) \\ f'_n(x) &= \cos nx \not\rightarrow 0 = f' \end{aligned}$$

20.6 Folgerung: Differentiation der Potenzreihe

Seien $a \in \mathbb{R}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in \mathbb{R} und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann f in $(a - r, a + r)$ differenzierbar,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1}$$

Der Konvergenzradius dieser „differenzierten“ Potenzreihe ist auch r .

Beweis:

- $\sum n \cdot c_n \cdot (x - a)^n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1}$ konvergent und

$$\limsup \sqrt[n]{n \cdot |c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

da $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). Deshalb gleicher Konvergenzradius.

-

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n c_k \cdot (x - a)^k = \sum_{k=1}^n k \cdot c_k \cdot (x - a)^{k-1}$$

Für $0 < \varrho < r$ ist wegen 20.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1}$ gleichmäßig stetig auf $[a - \varrho, a + \varrho]$. Wende Satz 20.5 mit diesem Interval an. Daher 1. Behauptung auf $[a - \varrho, a + \varrho]$.

Beispiele:

1.

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

2.

$$\sin'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

3. Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

20.7 Folgerung: beliebige Differenzierbarkeit der Potenzreihe

Die reelle Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f: (a-r, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig (oft) differenzierbar und

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

Beweis:

- Beliebige Differenzierbarkeit mit Folgerung 20.6 und Induktion.
- Gleichung mit Induktion:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-k} \\ \Rightarrow f^{(k)}(a) &= k! \cdot c_k \end{aligned}$$

Es folgt: Ist eine Funktion f durch eine Potenzreihe darstellbar, dann sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. (Koeffizientenvergleich)

Frage:

Sei $f: (a-r, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Folgt daraus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$?
Nein!

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

Dann f beliebig oft differenzierbar, $f^{(n)}(0) = 0$ Für $x > 0$ ist $f^{(k)}(x) = p_k^{(1/x)} e^{-\frac{1}{x}}$ mit Polynom p_k vom Grad k , aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n = 0 \neq f(x)$$

Teil II
Analysis II

21

Taylor'sche Formel und Taylor-Reihe

Sei $f: (a - r, a + r) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a . Dann

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x - a)}_{\text{affin linear}} + |x - a| \cdot \underbrace{\eta(x)}_{\rightarrow 0(x \rightarrow a)}$$

nach Satz 15.3. (Weierstraßsche Zerlegungsformel)

21.1 Satz: Erweiterung der Weierstraß'schen Zerlegungsformel

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n - 1)$ -mal differenzierbar, $a \in I$, $f^{(n-1)}$ differenzierbar in a .
Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j \right) + |x - a|^n \cdot \eta(x)$$

wobei $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$.

Beweis:

- Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j \right) \\ G(x) &= (x - a)^n \end{aligned}$$

- Dann:

$$\left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j \right)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{f^{(j+m)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j$$

- Nach der Regel von de l'Hôpital gilt mit $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a) \cdot (x - a)}{n! \cdot (x - a)} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} - f^{(n)}(a) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit $F(x) = |G(x)| \cdot \eta(x)$, $\eta(x) \rightarrow 0(x \rightarrow a)$.

21.2 Satz: Taylor'sche Formel

Seien $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, $f: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $[a, x]$ n -mal differenzierbar, auf (a, x) $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j \right) + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{n+1}$$

für ein geeignetes $\varrho \in (a, x)$. (Lagrange-Restglied)

Beweis:

1. Vorbetrachtung

- Seien $F, G: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $[a, x]$ n -mal differenzierbar, auf (a, x) $(n + 1)$ -mal differenzierbar, $F(a) = G(a) = 0$, $G'(y) \neq 0$ für $a < y < x$. Nach verallgemeinertem Mittelwertsatz (Folgerung 16.6) gibt es $\varrho' \in (a, x)$ mit

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')}$$

- Gilt auch $F'(a) = G'(a) = 0$ und ebenso $G''(y) \neq 0$ für $a < y < x$, dann gibt es $\varrho'' \in (a, \varrho')$ mit

$$\frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')} = \frac{F''(\varrho'')}{G''(\varrho'')} = \dots = \frac{F^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}{G^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}$$

wobei $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \dots, n$ und $G^{(k)}(y) \neq 0$ für $k = 1, \dots, n + 1$ für $a < y < x$ vorausgesetzt sind.

2. Anwendung von (1) auf

$$\begin{aligned} F(y) &= f(y) - \sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (y - a)^j \right) \\ G(y) &= (y - a)^{n+1} \end{aligned}$$

- Die Voraussetzungen sind erfüllt. Also: Es gibt $\varrho \in (a, x)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F^{(n+1)}(\varrho)}{G^{(n+1)}(\varrho)} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n + 1)!} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{n+1} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Taylor-Formel gilt auch „nach links“.

21.3 Folgerung: Polynom

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -mal differenzierbar, $f^{(n+1)} = 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis:

- Sei $a \in I$. Dann $R_{n+1}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Nach Satz 21.2:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x - a)^j \right)$$

21.4 Satz: Integralrestglied

Seien Voraussetzungen wie in Satz 21.2, aber f auf $[a, x]$ (bzw. $]$) $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt die Taylor'sche Formel mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) - \underbrace{(x-t) \cdot f'(t)|_a^x}_{=f'(a) \cdot (x-a)} + \int_a^x (x-t) \cdot f''(t) dt \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) - \underbrace{\frac{(x-t)^2}{2} \cdot f''(t)|_a^x}_{=\frac{1}{2!} \cdot f''(a) \cdot (x-a)^2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt \\ &= \dots \text{Induktion} \end{aligned}$$

21.5 Taylor-Reihe

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt a .

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius kann 0 sein.
2. Falls Taylor-Reihe konvergiert, dann ist nicht notwendig $= f$.

Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f beliebig oft differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$. (Für $x > 0$ $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$). Daher $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k = 0 \neq f(x)$ für $x > 0$.

3. Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

dann ist diese Reihe auch die Taylor-Reihe nach Folgerung 20.7

4. Um zu zeigen: „Taylor-Reihe = Funktion“ muss man $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in I$ zeigen (nicht im Fall 3.)

Beispiel: Exponentialfunktion

- Taylor-Reihe nach 3.:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist Taylor-Reihe um Entwicklungspunkt a :

$$\exp(x) = \exp(a) \cdot \exp(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(a)}{n!} (x-a)^n$$

21.6 Satz: Logarithmusreihe

Für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = +\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Beweis:

- Falls $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+x)|_0^x \\ &\stackrel{15.6(1);18.1;15.5}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &\stackrel{6.1}{=} \int_0^x \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^k (-1)^n \cdot t^n}_{\text{glm. konv. auf } [-|x|, |x|]} \right) dt \quad \text{geom. Reihe} \\ &\stackrel{20.4}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^x \sum_{n=0}^k (-1)^n \cdot t^n dt \\ &\stackrel{17.6}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \int_0^x (-1)^n \cdot t^n dt \\ &\stackrel{18.1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

- Falls $x = 1$ gilt: Die Logarithmusreihe ist die Taylor-Reihe von $\ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt 0. Untersuche das Lagrange-Restglied

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \ln(1+x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \frac{1}{1+x} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot (x-0)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (0 < \xi < 1; 0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

Insbesondere: $+\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$ „schlecht“ konvergent. Benutze folgenden Trick: Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= +\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ \ln(1-x) &= -\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &\stackrel{13.2.2.3}{=} \ln(1+x) - \ln(1-x) = +\frac{2}{1}x^1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots \\ \Rightarrow \ln 2 &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\right) \end{aligned}$$

21.7 Satz: Arcus-Tangens-Reihe

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$\arctan x = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Beweis:

- Sei $|x| < 1$. Dann:

$$\begin{aligned} \arctan x &\stackrel{16.5 \ 4)}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (t^2)^n}_{\text{glm. konvergent auf } [-|x|, |x|]} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_{t=0}^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

- Für $x = \pm 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergent nach Leibniz-Kriterium. Genauer gilt für $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| &\leq \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Damit Reihe gleichmäßig konvergent auf $[-1, 1]$, somit stetig. Auch \arctan stetig. Damit auch gleich für $x = \pm 1$.

Insbesondere: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

21.8 Satz: Binomische Reihe

Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{0} &:= 1 \\ \binom{\alpha}{k+1} &:= \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k} \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $|x| < 1$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

Beweis:

- In Analysis I, Blatt 7, Aufgabe 49 gezeigt oder Analysis I, Blatt 10, Aufgabe 10.4:

$$b_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

konvergent für $|x| < 1$.

- Dann:

$$\begin{aligned} b'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\ (1+x) \cdot b'_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} + n \cdot \binom{\alpha}{n} \right) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \\ &= \alpha \cdot b_\alpha(x) \end{aligned}$$

- In Aufgabe auch gezeigt $b_\alpha(x) > 0$ für $|x| < 1$. Es folgt (Integration):

$$\begin{aligned} \frac{b'_\alpha(x)}{b_\alpha(x)} &= \frac{\alpha}{1+x} \\ \ln b_\alpha(x) &= \alpha \cdot \ln(1+x) + c \end{aligned}$$

Aus $b_\alpha(0) = 1$ folgt $c = 0$. Damit:

$$b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

21.9 Folgerung: Absolutbetrag

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2 - 1)^n$$

wobei die Reihe gleichmäßig auf $[-1, 1]$ konvergiert. ($|\cdot|$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ durch Polynome approximierbar.) Die Reihe ist keine Taylor-Reihe!

Beweis:

1. Es gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k < 0, \quad (k \geq 1)$$

2. Zeige, dass $g_n(y) := \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k$ gleichmäßig konvergent auf $[-1, 0]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $y \in (-1, 0]$ gilt:

$$g_n(y) = \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k |y|^k}_{<0} \geq \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \underbrace{(-1)^k \cdot |y|^k}_{=y^k} \stackrel{21.8}{=} (1+y)^{\frac{1}{2}} > 0$$

$g_n(y)$ ist ein Polynom und somit stetig, womit $g_n(-1) \geq 0$. Also $g_n(-1)$ und $g_n(y)$ monoton fallend in n und beschränkt somit konvergent.

Zur gleichmäßigen Konvergenz:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k \right\| &= \sup_{y \in [-1, 0]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k \right| \\ &\leq \sup_{y \in [-1, 0]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \right| \\ &= - \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

3. Für $x \in [-1, 1]$ ist $x^2 - 1 \in [-1, 0]$. Daher

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} = (1 + (x^2 - 1))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2 - 1)^n \end{aligned}$$

gleichmäßig konvergent für $|x| \leq 1$.

22

Topologie metrischer Räume, Kompaktheit

(X, d) metrischer Raum. Erinnerung:

- $U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$
- $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X \setminus A$ offen

Sei $\mathcal{T} := \{U \subseteq X; U \text{ offen}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

22.1 Satz: Eigenschaften offener Mengen

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Sind $U, V \in \mathcal{T}$, dann $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, dann $\bigcup \mathcal{S} := \{x | \exists a \in \mathcal{S} : x \in a\} \in \mathcal{T}$

Beweis:

1. Klar
2. Sei $x \in U \cap V$. Dann existieren $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$:

$$B(x, \varepsilon_1) \subseteq U \quad B(x, \varepsilon_2) \subseteq V$$

Mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt dann:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=1}^2 B(x, \varepsilon_j) \subseteq U \cap V$$

3. Sei $x \in \bigcup \mathcal{S}$. Dann existiert $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.

Bemerkungen:

- Aus 2. folgt: Endlicher Durchschnitt offener Mengen ist offen.
- Ist X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit 1., 2. und 3., dann heißt \mathcal{T} Topologie auf X und (X, \mathcal{T}) topologischer Raum.
- Unendlicher Durchschnitt offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen.

Bsp.: $[0, 1]$ in \mathbb{R} :

$$\underbrace{[0, 1]}_{\text{nicht offen}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}}$$

- \emptyset, X abgeschlossen und gleichzeitig offen. Endliche Vereinigung endlicher Mengen ist abgeschlossen, beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (Komplementbildung)

22.2 Komplement, Inneres, Rand, Abschluß

Sei $Y \subseteq X$ und (X, d) Metrischer Raum. Dann heißt

$$\dot{Y} := Y^\circ := \text{int}(Y) := \{x \in Y \mid \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq Y\} \quad (\subseteq Y)$$

Inneres oder offener Kern von Y ,

$$\bar{Y} := \text{cl}(Y) := \{x \in X \mid \forall r > 0 : Y \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \quad (\supseteq Y)$$

Abschluss oder abgeschlossene Hülle von Y und

$$\partial Y := \bar{Y} \setminus \dot{Y}$$

Rand von Y .

Beispiele:

1. $Y := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ in \mathbb{R}

$$\dot{Y} = \emptyset \quad \bar{Y} = [0, 1] \quad \partial Y = [0, 1]$$

2. Einheitskreis in \mathbb{R}^2 (links: mit Rand, rechts: ohne Rand)

$$\dot{Y} = B(0, 1) \quad \bar{Y} = B[0, 1] \quad \partial Y = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$$

22.2.1 Satz: Eigenschaften

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Dann:

1. \dot{Y} ist offen
2. Y offen $\Leftrightarrow Y = \dot{Y}$
3. $\bar{Y} = X \setminus \text{int}(X \setminus Y)$ und somit abgeschlossen
4. Y abgeschlossen $\Leftrightarrow Y = \bar{Y}$
5. ∂Y ist abgeschlossen. Es gilt:

$$\dot{Y} = Y \setminus \partial Y \quad \bar{Y} = Y \cup \partial Y$$

Beweis:

1. direkt aus Definition
2. „ \Rightarrow “: „ \subseteq “: Sei $x \in Y$. Da Y offen existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq Y$. Nach Definition des Inneren ist $y \in \dot{Y}$
3. Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= X \setminus X \setminus \bar{Y} \\ &= X \setminus \{x \in X \mid x \notin \{y \in X \mid \forall r > 0 : Y \cap B(y, r) \neq \emptyset\}\} \\ &= X \setminus \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{Y \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset}_{\Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus Y}\} \\ &= X \setminus \text{int}(X \setminus Y) \end{aligned}$$

4. Es gilt:

$$\begin{aligned} Y \text{ abgeschlossen} &\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} X \setminus Y \text{ offen} \\ &\stackrel{2.}{\Leftrightarrow} X \setminus Y = \text{int}(X \setminus Y) \\ &\stackrel{3.}{\Leftrightarrow} X \setminus Y = X \setminus \bar{Y} \\ &\stackrel{1,6,3}{\Leftrightarrow} Y = \bar{Y} \end{aligned}$$

5. $\partial Y \stackrel{\text{Def}}{=} \bar{Y} \setminus \dot{Y} \stackrel{1.6.4}{=} \bar{Y} \cap (X \setminus \dot{Y})$ ist Schnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen. Rest folgt aus $\dot{Y} \subseteq Y \subseteq \bar{Y}, \partial Y = \bar{Y} \setminus \dot{Y}$

22.3 Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Offene Überdeckung von X

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \text{ mit } \bigcup \mathcal{S} \left(= \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \right) = X$$

Dabei ist \mathcal{S} ein „System“ von offenen Mengen.

X heißt kompakt

- $:\Leftrightarrow$ Zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{S} gibt es $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$, \mathcal{F} endlich, mit $\bigcup \mathcal{F} = X$. (Kurz: Jede offene Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung.)
- \Leftrightarrow Ist \mathcal{R} ein System von abgeschlossenen Mengen mit der Endlichen-Durchschnitts-Eigenschaft, d.h. für alle $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$, \mathcal{E} endlich, gilt $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset$, so ist $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

Zu „ \Rightarrow “:

- Sei \mathcal{R} wie angenommen. Definiere $\mathcal{S} = \{X \setminus A; A \in \mathcal{R}\} \subseteq \mathcal{T}$. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ endlich. Dann:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \right) = X \setminus \underbrace{\left(\bigcap_{U \in \mathcal{F}} \underbrace{X \setminus U}_{\in \mathcal{R}} \right)}_{\substack{(*) \\ \neq \emptyset}} \neq X$$

(*) da \mathcal{R} die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft hat.

- Also $\bigcup \mathcal{F} \neq X$ für alle $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$. Damit gilt auch $\bigcup \mathcal{S} \neq X$ (X kompakt; Sonst gäbe es ein endliches $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ mit $\bigcup \mathcal{F} = X$). Daraus

$$\emptyset \neq X \setminus \bigcup \mathcal{S} = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} X \setminus U = \bigcap_{A \in \mathcal{R}} A = \bigcap \mathcal{R}$$

Verallgemeinerung: $A \subseteq X$ heißt kompakt

- $:\Leftrightarrow (A, d_A)$ ist kompakt, wobei d_A die auf A eingeschränkte Metrik ist.

22.3.1 Satz: Kompaktheit & Folgenkompaktheit

Für (X, d) äquivalent:

1. X ist kompakt.
2. X ist folgenkompakt. (Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. (12.4))

Beweis:

1. „1. \Rightarrow 2.“

- Sei (x_n) in X . Für $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n := \overline{\{x_j \mid j \geq n\}}$$

Dann hat $\mathcal{R} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft (Für $n_1 < \dots < n_k$ ist $\bigcap_{j=1}^k A_{n_j} = A_{n_k} \neq \emptyset$). Da X kompakt ist, ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ist abgeschlossen (22.1 Bemerkung 4), also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{22.2.1.3}{=} \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$, wodurch wiederum für alle $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt:

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap B(x, r) \subseteq \overline{\{x_j \mid j \geq n\}} \cap B(x, r)$$

- $\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$ -Argument $\dots \Rightarrow$ Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für alle $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$B(x, \varepsilon) \cap \{x_j \mid j \geq n\} \neq \emptyset$$

Also x Häufungswert von (x_n) . Damit gibt es konvergente Teilfolge.

2. „2. \Rightarrow 1.“

- (a) Ist X folgenkompakt, so gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $F \subseteq X, F$ endlich, sodass

$$X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$

($\Leftrightarrow X$ präkompakt)

Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_n) , sodass

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, \varepsilon)$$

Damit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$. Damit enthält (x_n) keine Cauchy-Folge, also auch keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

- (b) Sei \mathcal{S} eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es $\lambda > 0$, sodass für jedes $x \in X$ ein $U_x \in \mathcal{S}$ mit $B(x, \lambda) \subseteq U_x$. (λ heißt Lebesgue-Zahl der Überdeckung).

$$\begin{aligned} & \exists \lambda > 0 \forall x \in X \exists U_x \in \mathcal{S} : B(x, \lambda) \subseteq U_x \\ \Leftrightarrow & \neg \forall \lambda > 0 \exists x \in X \forall U \in \mathcal{S} : B(x, \lambda) \not\subseteq U \end{aligned}$$

Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge (x_n) in X , sodass $B(x_n, \frac{1}{n})$ in keinem $U \in \mathcal{S}$ enthalten ist für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j, x_{n_j} \rightarrow x$. Es gibt $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$ (\mathcal{S} ist Überdeckung) und $N \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{1}{N}) \subseteq U$. (U ist offen) Es gibt $J \in \mathbb{N}$ sodass für alle $J \leq j$ gilt, dass $n_j \geq 2N$ und $x_{n_j} \in B(x, \frac{1}{2N})$. Daher

$$B\left(x_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{N}\right) \subseteq U$$

Widerspruch!

Zu λ gibt es nach a) $F \subseteq X$, endlich, mit

$$X = \bigcup_{x \in F} \underbrace{B(x, \lambda)}_{\subseteq U_x}$$

Also $\{U_x \mid x \in F\}$ eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{S} .

22.4 Satz von Heine-Borel

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1. A kompakt
2. A beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

- A kompakt $\Leftrightarrow A$ folgenkompakt nach vorangegangenen Satz 22.3 spezialisiert für $X = \mathbb{R}^n$
- A folgenkompakt $\Leftrightarrow A$ abgeschlossen und beschränkt nach Satz 12.4

23

Kurven im \mathbb{R}^n

- Kurve in \mathbb{R}^n : stetige Abbildung $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

wobei $f_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, n$.

- f differenzierbar in $a \in I$:

$$:\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))}_{=: f'(a)}$$

$$\stackrel{10.2.1}{\Leftrightarrow} f_1, \dots, f_n \text{ in } a \text{ differenzierbar}$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \begin{pmatrix} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x-a} \\ \vdots \\ \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{10.2.1}{=} \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x-a} \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $f'(a)$ heißt Tangentialvektor zum Parameterwert a , falls $f'(a) \neq 0$ heißt

$$\frac{f'(a)}{|f'(a)|_2} := \underbrace{\frac{1}{|f'(a)|_2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot f'(a) \in \mathbb{R}^n$$

Tangenteneinheitsvektor.

- f (stetig) differenzierbar $:\Leftrightarrow f$ in jedem Punkt differenzierbar (und f' stetig).

$$f' := a \mapsto f'(a)$$

- f regulär $:\Leftrightarrow f$ stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ (schließt „Spitzen“ aus).
- f Singular $:\Leftrightarrow f$ ist nicht regulär

- Eine Kurve ist nicht nur eine Teilmenge von \mathbb{R}^n , sondern der Begriff schließt die Parametrisierung f ein.
- Der Tangentialvektor ist der Limes der Sekantenvektoren.

Beispiele:

1. $s \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(t) = s + t \cdot v$$

Gerade, regulär ($f'(t) \stackrel{10.2.1}{=} v \neq 0$)

2. $r > 0, c \neq 0, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$

Schraubenlinie

3. Die Neil'sche Parabel $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)^T$. Singulär für $I = \{0\}$

23.1 Rektifizierbarkeit

- Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}, a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurve. Für eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ist

$$\ell(f; t_0, \dots, t_n) := \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2$$

die Länge des Polygonzuges, der $f(t_0), \dots, f(t_n)$ geradlinig verbindet.

- f heißt rektifizierbar mit Länge $\ell(f) \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ existiert, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit Feinheit $\max_{1 \leq j \leq n} \{t_j - t_{j-1}\} < \delta$ gilt:

$$|\ell(f; t_0, \dots, t_n) - \ell(f)| \leq \varepsilon$$

23.1.1 Satz: Rektifizierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar $\Rightarrow f$ rektifizierbar mit Länge $\ell(f)$ und

$$\ell(f) = \int_a^b |f'(t)|_2 dt$$

Vorarbeit zum Beweis:

- Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ definieren wir

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \cdot \bar{y}_j$$

das Standard-Skalarprodukt. (siehe Lineare Algebra) Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Abkürzung CSU):

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n x_j \cdot \bar{y}_j \right| \stackrel{10.1.2.8.3}{\leq} \sum_{j=1}^n |x_j \cdot \bar{y}_j| \stackrel{CSU}{\leq} |x|_2 \cdot |y|_2$$

$$\langle x, x \rangle = (|x|_2)^2 =: |x|_2^2$$

23.2 Hilfssatz: „Mittelwertsatz“

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$, sodass

$$|f(b) - f(a)|_2 \leq (b - a) \cdot |f'(\xi)|_2$$

Beweis:

- Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto \langle y, f(t) \rangle: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) stetig differenzierbar. Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi_y \in (a, b)$ mit:

$$\begin{aligned} \langle y, f(b) \rangle - \langle y, f(a) \rangle &= \langle y, f(\xi_y) \rangle' \cdot (b - a) \\ \stackrel{23.0.3}{\Rightarrow} \langle y, f(b) - f(a) \rangle &= \langle y, f'(\xi_y) \rangle \cdot (b - a) \end{aligned}$$

- Für $y = f(b) - f(a)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} (|f(b) - f(a)|_2)^2 &= \langle f(b) - f(a), f'(\xi) \rangle \cdot (b - a) \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (b - a) \cdot |f(b) - f(a)|_2 \cdot |f'(\xi)|_2 \end{aligned}$$

- Anschauung: f beschreibt den Flug eines Partikels von Zeit 0 nach Zeit 1. $f([0, 1])$ ist Flugbahn und $f'(x)$ der Geschwindigkeitsvektor zur Zeit x . Eine Flugbahn mit minimaler Maximalbetragsgeschwindigkeit hat als Flugbahn die direkte Verbindungsgerade und konstante Betragsgeschwindigkeit $|f(b) - f(a)|_2$. Andere Kurven von $f(a)$ nach $f(b)$ nehmen einen Umweg. Die Aussage des Mittelwertsatzes ist jetzt: Damit das Partikel rechtzeitig ankommt muss zu irgendeinem Zeitpunkt die Geschwindigkeit erhöht sein.

Beweis zu Satz 23.1:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f'(t) - f'(s)|_2 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|t - s| \leq \delta$ (f' gleichmäßig stetig).
- Sei $a = t_0 < \dots < t_k = b$ eine Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$. Dann:

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b |f'(t)|_2 dt - \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| \\ &\stackrel{17.8}{\leq} \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|_2 dt - |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| \\ &\stackrel{17.6}{=} \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(|f'(t)|_2 - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right) dt \right| \\ &\stackrel{17.7}{\leq} \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| |f'(t)|_2 - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| dt \\ &\stackrel{10.1.1 \ \& \ 10.1.3.8}{\leq} \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| f'(t) - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot (f(t_j) - f(t_{j-1})) \right|_2 dt \\ &\stackrel{17.6}{=} \sum_{j=1}^k \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{|f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)|_2}_{\leq ?} dt \end{aligned}$$

- Nach Hilfssatz 23.2 mit der Funktion $s \mapsto f(s) - s \cdot f'(t)$ und $a := t_{j-1}$ sowie $b := t_j$ existiert ein $\xi_j \in (t_{j-1}, t_j)$ mit:

$$\begin{aligned}
 |f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)|_2 &= |f(t_j) - t_j \cdot f'(t_j) - (f(t_{j-1}) - t_{j-1} \cdot f'(t_{j-1}))|_2 \\
 &\stackrel{23.2}{\leq} (t_j - t_{j-1}) \cdot |(s \mapsto f(s) - s \cdot f'(t))'(\xi_j)|_2 \\
 &= (t_j - t_{j-1}) \cdot |f'(\xi_j) - f'(t)|_2 \\
 &\leq (t_j - t_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a}
 \end{aligned}$$

- Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b |f'(t)|_2 dt - \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| &\leq \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Somit ist f rektifizierbar mit Länge $\int_a^b |f'(t)|_2 dt$.

Beispiele:

1. Geradenstück. Es sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a + t \cdot v, & f'(t) &= v \text{ stetig} \\
 \ell(f) &= \int_0^1 |f'(t)|_2 dt = \int_0^1 |v|_2 dt = |v|_2 = |(a + 1 \cdot v) - (a + 0 \cdot v)|_2 = |f(1) - f(0)|_2
 \end{aligned}$$

2. Kreisbogen, $0 \leq t \leq \varphi$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
 \ell(f) &= \int_0^\varphi \sqrt{|\sin t|^2 + |\cos t|^2} dt = \int_0^\varphi \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{\stackrel{14.2.2_1}{=1}} dt = \varphi
 \end{aligned}$$

3. Zykloide: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, & f'(t) &= \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
 \ell(f) &= \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\
 &\stackrel{\text{Additionstheorem mit } x=y=\frac{t}{2} \text{ \& 14.2.2}}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt \\
 &= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Dann:

$$\ell(\varphi) = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Bogenlänge des Graphen von f

23.3 Parametertransformation

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig und bijektiv. Dann ist $g = f \circ \varphi$ eine Kurve, φ heißt Parametertransformation. Es gilt entweder oder:

1. φ streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow \varphi$ orientierungstreu
2. φ streng monoton fallend $:\Leftrightarrow \varphi$ orientierungsumkehrend

Bemerkung:

- Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, φ eine beliebige Parametertransformation. Dann

$$f \text{ rektifizierbar} \Leftrightarrow f \circ \varphi \text{ rektifizierbar}$$

und in diesem Fall: $\ell(f) = \ell(f \circ \varphi)$.

Beweis: ohne Einschränkung φ orientierungstreu.

1. „ \Rightarrow “

Es sei f rektifizierbar und φ eine Parametertransformation. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit Feinheit $\leq \tilde{\delta}$ gilt:

$$|\ell(f) - \ell(f; t_0, \dots, t_k)| \leq \varepsilon$$

Außerdem φ gleichmäßig stetig (12.5.1). Es existiert ein $\delta > 0$: Aus $|s - s'| \leq \delta$ folgt $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \tilde{\delta}$. Ist $\alpha = s_0 < \dots < s_k = \beta$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$, dann $a = \varphi(s_0) < \dots < \varphi(s_k) = b$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \tilde{\delta}$.

$$\begin{aligned} |\ell(f) - \ell(f \circ \varphi; s_0, \dots, s_k)| &= |\ell(f) - \ell(f; \varphi(s_0), \dots, \varphi(s_j))| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Also $(f \circ \varphi)$ rektifizierbar mit $\ell(f)$

2. „ \Leftarrow “

Wegen $\varphi^{-1}: \underbrace{\varphi([\alpha, \beta])}_{=[a, b], \text{ da } \varphi \text{ bijektiv}} \rightarrow [\alpha, \beta]$ ist orientierungstreu (13.2). $\varphi([a, b]) = [\alpha, \beta]$, da φ^{-1} bijektiv, also φ^{-1} stetig (13.1). Sei $(f \circ \varphi)$ rektifizierbar. Wende „ \Rightarrow “ auf $(f \circ \varphi)$ an. Daraus folgt $(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = f$ rektifizierbar.

24

Partielle Ableitungen

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $j \in \{1, \dots, n\}$, dann ist f in a partiell differenzierbar (diffbar) in der j -ten Koordinatenrichtung

$$:\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h}$$

wobei $e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(j-1)\text{-mal}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-j)\text{-mal}})^T$.

\Leftrightarrow Die Funktion $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n): U_a \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $a_j \in U_a$ (10.1.3.2) differenzierbar, wobei

$$a_j \in U_a := \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in U\}$$

Definiere

$$\partial_j f(a) := \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h}$$

Es gilt:

$$\partial_j f(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \right|_{t=a_j}$$

- f (stetig) partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow f$ in allen $x \in U$ und jeweils in jeder Koordinatenrichtung $j = 1, \dots, n$ partiell differenzierbar (und f und $\partial_j f$ für $j = 1, \dots, n$ stetig).
- Sei f partiell differenzierbar, $j \in \{1, \dots, n\}$, dann ist die partielle Ableitungen von f in der j -ten Koordinatenrichtung definiert:

$$\partial_j f := \left(a \mapsto \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h} \right)$$

- ∂_j ist eine Abbildung zwischen Funktionenräumen

$$\begin{aligned} \partial_j: (U \xrightarrow[\text{diffbar}]{\text{partiell}} \mathbb{R}) &\rightarrow (U \rightarrow \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \partial_j f \end{aligned}$$

- Abweichend zur einzig wahren Bezeichnungen $\partial_j f(x)$ gibt es:

$$\partial_j f(x) =: D_j f(x) =: \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) =: \dots$$

- Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ y \\ x_{y+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auch:

$$\partial_j f(x) =: f_y(x) =: D_y f(x)$$

- 15.4 gilt auch für Partielle Ableitungen

- Beispiele:

1. $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = |x|_2 = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}}$. r ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar. Es gilt:

$$\partial_j r(x) = \frac{x_j}{|x|_2}$$

Beweis: Aus Kettenregel für $r = \left(t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2} \right)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \partial_j r(x) &= \left. \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2} \right|_{t=x_j} \\ &= \left(t \mapsto \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2}} \cdot 2t \right) (x_j) \\ &= \frac{x_j}{|x|_2} = \frac{x_j}{r(x)} \end{aligned}$$

2. partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & f(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & f(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann

$$\text{grad } f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

der Gradient von f , auch $\nabla f(x) := \text{grad } f(x)$ (Nabla-Operator). (Später zeigen wir dass $\text{grad } f(x)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f ist.)

Beispiel:

$$r(x) := |x|_2 \Rightarrow \text{grad } r(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x|_2} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{|x|_2} \end{pmatrix} = \frac{x}{|x|_2}$$

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. f heißt ...

- ... zweimal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow f$ partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ nochmal partiell differenzierbar
- ... k -mal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow f$ ist $(k - 1)$ -mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ nochmal partiell differenzierbar

- ... k -mal stetig differenzierbar $\Leftrightarrow k$ -mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen der Ordnungen $\leq n$ stetig.
- Schreibweise mit $i_m \in \{1, \dots, n\}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f := (\partial_{i_1} \cdots (\partial_{i_m} f))$$

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^3$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, x_2) &= (\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2^3 \\ \partial_2 f(x_1, x_2) &= 3 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \\ \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_1 (\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2 \cdot x_2^3 \\ \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\ \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\ \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) &= 6 \cdot x_1^2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

24.1 Lemma von Schwarz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Sei $a \in U$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und $\partial_j \partial_k f$ sowie $\partial_k \partial_j f$ stetig in a . Dann:

$$\partial_j \partial_k f(a) = \partial_k \partial_j f(a)$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung ist $n = 2$, $a = 0$, $j = 1$, $k = 2$.
- Es gibt $\delta > 0$, sodass $[-\delta, \delta]^2 \subseteq U$. Sei $0 < s < \delta$ und $0 < t < \delta$. Dann mit Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} &(f(s, t) - f(0, t)) - (f(s, 0) - f(0, 0)) \\ &= (\tau \mapsto f(s, \tau) - f(0, \tau))(t) - (\tau \mapsto f(s, \tau) - f(0, \tau))(0) \\ &= (t - 0) \cdot \left. \frac{d}{d\tau} (f(s, \tau) - f(0, \tau)) \right|_{\tau=t_1} \quad \text{MWS : } \exists t_1 (0 < t_1 < t) \\ &= t \cdot (\partial_2 f(s, t_1) - \partial_2 f(0, t_1)) \\ &= t \cdot (s - 0) \cdot \left. \frac{d}{d\sigma} (\partial_2 f(\sigma, t_1)) \right|_{\sigma=s_1} \quad \text{MWS : } \exists s_1 (0 < s_1 < s) \\ &= t \cdot s \cdot \partial_1 \partial_2 f(s_1, t_1) \end{aligned}$$

- Aber auch (wie oben):

$$\begin{aligned} &(f(s, t) - f(0, t)) - (f(s, 0) - f(0, 0)) \\ &= (f(s, t) - f(s, 0)) - (f(0, t) - f(0, 0)) \\ &= (\sigma \mapsto f(\sigma, t) - f(\sigma, 0))(s) - (\sigma \mapsto f(\sigma, t) - f(\sigma, 0))(0) \\ &= (s - 0) \cdot \left. \frac{d}{d\sigma} (f(\sigma, t) - f(\sigma, 0)) \right|_{\sigma=s_2} \quad \text{MWS : } \exists s_2 (0 < s_2 < s) \\ &= s \cdot (\partial_1 f(s_2, t) - \partial_1 f(s_2, 0)) \\ &= s \cdot (t - 0) \cdot \left. \frac{d}{d\tau} \partial_1 f(s_2, \tau) \right|_{\tau=t_2} \quad \text{MWS : } \exists t_2 (0 < t_2 < t) \\ &= s \cdot t \cdot \partial_2 \partial_1 f(s_2, t_2) \end{aligned}$$

- Damit:

$$\partial_1 \partial_2 f(s_1, t_1) = \partial_2 \partial_1 f(s_2, t_2)$$

für existierende $s_1, s_2 \in (0, s)$ und $t_1, t_2 \in (0, t)$

- Für $t, s \rightarrow 0$ existieren also Folgen $x, y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit $x_n, y_n \rightarrow a$ und

$$\partial_1 \partial_2 f(x_n) = \partial_2 \partial_1 f(y_n)$$

(10.2.1). Daraus folgt:

$$\partial_1 \partial_2 f(a) = \partial_1 \partial_2 f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_1 \partial_2 f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_2 \partial_1 f(y_n) = \dots = \partial_2 \partial_1 f(a)$$

da Ableitungen stetig in a .

Bemerkung: $\partial_j \partial_k f(a) \neq \partial_k \partial_j f(a)$ kann bei Weglassen der Stetigkeitsbedingung vorkommen, ist aber „pathologisch“. Hier ein Gegenbeispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

24.2 Folgerung: Vertauschen partieller Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig partiell differenzierbar. Seien $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ eine Permutation. Dann

$$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f = \partial_{j_{\pi(1)}} \cdots \partial_{j_{\pi(k)}} f$$

Notation: Ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_{\geq 0})^n$ heißt Multiindex,

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i && \text{Ordnung von } \alpha \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f \\ &= \underbrace{\partial_1 \cdots \partial_1}_{\alpha_1\text{-mal}} \cdots \underbrace{\partial_n \cdots \partial_n}_{\alpha_n\text{-mal}} f \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $n = 2$

$$\partial^{(2,0)} f = \partial_1 \partial_1 f \quad \partial^{(1,1)} f = \partial_1 \partial_2 f$$

2. Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(|x|_2)$. Berechne Δg (Laplace-Operator). $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \Delta g &:= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g \\ \partial_j g(x) &= \partial_j (f \circ |\cdot|_2)(x) \\ &= (t \mapsto f(|(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)|_2))'(x_j) \\ &= f'(|(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|_2) \cdot |(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|_2' \\ &= f'(|x|_2) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \\ \partial_j^2 g(x) &= \partial_j \left(f'(|x|_2) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \right) \\ &= (f')'(|x|_2) \frac{x_j}{|x|_2} \cdot \frac{x_j}{|x|_2} + f'(|x|_2) \cdot \left(\frac{1 \cdot |x|_2 - x_j \cdot \frac{x_j}{|x|_2}}{|x|_2^2} \right) \\ &= f''(|x|_2) \cdot \frac{x_j^2}{|x|_2^2} + f'(|x|_2) \cdot \left(\frac{1}{|x|_2} + x_j \cdot \left(-\frac{1}{|x|_2^2} \right) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \right) \\ \Rightarrow \Delta g(x) &= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g(x) \\ &= f''(|x|_2) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{|x|_2^2} + f'(|x|_2) \cdot \left(\frac{n}{|x|_2} - \frac{1}{|x|_2^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{|x|_2} \right) \\ &= f''(|x|_2) + \frac{n-1}{|x|_2} \cdot f'(|x|_2) \end{aligned}$$

3. Sei $c \in \mathbb{R}$ Zeige, dass $F: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t, x) = \frac{\cos(|x|_2 - ct)}{|x|_2}$$

eine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x \right) F = ((t, x) \mapsto 0)$$

ist wobei

$$\Delta_x := \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2 = \sum_{j=2}^4 \partial_j^2$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\cos(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\sin(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \cdot (-c) \right) \\ &= \frac{\cos''(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \cdot (-c)^2 \\ &= -\frac{c^2}{|x|_2} \cdot \cos(|x|_2 - ct) \end{aligned}$$

Mit $f_t(r) := \frac{\cos(r-ct)}{r}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \Delta_x F(t, x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} \sum_{j=2}^4 F(t, x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_3) \Big|_{y=x} \right) \Big|_{x=x_j} \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} \sum_{j=1}^3 (f_t \circ |\cdot|_2)(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_3) \Big|_{y=x} \right) \Big|_{x=x_j} \\
 &= \Delta(f_t \circ |\cdot|_2)(x) \\
 &\stackrel{2)}{=} f''(|x|) + \frac{2}{|x|} \cdot f'(|x|) \\
 &= \frac{1}{|x|} \cdot (r \mapsto r f''(r) + 2f'(r))(|x|) \\
 &= \frac{1}{|x|} \cdot (r \mapsto r \cdot f(r))''(|x|) \\
 &= \frac{1}{|x|} \cdot (r \mapsto \cos(r - ct))''(|x|) \\
 &= -\frac{1}{|x|} \cdot (r \mapsto \cos(r - ct))(|x|) \\
 &= -\frac{1}{|x|} \cdot \cos(|x| - ct)
 \end{aligned}$$

25

Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in U$. f in a (total) differenzierbar

$$\Leftrightarrow \exists A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear}, \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m \text{ sodass}$$
$$f(x) = f(a) + A(x - a) + |x - a|_2 \cdot \varphi(x)$$

für alle $x \in U$. A heißt Ableitung von f in a . Die Ableitung von f in a ist eine lineare Funktion. Schreibweisen:

$$f'(a) := \partial f(a) := Df(a) := D_a f := A$$

- Bemerkungen:

1. Für $m = n = 1$ übliche Differenzierbarkeit, vgl. Kapitel 15 (15.3 Weierstraßsche Zerlegungsformel) Fasse $a \in \mathbb{R}$ als lineare Funktion $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto a \cdot x$ auf.
2. Äquivalent zur Definition ist:

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|_2}}_{=\varphi(x)} = 0$$

3. Für $n = 2, m = 1$ beschreibt $g(x) := f(a) + A(x - a)$ eine Ebene, die tangential zu f in $(a, f(a))$ liegt.
4. f in a differenzierbar $\Rightarrow f$ in a stetig

$$f(\xi) = f(a) + A(\xi - a) + |\xi - a|_2 \cdot \varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow a} f(a)$$

5. Ableitung eindeutig: Seien $A, \varphi, \tilde{A}, \tilde{\varphi}$ wie in Definition. Dann:

$$A(x - a) + |x - a|_2 \cdot \varphi(x) = \tilde{A}(x - a) + |x - a|_2 \cdot \tilde{\varphi}(x)$$

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Für t nahe bei 0 gilt $x = a + t \cdot \xi \in U$. Also:

$$\begin{aligned} t \cdot A(\xi) + t \cdot |\xi|_2 \cdot \varphi(a + t \cdot \xi) &= t \cdot \tilde{A}(\xi) + t \cdot |\xi|_2 \cdot \tilde{\varphi}(a + t \cdot \xi) \\ A(\xi) + |\xi|_2 \cdot \varphi(a + t \cdot \xi) &= \tilde{A}(\xi) + |\xi|_2 \cdot \tilde{\varphi}(a + t \cdot \xi) \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$: $A(\xi) = \tilde{A}(\xi)$, damit $A = \tilde{A}$.

6. Fasse A als $(m \times n)$ -Matrix $(a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bzgl. der Standardbasen auf (siehe Vorlesung Lineare Algebra). Sei

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

Sei A_j die der j -ten Zeile (a_{j1}, \dots, a_{jn}) von A zugehörige lineare Funktion (bzgl. der Standardbasen). Dann ergibt sich aus der Definition von totaler Differenzierbarkeit:

$$f_j(x) = f_j(a) + A_j(x_k - a_k) + |x - a|_2 \cdot \varphi_j(x)$$

für $j = 1, \dots, m$. Daraus folgt: f in a differenzierbar $\Leftrightarrow f_j: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ in a total differenzierbar für $j = 1, \dots, m$ (10.2.1)

- $f'_1 = A_1, f'_2 = A_2, \Rightarrow (\lambda \cdot f_1)' = \lambda \cdot A_1, \Rightarrow (f_1 + f_2)' = A_1 + A_2$

25.1 Satz: Berechnung der Jacobi-Matrix

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ differenzierbar. Dann gilt: Alle Komponenten $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) sind im Punkt a partiell differenzierbar und zugehörige Matrix zu $f'(a)$ ist:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} = (\partial_k f_j(a))_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

Die Matrix $J_f(a)$ heißt auch Jacobi-Matrix bzw. Funktionalmatrix.

Beweis:

- Sei $(a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die zu $f'(a)$ zugehörige Matrix, $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m)^T$ wie in Definition.
- Für $j = 1, \dots, m$ gilt:

$$f_j(x) = f_j(a) + \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot (x_k - a_k) + |x - a|_2 \cdot \varphi_j(x)$$

- Für $k = 1, \dots, n$ und $h \in \mathbb{R}$ nahe genug bei 0:

$$f_j(a + h \cdot e_k) = f_j(a) + h \cdot a_{jk} + |h| \cdot \varphi_j(a + h \cdot e_k)$$

Daher

$$\begin{aligned} a_{jk} &= a_{jk} + 0 \\ &= a_{jk} + \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_j(a + h \cdot e_k) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (a_{jk} + \varphi_j(a + h \cdot e_k)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(a + h \cdot e_k) - f_j(a)}{h} \\ &= \partial_k f_j(a) \end{aligned}$$

Beispiel:

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. Dann:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Achtung:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = J_f(x_1, x_2)^T$$

Aber ist f überhaupt differenzierbar? Die Antwort liefert der nächste Satz.

25.2 Satz: Totale Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in U partiell differenzierbar. Alle Ableitungen $\partial_j f$ seien in $a \in U$ stetig. Dann f in a differenzierbar.

Beweis:

- Es existiert $\delta > 0$, sodass $B(a, \delta) \subseteq U$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|_2 < \delta$. Definiere

$$x^{(j)} = a + \sum_{k=1}^j \xi_k \cdot e_k \quad (j = 0, \dots, n)$$

Dann gilt:

$$x^{(0)} = a, \quad x^{(1)} = a + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = a + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^{(n)} = a + \xi$$

Wende den Mittelwertsatz auf $g_j(t) := f(x^{(j-1)} + t \cdot e_j)$, $g: [0, \xi_j] \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, n$ an: $\exists \eta \in (0, \xi_j)$

$$\begin{aligned} g'_j(\eta) &= \frac{g_j(\xi_j) - g_j(0)}{\xi_j - 0} \\ \Leftrightarrow \xi_j \cdot \frac{d}{dt} f \left((x^{(j-1)})_1, \dots, (x^{(j-1)})_{j-1}, t, 0, \dots, 0 \right) \Big|_{t=\eta} &= f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \\ \Leftrightarrow \partial_j f(x^{(j-1)} + \eta \cdot e_j) \cdot \xi_j &\stackrel{(*)}{=} f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a + \xi) - f(a) &= f(x^{(n)}) - f(x^{(0)}) \quad \text{Teleskopsumme} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n \partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) \cdot \xi_j \quad (\vartheta_j \in (0, 1)) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^n \partial_j f(a) \cdot \xi_j}_{=A(\xi)} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \xi_j \cdot \left(\partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) - \partial_j f(a) \right)}_{=: \tilde{\varphi}_j(a + \xi)} \\ &= A(\xi) - \langle \xi, \tilde{\varphi}(a + \xi) \rangle \\ &= A(\xi) - |\xi| \cdot \underbrace{\frac{\langle \xi, \tilde{\varphi}(a + \xi) \rangle}{|\xi|}}_{=: \varphi(a + \xi)} \end{aligned}$$

mit $A = (\partial_1 f(a) \quad \dots \quad \partial_n f(a))$.

- Jetzt muss noch $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(a + \xi) = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(a + \xi) &= \frac{\langle \xi, \tilde{\varphi}(a + \xi) \rangle}{|\xi|_2} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} |\tilde{\varphi}(a + \xi)|_2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \underbrace{|\partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) - \partial_j f(a)|^2}_{\rightarrow \partial_j f(a)(\xi \rightarrow 0), \text{ Stetigkeit}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\rightarrow 0, \quad (|\xi| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Damit f in a differenzierbar.

Bemerkungen:

1. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig $\Rightarrow f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig
2. f stetig differenzierbar ($:\Leftrightarrow f$ stetig partiell differenzierbar) $\Rightarrow f$ total differenzierbar $\Rightarrow f$ partiell differenzierbar (Umkehrung i.A. falsch)

25.3 Satz: Kettenregel

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V$. Sei f in $a \in U$ differenzierbar, g in $f(a)$ differenzierbar. Dann $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ in a differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}(g) \cdot D_a(f)$$

Beweis:

- Sei $A := f'(a)$, $B := g'(f(a))$.

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(1)}{=} f(a) + A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x) \\ g(y) &\stackrel{(2)}{=} g(f(a)) + B(y-f(a)) + |y-f(a)|_2 \cdot \psi(y) \end{aligned}$$

mit $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow f(a)} \psi(y) = 0$. Dann:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &\stackrel{(2)}{=} (g \circ f)(a) + B(f(x) - f(a)) + |f(x) - f(a)|_2 \cdot \psi(f(x)) \\ &\stackrel{(1)}{=} (g \circ f)(a) + B(A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x)) + |\dots|_2 \cdot \psi(f(x)) \\ &\stackrel{B \text{ linear}}{=} (g \circ f)(a) + (B \circ A)(x-a) + \underbrace{|x-a|_2 \cdot B(\varphi(x)) + |A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x)|_2 \cdot \psi(f(x))}_{\stackrel{!}{=} |x-a|_2 \cdot \omega(x)} \end{aligned}$$

- Es gilt:

$$|\omega(x)|_2 \leq |B(\varphi(x))|_2 + \left| A \left(\frac{x-a}{|x-a|_2} \right) \right|_2 \cdot |\psi(f(x))|_2 + |\varphi(x)|_2 \cdot |\psi(f(x))|_2$$

Außerdem (Satz vom Maximum) (12.3, 12.4.2, 12.4.1):

$$\left| A \left(\frac{x-a}{|x-a|_2} \right) \right|_2 \leq \sup\{|A(\xi)|_2; |\xi|_2 = 1\}$$

$$=: \|A\| < \infty$$

Somit $|\omega(x)|_2 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ wodurch $g \circ f$ in a differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = B \circ A = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Bemerkungen:

- vorherige Satz in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_1(g \circ f)_1(a) & \cdots & \partial_n(g \circ f)_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(g \circ f)_k(a) & \cdots & \partial_n(g \circ f)_k(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1(g_1)(f(a)) & \cdots & \partial_m(g_1)(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(g_k)(f(a)) & \cdots & \partial_m(g_k)(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1(f_1)(a) & \cdots & \partial_n(f_1)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(f_m)(a) & \cdots & \partial_n(f_m)(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$\partial_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{l=1}^m \partial_l g_i(f(a)) \cdot \partial_j f_l(a)$$

- Spezialfall: $n = k = 1$. Also $U \subseteq \mathbb{R}^1$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^1$ differenzierbar, $f(U) \subseteq V$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}g(f_1(x), \dots, f_n(x))\right)\Big|_{x=t} &= \left(\frac{d}{dx}(g \circ f)(x)\right)\Big|_{x=t} \\ &\stackrel{15.3}{=} \partial(g \circ f)(t) \\ &= g'(f(t)) \circ f'(t) \\ &= (\partial_1 g(f(t)) \quad \dots \quad \partial_m g(f(t))) \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \partial_j g(f(t)) \cdot f'_j(t)\right) \end{aligned}$$

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, so heißt

$$\partial_v f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}$$

Richtungsableitung, falls diese existiert. Spezialfall ist partielle Ableitung.

- Ist f in Punkt a differenzierbar, dann existiert $\partial_v f(a)$ für jedes v . Es gilt:

$$\partial_v f(a) = \langle v, \text{grad } f(a) \rangle$$

Begründung: Kettenregel

$$\begin{aligned} g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, g(t) &= a + t \cdot v \\ \mathbb{R} \ni \partial_v f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t - 0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ g)(t)\Big|_{t=0} \\ &\stackrel{15.3}{=} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}(f \circ g)(t)\Big|_{t=0}\right)}_{\substack{\in \mathbb{R}^1, \text{ linear} \\ \in \mathbb{R}}} (1)(1) \\ &\mapsto \partial(f \circ g)(0) \\ &= f'(g(0)) \circ g'(0) \\ &= f'(a) \circ g'(0) \\ &= (\partial_1 f(a) \quad \dots \quad \partial_n f(a)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &\leftarrow \langle v, \text{grad } f(a) \rangle \end{aligned}$$

Wobei bei den \mapsto der gleiche Isomorphismus verwendet wurde, damit folgt Gleichheit.

- Ist $\text{grad } f(a) \neq 0$, so wird $\partial_v f(a)$ maximal für

$$v = \frac{\text{grad } f(a)}{|\text{grad } f(a)|_2}$$

(= Richtung des größten Anstieges von f im Punkt a)

Beweis: Für alle v gilt:

$$|\langle v, \text{grad } f(a) \rangle|_2 \leq |\text{grad } f(a)|_2$$

Für $v := \frac{\text{grad } f(a)}{|\text{grad } f(a)|_2}$ gilt:

$$\partial_v f(a) = \langle v, \text{grad } f(a) \rangle = |\text{grad } f(a)|_2$$

Die Gleichheit gilt nur für dieses v . Angenommen $w \neq v$ mit $|w| = 1$ erfüllt $\langle w, \text{grad } f(a) \rangle = |\text{grad } f(a)|$. Dann ist $\langle w-v, \text{grad } f(a) \rangle = 0$. Somit erfüllt $z := v + \frac{1}{2}(w-v)$ auch die Gleichheit. Allerdings ist

$$\begin{aligned} |z|_2 &= \frac{1}{2}|v+w|_2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\langle v+w, v+w \rangle} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|v|_2^2 + 2\langle v, w \rangle + |w|_2^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\langle v, w \rangle} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{|v|_2 \cdot |w|_2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &< 1 \end{aligned}$$

woraus

$$|\text{grad } f(a)|_2 = |\langle z, \text{grad } f(a) \rangle|_2 \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{|z|_2}_{<1} \cdot |\text{grad } f(a)|_2 < |\text{grad } f(a)|_2$$

folgt. Dies ist ein Widerspruch.

26

Normierte Räume, lineare Abbildungen

- Normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$

- X Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

- $\|\cdot\|$ Abbildung $X \rightarrow [0, \infty)$ mit

1. $\forall \lambda \in K, \forall x \in X : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (absolute Homogenität)

2. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Subadditivität oder Dreiecksungleichung)

3. $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

Mit der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ wird $(X, \|\cdot\|)$ zum metrischen Raum.

- Banachraum := vollständiger normierter Raum := Vektorraum, der vollständig und normiert ist

- Beispiele:

1. $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$, $(\mathbb{C}^n, |\cdot|_2)$ sind Banachräume

- 2.

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

und

$$\|f\|_{[0,1]} := \sup\{|f(t)| ; 0 \leq t \leq 1\}$$

Dann $(C[0, 1], \|\cdot\|_{[0,1]})$ Banachraum:

(a) Homogenität:

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(t)| ; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \cdot |f(t)| ; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \sup(|\lambda| \cdot \{|f(t)| ; 0 \leq t \leq 1\}) \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{|f(t)| ; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

(b) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{[0,1]} &= \sup\{|f(t) + g(t)| ; 0 \leq t \leq 1\} \\ \forall t \in [0, 1] : |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \\ &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \quad \text{ist eine obere Schranke.} \\ \Rightarrow \|f + g\|_{[0,1]} &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

(c) Vollständigkeit beweisen wir später (siehe auch Kapitel 20)

26.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen

Seien X, Y normierte Räume, $A: X \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

1. A stetig
2. $\|A\|_A := \sup\{\|A(x)\|_Y ; x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt für alle $x \in X$:

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A\|_A \cdot \|x\|_X$$

$\|A\|_A$ heißt Norm von A .

Beweis:

1. $1 \Rightarrow 2$

- Da A stetig, ist A stetig in 0 und wegen Linearität

$$A(0) = A(0_X) = A(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_X) \stackrel{\text{Linearität}}{=} 0_{\mathbb{K}} \cdot A(0_X) = 0_Y$$

Also:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in X \text{ mit } \|x - 0\|_X \leq \delta \text{ gilt } \|A(x)\|_Y \leq 1$$

Für $x \in X, \|x\|_X \leq 1$, ist

$$\|\delta \cdot x\|_X = |\delta| \cdot \underbrace{\|x\|_X}_{\leq 1} \leq |\delta| = \delta$$

also mit der Stetigkeit in 0 gilt

$$\|A(\delta x)\|_Y \leq 1 \text{ also } \delta \cdot \|A(x)\|_Y \leq 1$$

Somit obere Schranke gefunden:

$$\|A\|_A = \sup\{\|A(x)\|_Y ; x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$$

2. Zusatz, falls 2 gilt:

- Falls $x \in X, x \neq 0, \|\cdot\|$ Norm, ist:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| &= \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| \\ &= \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Somit:

$$\|A(x)\|_Y = \left\| A \left(\frac{1}{\|x\|_X} \cdot x \right) \right\|_Y \cdot \|x\|_X \leq \|A\|_A \cdot \|x\|_X$$

3. $2 \Rightarrow 1$

- Mit Zusatz gilt:

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\|_Y &= \|A(x - y)\|_Y \\ &\leq \|A\|_A \cdot \|x - y\|_X \end{aligned}$$

Also A lipschitz-stetig, damit auch stetig.

Notation: $Ax := A(x)$

Beispiele:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h. A kann als lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden. Die Normen seien die euklidischen Normen.

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sup\{|Ax|_2; x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1\} \\ &= \max\{|Ax|_2; x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Das Maximum wird angenommen, da $\{x \in \mathbb{R}^n; |x|_2 < 1\}$ kompakt und $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ist. Nimmt man auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m andere Normen, so ändert sich die Matrixnorm.

2. Für einen Zeilenvektor $z \in \mathbb{R}^{1 \times n} \cong \mathbb{R}^n$ dann gilt:

$$\|z\|_A = |z^T|_2 = \left(\sum_{j=1}^n z_{1j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Begründung: Für $x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1$ gilt mit Schwarzscher Ungleichung:

$$|zx| = |z(x)| = \left| (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| = |\langle z^T, x \rangle| \leq |z^T|_2 \cdot |x|_2 \leq |z^T|_2$$

Damit $\|z\|_A \leq |z^T|$. Für $\tilde{x} := \frac{1}{|z^T|} \cdot z^T$ gilt:

$$z \cdot \tilde{x} = z \cdot \frac{1}{|z^T|} \cdot z^T = \frac{1}{|z^T|_2} \langle z^T, z^T \rangle \stackrel{23.1.1}{=} |z^T|$$

3. Sei $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere den Integraloperator $K: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ durch

$$(Kf) := x \mapsto \int_0^1 k(x, y) \cdot f(y) dy \quad (x \in [0, 1])$$

(Kf stetig! ohne Beweis.) Dann K linear ($K(\alpha f + g) = \alpha \cdot Kf + Kg$) und K stetig, denn:

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \int_0^1 |k(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \underbrace{\sup_{x, y \in [0, 1]} |k(x, y)|}_{=: C} \cdot \|f\|_{[0, 1]} \\ \Rightarrow \|Kf\|_{[0, 1]} &\leq C \cdot \|f\|_{[0, 1]} \\ \Rightarrow \|K\| &= \{\|Kf\|_{[0, 1]} \mid f \in C[0, 1], \|f\|_{[0, 1]} \leq 1\} \\ &\leq C \end{aligned}$$

Dann Satz 26.1

26.2 Satz: Mittelwertsatz/Schrankensatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x, y \in U$, sodass die Verbindungsstrecke zwischen x und y in U :

$$\underbrace{\{(1-t) \cdot x + t \cdot y \mid 0 \leq t \leq 1\}}_{\text{Verbindungsgerade zwischen } x \text{ und } y} \subseteq U$$

Dann gibt es $t_0 \in (0, 1)$, sodass

$$|f(y) - f(x)|_2 \leq \|f'((1-t_0) \cdot x + t_0 \cdot y)\|_A \cdot |y - x|_2$$

Beweis:

1. Fall $n = 1$. Fasse $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Kurve $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf

•

$$\partial f(a) \text{ „} = \text{“} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_1 f_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix} = \tilde{f}'(a)$$

• Dann Satz 23.2 (Hilfssatz: „Mittelwertsatz“)

2. allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned} g &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \\ g(t) &:= f((1-t) \cdot x + t \cdot y) \\ &= f(x + t \cdot (y-x)) \\ (x + t \cdot (y-x))' &= (x + t \cdot y - t \cdot x)' \\ &= (x + t \cdot y)' + (0 - t \cdot x)' \\ &\stackrel{23.0.10}{=} y - x \\ g'(t) &\stackrel{25.3}{=} f'(x + t \cdot (y-x)) \cdot (x + t \cdot (y-x))' \\ &= f'(x + t \cdot (y-x)) \cdot (y-x) \\ |f(y) - f(x)|_2 &= |g(1) - g(0)|_2 \\ &\stackrel{1.}{\leq} (1-0) \cdot |g'(\xi)| \\ &= \underbrace{|f'(x + \xi \cdot (y-x))|}_{: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m} \underbrace{|y-x|}_{\in \mathbb{R}^n} \\ &\stackrel{26.1.3}{\leq} \|f'(x + \xi \cdot (y-x))\|_A \cdot |y-x|_2 \end{aligned}$$

Weitere Normen auf \mathbb{K}^n :

• Für $1 \leq p < \infty$ sei die p -Norm $|\cdot|_p: \mathbb{K}^n \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$|x|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Außerdem

$$|x|_\infty := \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$$

Gezeigt werden soll: $|\cdot|_p$ ist Norm. Absolute Homogenität und Definitheit sind leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot x|_p &= \left(\sum_{j=1}^n |\lambda \cdot x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n |\lambda|^p \cdot |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\lambda|^p \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda|^{\frac{p}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \cdot |x|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x|_p = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|}_{>0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : |x_j| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : x_j = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

- Für $p = 2$ leitet sich die Norm vom Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ her durch $|x|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}$
- Für $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
1 &= |x|_p \\
\Rightarrow 1 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow 1^p &= \sum_{i=1}^n |x_i|^p \\
\Rightarrow 1 &\geq |x_j|^p \\
\Rightarrow 1 &\geq |x_j|
\end{aligned}$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

– konvex : $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in (0, 1)$:

$$f((1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \leq (1 - \lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$$

– konkav : $\Leftrightarrow -f$ konvex, (\leq dreht sich rum)

26.3 Satz: Konvexe Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $f^{(2)}(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f konvex. (Umkehrung gilt auch, s. Hausaufgabe)

Beweis:

- Aus $(f')'(x) \geq 0, x \in D$ folgt $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in D, \lambda \in (0, 1)$ und

$$x := (1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2$$

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $x_1 < x_2$. Daher $x_1 < x < x_2$. Mit Mittelwertsatz: Es existieren $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= f'(\xi_1) \\
\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &= f'(\xi_2)
\end{aligned}$$

- Stelle fest:

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \quad x_2 - x = (1 - \lambda) \cdot (x_2 - x_1)$$

Wegen Monotonie:

$$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$$

und zwei mal Einsetzen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda \cdot (x_2 - x_1)} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{(1 - \lambda) \cdot (x_2 - x_1)} \\ (1 - \lambda) \cdot (f(x) - f(x_1)) &\leq \lambda \cdot (f(x_2) - f(x)) \\ f(x) &\leq \lambda \cdot f(x_2) - \lambda \cdot f(x) + f(x_1) + \lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(x_1) \\ f(x) &\leq (1 - \lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

26.4 Folgerung

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \geq 0$:

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

Beweis:

- Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ist einfach
- Betrachte $x, y > 0$.

$$\frac{1}{p} \in (0, 1) \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \in (0, 1)$$

$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist konkav, denn $\ln''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Damit:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p} \cdot x + \frac{1}{q} \cdot y\right) &\geq \frac{1}{p} \cdot \ln x + \frac{1}{q} \cdot \ln y \\ &\stackrel{13.2.2}{=} \ln(x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}) \end{aligned}$$

Da \exp monoton wachsend ist, bleibt nach Anwendung von \exp auf die Gleichung die Richtung von \geq erhalten

26.5 Satz: Höldersche Ungleichung

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |x|_p \cdot |y|_q \end{aligned}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $|x|_p \neq 0, |y|_q \neq 0$. Sei

$$\xi := \frac{1}{|x|_p} \cdot x \quad \eta := \frac{1}{|y|_q} \cdot y$$

Dann $|\xi|_p = 1$ und $|\eta|_q = 1$.

- Mit Folgerung 26.4:

$$\begin{aligned} \frac{|x_j \cdot y_j|}{|x|_p \cdot |y|_q} &= \left| \frac{1}{|x|_p} \cdot x_j \right| \cdot \left| \frac{1}{|y|_q} \cdot y_j \right| \\ &= |\xi_j| \cdot |\eta_j| \\ &= (|\xi_j|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|\eta_j|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{|\xi_j|^p}{p} + \frac{|\eta_j|^q}{q} \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|_p \cdot |y|_q} \sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| &\leq \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)}_{=1} + \frac{1}{q} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q \right)}_{=1} \\ &= 1 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| &\leq |x|_p \cdot |y|_q \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Für $p = q = 2$: Schwarzsche Ungleichung

26.6 Satz: Minkowskische Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty)$. Für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

(Dreiecksungleichung für $|\cdot|_p$)

Beweis:

- Einfach für $p = 1$.

$$\begin{aligned} |x + y|_1 &= \sum_{j=1}^n |(x + y)_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|) \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| \\ &= |x|_1 + |y|_1 \end{aligned}$$

- Sei $p > 1$, wähle q , sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definiere $z \in \mathbb{C}^n$ durch $(j = 1, \dots, n)$

$$z_j := |x_j + y_j|^{p-1} = \left| |x_j + y_j|^{p-1} \right| = |z_j|$$

Dann:

$$\begin{aligned}
 |x + y|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \\
 &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\
 &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |z_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n (|x_j| \cdot |z_j| + |y_j| \cdot |z_j|) \\
 &= \sum_{j=1}^n |x_j \cdot z_j| + \sum_{j=1}^n |y_j \cdot z_j| \\
 &\stackrel{26.5}{\leq} |x|_p \cdot |z|_q + |y|_p \cdot |z|_q \\
 &= (|x|_p + |y|_p) \cdot |z|_q
 \end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt nach Umstellen $p = (p-1) \cdot q$ sowie $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}(p-1)$. Somit:

$$\begin{aligned}
 |z|_q &= \left(\sum_{j=1}^n (|x_j + y_j|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}(p-1)} \\
 &= |x + y|_p^{p-1}
 \end{aligned}$$

Setze zusammen woraus dann die Behauptung folgt:

$$|x + y|_p^p \leq (|x|_p + |y|_p) |x + y|_p^{p-1}$$

27

Taylorformel, lokale Extrema

- Für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

27.1 Multinomialtheorem

- Polynomische Formel (Multinomialtheorem): Für $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{m!} (x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

wobei $x^\alpha := 1 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Begründung:

- Es gilt:

$$\frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha$$

mit geeigneten c_α

- Für $|\beta| = m$:

$$\begin{aligned} \partial^\beta \left(\frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \dots + x_n)^m \right) &= \frac{1}{m!} \cdot \partial^\beta ((x_1 + \dots + x_n)^m) \\ &= \frac{1}{m!} \cdot \left(m! \cdot (x_1 + \dots + x_n)^0 \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{m\text{-mal}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial^\beta \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha \right) &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot (\partial^\beta x^\alpha) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot \begin{cases} \beta! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \\ &= c_\beta \cdot \beta! \end{aligned}$$

27.2 Hilfssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, f ist m -mal stetig differenzierbar (d.h. m -mal stetig partiell differenzierbar), $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x + t \cdot \xi \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$$

Sei $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := f \circ g, \quad g(t) := x + t \cdot \xi$$

Dann:

$$\frac{1}{m!} h^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \xi^\alpha$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (f \circ g)' &= t \mapsto \sum_{j=1}^n \partial_j f(x + t \cdot \xi) \xi_j \\ &\stackrel{11.1.1.2.1}{=} t \mapsto \sum_{j=1}^n (\xi_j \cdot \partial_j) f(x + t \cdot \xi) \\ &\stackrel{11.1.1.2.1}{=} t \mapsto ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) f)(x + t \cdot \xi) \\ &= ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) f) \circ g \\ h''(t) &= ((f \circ g)')' \\ &= \underbrace{((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) f)}_{: U \rightarrow \mathbb{R}} \circ g \\ &= ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) f)) \circ g \\ &= (((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n) \circ (\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n)) f) \circ g \\ &= ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n)^2 f) \circ g \\ h^{(m)} &\stackrel{\text{Induktion}}{=} ((\xi_1 \partial_1 + \dots + \xi_n \partial_n)^m f) \circ g \\ &\stackrel{\text{Beweislücke}}{=} \left(\left(m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha \right) f \right) \circ g \\ &= t \mapsto m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \end{aligned}$$

27.3 Satz: Taylorsche Formel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für $0 \leq t \leq 1$. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + R_{k+1}(x + \xi)$$

mit

$$R_{k+1}(x + \xi) := (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) dt \cdot \xi^\alpha$$

Beweis:

- Für $g(t) := f(x + t \cdot \xi)$ gilt mit 1-dimensionaler Taylor-Formel:

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \cdot g^{(j)}(0) \cdot (1-0)^j + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \cdot g^{(k+1)}(t) dt \\ &\stackrel{27.1}{=} \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + R_{k+1}(x + \xi) \end{aligned}$$

$$R_{k+1}(x + \xi) = (k+1) \int_0^1 (1-t)^k \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) dt$$

mit

$$\frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \xi^\alpha$$

Bemerkungen:

- Ist $U = B(0, 1)$, $\partial^\alpha f = 0$ für alle $|\alpha| = k + 1$, dann ist f Polynom vom Grad $\leq n$.
- Es gilt:

$$P_j(\xi) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha$$

ist homogenes Polynom vom j -ten Grad, d.h.

$$P_j(t \cdot \xi) = t^j \cdot P_j(\xi)$$

da

$$\begin{aligned} (t \cdot \xi)^\alpha &= (t \cdot \xi_1, \dots, t \cdot \xi_n)^\alpha \\ &= t^{\alpha_1} \cdot \xi_1^{\alpha_1} \dots t^{\alpha_n} \cdot \xi_n^{\alpha_n} \\ &= t^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \end{aligned}$$

- Es folgt für $|\alpha| = k$

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha| &= |\xi|_p^k \cdot \left| \left(\frac{\xi}{|\xi|_p} \right)^\alpha \right| \\ &\stackrel{26.2.5}{=} |\xi|_p^k \cdot \underbrace{\left| \frac{\xi_1}{|\xi|_p} \right|^{\alpha_1}}_{<1} \dots \underbrace{\left| \frac{\xi_n}{|\xi|_p} \right|^{\alpha_n}}_{<1} \\ &\leq |\xi|_p^k \end{aligned}$$

- Damit Taylorformel:

$$f(x + \xi) = \sum_{j=1}^k P_j(\xi) + R_{k+1}(x + \xi)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= f(x) \\ P_1(\xi) &= \partial_1 f(x) \cdot \xi_1 + \dots + \partial_n f(x) \cdot \xi_n \\ &= \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle \\ P_2(\xi) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \\ &= \sum_{i < j} \partial_j \partial_i f(x) \cdot \xi_j \cdot \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=j} \partial_j \partial_k f(x) \cdot \xi_j \cdot \xi_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \partial_j \partial_k f(x) \cdot \xi_k \right) \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \langle A \cdot \xi, \xi \rangle \quad \text{mit } A := (\partial_j \partial_k f(x))_{j,k=1,\dots,n} =: \text{Hess } f(x) \end{aligned}$$

(Hess $f(x)$): Hessesche Matrix)

27.4 Folgerung: Restglied Taylorformel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar. Dann gilt für die Funktion φ definiert für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ wobei $x + \xi \in U$ und definiert durch die Gleichung:

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + |\xi|^k \cdot \varphi(\xi)$$

dass gilt:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = 0$$

Für $k = 2$ ergibt sich:

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + |\xi|^2 \cdot \varphi(\xi)$$

Beweis:

- Nach Taylorformel:

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + R_k(x + \xi)$$

mit

$$\begin{aligned} R_k(x + \xi) &= k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) dt \xi^\alpha \\ &- k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{k-1} dt}_{=\frac{1}{k}} \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \\ &= \underbrace{k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} [\partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) - \partial^\alpha f(x)] dt \cdot \xi^\alpha}_{\stackrel{!}{=} |\xi|^k \cdot \varphi(\xi)} \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \end{aligned}$$

ergibt sich eine konkretere Darstellung von φ , falls die Verbindungsstrecke zwischen x und $x + \xi$ in U liegt.

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq U$ und

$$|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $y \in B(x, \delta)$ und $|\alpha| = k$.

- Sei $|\xi| \leq \delta$, $|\alpha| = k$. Dann:

$$\begin{aligned} C := \left| \int_0^1 (1-t)^{k-1} [\partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) - \partial^\alpha f(x)] dt \cdot \xi^\alpha \right| &\leq \varepsilon \cdot \int_0^1 |1-t|^{k-1} dt \cdot |\xi^\alpha| \\ &\leq \varepsilon \cdot \frac{1}{k} \cdot |\xi|^k \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{|\xi|^k} \cdot k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha} \cdot C \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (1, \dots, 1)^\alpha \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)^k}_{n\text{-mal}} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{k!} \cdot n^k \end{aligned}$$

Damit Grenzwertverhalten gezeigt.

27.5 Satz: Notwendiges Kriterium für Extremum

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in $x \in U$ ein lokales Maximum.

1. Ist f in x partiell differenzierbar, dann $\text{grad } f(x) = 0$.
2. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist $\text{Hess } f(x)$ negativ semidefinit, d.h.

$$\langle \text{Hess } f(x) \cdot \xi, \xi \rangle \leq 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

1. $t \mapsto f(x + t \cdot e_j)$ hat bei $t = 0$ ein lokales Maximum, daher für $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x - 0 \cdot e_j)}{t - 0} \\ &= (t \mapsto f(x + t \cdot e_j))'(0) \\ &\stackrel{16.1}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Also } \text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Nach 1. und Folgerung 27.3: Für $\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ nahe bei 0 gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\geq f(x + t \cdot \xi) - f(x) \\ &= f(x) + 0 + \frac{t^2}{2} \cdot \langle \text{Hess } f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + t^2 \cdot |\xi|^2 \cdot \varphi(t \cdot \xi) - f(x) \\ \Rightarrow 0 &\geq \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + |\xi|^2 \cdot \varphi(t \cdot \xi) \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ mit Stetigkeit von φ folgt Behauptung.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. A heißt

- ... positiv definit $:\Leftrightarrow \langle A \cdot \xi, \xi \rangle > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- ... positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \langle A \cdot \xi, \xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$
- ... negativ definit $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit
- ... negativ semidefinit $:\Leftrightarrow -A$ positiv semidefinit
- ... semidefinit $:\Leftrightarrow A$ positiv semidefinit oder negativ semidefinit
- ... indefinit $:\Leftrightarrow A$ weder positiv noch negativ semidefinit

Bemerkung:

- A positiv definit

$$\Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

(Hurwitz-Kriterium, Sylvester-Kriterium)

Beispiele:

1. Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{Hess} f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\operatorname{Hess} f(0, 0)$ ist positiv definit. Also hat f in $(0, 0)$ ein lokales Minimum. (s. Satz 27.6)

Ist $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ positiv definit, dann ist

$$g(x, y) := \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

ein elliptisches Paraboloid.

2. Für $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Hyperbolisches Paraboloid):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0, 0) &= 0 \\ \operatorname{Hess} f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\operatorname{Hess} f(0, 0)$ ist indefinit.

27.6 Satz: Hinreichende Kriterien für Extrema

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Dann:

1. Ist $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv definit, dann hat f in x ein striktes lokales Minimum.
2. Ist $\operatorname{Hess} f(x)$ negativ definit, dann hat f in x ein striktes lokales Maximum.
3. Ist $\operatorname{Hess} f(x)$ indefinit, dann hat f kein lokales Extremum in x .

Beweis:

1. Sei $A := \operatorname{Hess} f(x)$. Dann gibt es $\alpha > 0$, sodass

$$\langle A \cdot \xi, \xi \rangle \geq \alpha \cdot |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, denn für $\alpha := \min\{\langle A \cdot \xi, \xi \rangle, |\xi| = 1\} > 0$ gilt (oBdA $\xi \neq 0$):

$$\begin{aligned}\min\{\langle Ax, x \rangle; |x| = 1\} \cdot |\xi|^2 &= \min\{\langle A(|\xi|x), (|\xi|x) \rangle; |x| = 1\} \\ &= \min\{\langle Ay, y \rangle; y = |\xi|x, |x| = 1\} \\ &= \min\left\{\langle Ay, y \rangle; \frac{y}{|\xi|} = x, |x| = 1\right\} \\ &= \min\left\{\langle Ay, y \rangle; \left|\frac{y}{|\xi|}\right| = 1\right\} \\ &= \min\{\langle Ay, y \rangle; |y| = |\xi|\} \\ &\leq \langle A\xi, \xi \rangle\end{aligned}$$

Nach Folgerung 27.3:

$$\begin{aligned} f(x + \xi) &\stackrel{27.4}{=} f(x) + \langle 0, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle A \cdot \xi, \xi \rangle + |\xi|^2 \cdot \varphi(\xi) \\ &\geq f(x) + \left(\frac{1}{2} \alpha + \varphi(\xi) \right) \cdot |\xi|^2 \end{aligned}$$

Es gibt $\delta > 0$, sodass $\xi \in B(x, \delta) \subseteq U$,

$$-\varphi(\xi) \leq |\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{4} \alpha$$

(Grenzwertverhalten von φ) Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4} \alpha + \varphi(\xi) \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{4} \alpha \leq \left(\frac{1}{2} \alpha + \varphi(\xi) \right) \end{aligned}$$

Damit für $\xi \neq 0$:

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{1}{4} \alpha \cdot |\xi|^2 > f(x)$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(x) \text{ negativ definit} &\Leftrightarrow -\text{Hess } f(x) \text{ positiv Definit} \\ &\Leftrightarrow \text{Hess}(-f)(x) \text{ positiv definit} \\ &\Rightarrow -f \text{ hat in } x \text{ striktes lokales Minimum} \\ &\Leftrightarrow f \text{ hat in } x \text{ striktes lokales Maximum} \end{aligned}$$

3. Hat f in x ein lokales Extremum, dann Hess $f(x)$ semidefinit wegen Satz 27.5

Beispiel:

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 - x^2 + (x + y)^2$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x + 2(x + y) \\ 2(x + y) \end{pmatrix}$$

Es soll nun gelten $\text{grad } f(x, y) = 0$. Offensichtlich dann $x = -y$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 2x + 0 \\ &= 2x \cdot (2x^2 - 1) \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \quad x_{2/3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mit } y_i = -x_i, i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x, y) &= 12x^2 - 2 + 2 = 12x^2 \\ \partial_x \partial_y f(x, y) &= 2 \\ \partial_y^2 f(x, y) &= 2 \end{aligned}$$

(a) Für x_1, y_1 gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(x_1, y_1) &= \text{Hess } f(0, 0) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(0, 0) & \partial_x \partial_y f(0, 0) \\ \partial_y \partial_x f(0, 0) & \partial_y \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 \cdot 0^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hess $f(x_1, y_1)$ ist indefinit (es liegt also kein Extremum vor), da:

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 2 > 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle &= -2 < 0\end{aligned}$$

(b) Für $x_{2/3}, y_{2/3}$ gilt:

$$\begin{aligned}\text{Hess } f(x_{2/3}, y_{2/3}) &= \text{Hess } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hess $f(x_{2/3}, y_{2/3})$ ist positiv definit, z.B. nach Hurwitz-Kriterium. Also liegen an (x_2, y_2) und (x_3, y_3) lokale Minima vor.

28

Implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

- Motivation:

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$.
- Betrachte $\{(x, y) \in U : F(x, y) = 0\}$.
- Frage: Ist $\{(x, y) \in U : F(x, y) = 0\}$ Graph einer Funktion?
- Gibt es also eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$. Was sind Bedingungen dafür? Die Funktion g ist dann implizit durch die Bedingung $F(x, g(x)) = 0$ definiert.
- Bei der Behandlung der Fragestellung wird man von einem Punkt (a, b) mit $F(a, b) = 0$ ausgehen und versuchen, Lösungen in einer Umgebung von (a, b) zu beschreiben.

- Beispiel:

- Es sei

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2, y) := x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$$

$F^{-1}(0)$ bildet die Einheitssphäre.

- Seien $a = (0, 0)$, $b = 1$

$$g: \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

Damit gilt $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$. Die Funktion g beschreibt so die obere Hälfte der Einheitssphäre.

Als Vorbereitung für später wird folgender Satz benötigt.

28.1 Satz: Banach'scher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Sei $\varphi: X \rightarrow X$. Es gebe $k \in [0, 1)$, sodass

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann besitzt φ genau einen Fixpunkt $x_0 \in X$, d.h.

$$\varphi(x_0) = x_0$$

Beweis:

- Eindeutigkeit: Es seien $x_0, x_1 \in X$ Fixpunkte. ($\varphi(x_0) = x_0$, $\varphi(x_1) = x_1$) dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_0, x_1) &= d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &\leq \underbrace{(k-1)}_{<0} \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &\geq d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &= d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow x_0 &= x_1 \end{aligned}$$

- Existenz: Sei $x \in X$. Behauptung: $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Es gilt:

$$d(\varphi^j(x), \varphi^{j-1}(x)) \leq k^{j-1} \cdot d(x, \varphi(x))$$

für $j \in \mathbb{N}$ (Induktion).

Für $0 \leq n \leq m$ folgt mit Dreiecksungleichung (Δ):

$$\begin{aligned} d(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{j=n+1}^m d(\varphi^{j-1}(x), \varphi^j(x)) \\ &\leq \underbrace{d(x, \varphi(x))}_{\in \mathbb{R}} \cdot \sum_{j=n+1}^m k^{j-1} \\ &\stackrel{6.1}{\rightarrow} 0(n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Also $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x)$.

φ ist stetig, denn für $a \in X$, $\varepsilon > 0$, $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$, $x \in X$ und $d(x, a) < \delta$ gilt: (11.1.2)

$$d(\varphi(x), \varphi(a)) \leq k \cdot d(x, a) < k \cdot \delta = \varepsilon$$

Damit ist x_0 Fixpunkt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\varphi^n(x)) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

28.2 Satz über implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig bzgl. der Metrik \tilde{d} auf $X \times U$

$$\tilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|_2$$

und differenzierbar nach y -Variablen, d.h. für jedes $x \in X$ sei $F(x, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Sei $a \in X$, $b \in U$ mit $F(a, b) = 0$. Es sei $D_b F(a, \cdot)$ invertierbar ($\cong n \times n$ -Matrix) und

$$(x, y) \mapsto D_y F(x, \cdot): X \times U \rightarrow (\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^n)$$

stetig im Punkt (a, b) . (Metrik: $(f, g) \mapsto \|f - g\|_A$) Dann gibt es offene Umgebungen $\hat{X} \subseteq X$ von a und $\hat{U} \subseteq U$ von b mit folgenden Eigenschaften:

1. Existenz: Es gibt $g: \hat{X} \rightarrow \hat{U}$ stetig mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \hat{X}$.
2. Eindeutigkeit: Aus $(x, y) \in \hat{X} \times \hat{U}$, $F(x, y) = 0$ folgt $y = g(x)$.

Beweis:

- $B := D_b F(a, \cdot)$ sei invertierbar. Definiere $G: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$G(x, y) := y - B^{-1} \cdot F(x, y)$$

Dann gilt:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = y$$

Sprich: Umwandlung der Nullstellensuche zu $F(x, \cdot)$ in Fixpunktsuche für $G(x, \cdot)$ für festes x .

- Aus

$$\begin{aligned} D_y G(x, \cdot) &= D_y (\text{id} - B^{-1} \circ F(x, \cdot)) \\ &= \underbrace{D_y \text{id}}_{=\text{id}} - \underbrace{D_{F(x,y)}(B^{-1})}_{=B^{-1}} \circ D_y F(x, \cdot) \\ &= \text{id} - B^{-1} \circ D_y F(x, \cdot) \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} D_b G(a, \cdot) &= \text{id} - B^{-1} \circ \underbrace{D_b F(a, \cdot)}_{=B} \\ &= \text{id} - \text{id} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Da $(x, y) \mapsto D_y G(x, \cdot)$ in (a, b) stetig ist, gibt es Umgebungen $\hat{X} \subseteq X$ von a und $\hat{U} \subseteq U$ von b , sodass für alle $(x, y) \in \hat{X} \times \hat{U}$:

$$\begin{aligned} \|D_y G(x, \cdot)\|_A &= \|D_y G(x, \cdot) - 0\|_A \\ &= \|D_y G(x, \cdot) - D_b(a, \cdot)\|_A \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Es gibt $r > 0$, sodass $B_{\mathbb{R}^n}[b, r] := B[b, r] \subseteq \hat{U}$. Da $G(a, b) = b$ ist, gibt es eine offene Umgebung $\hat{X} \subseteq \hat{X}$ von a , sodass

$$\sup_{x \in \hat{X}} |G(x, b) - b|_2 < \frac{r}{2}$$

- Wir zeigen, dass für $x \in \hat{X}$ der Banach'sche Fixpunktsatz auf $G(x, \cdot): B_{\mathbb{R}^n}[b, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$ anwendbar ist:

- $G(x, \cdot)$ ist „strikte“ Kontraktion:

Für $y, y' \in B_{\mathbb{R}^n}[b, r]$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x, y) - G(x, y')|_2 &\leq \|D_{y'+\xi \cdot (y-y')} G(x, \cdot)\|_A \cdot |y - y'|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot |y - y'|_2 \end{aligned}$$

mit geeigneten $\xi \in (0, 1)$ nach Satz 26.2 (Mittelwertsatz im \mathbb{R}^n).

- Für $|y - b|_2 < r$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x, y) - b|_2 &\leq \underbrace{|G(x, y) - G(x, b)|_2}_{\leq \frac{1}{2}|y-b|_2} + \underbrace{|G(x, b) - b|_2}_{< \frac{r}{2}} \\ &< r \end{aligned}$$

Damit: $G(x, \cdot): B_{\mathbb{R}^n}[b, r] \rightarrow \hat{U} := B_{\mathbb{R}^n}(b, r) \subseteq B_{\mathbb{R}^n}[b, r]$

- Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes gezeigt. ($k := \frac{1}{2}$) Es folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $g(x) \in \hat{U}$ mit $G(x, g(x)) = g(x)$.

- Stetigkeit von g : Für $x, x' \in \hat{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= |G(x, g(x)) - G(x', g(x'))| \\ &\leq |G(x, g(x)) - G(x', g(x))| + |G(x', g(x)) - G(x', g(x'))| \\ &\leq |G(x, g(x)) - G(x', g(x))| + \frac{1}{2} \cdot |g(x) - g(x')| \\ \Rightarrow |g(x) - g(x')| &\leq 2|G(x, g(x)) - G(x', g(x))| \\ &\rightarrow 0 \quad (x' \rightarrow x) \end{aligned}$$

Also g stetig in x . (11.1.3)

Beispiele:

1. Es sei $X = \mathbb{R}^2$, $n = 1$, $F((x, y), z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

$$S := \{((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid F((x, y), z) = 0\} \quad (\text{Einheitssphäre})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} D_z F((x, y), \cdot) &=: \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 2z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1, \quad (x, y, z) \in S \end{aligned}$$

Ist $a \in X$, $b \in \mathbb{R}$ mit $F(a, b) = 0$.

$$\begin{aligned} F((x, y), z) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \\ &\stackrel{1-x^2-y^2 > 0}{\Leftrightarrow} z \in \left\{ \sqrt{1 - x^2 - y^2}, -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\} \end{aligned}$$

Der erste Auflösungsatz erlaubt zwei Fälle: Ist $b > 0$ so kann nur gelten:

$$g(a) = \sqrt{1 - (a_1)^2 - (a_2)^2}$$

Da g laut erstem Auflösungsatz stetig ist, gilt ferner:

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ist die stetige Lösung von $F(x, y, g(x, y)) = 0$ in einer Umgebung von a . Ist $b < 0$, dann

$$g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

2. Sei $X := \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ (Menge der linearen Gleichungssysteme), $U := \mathbb{R}^n$ (Menge der Lösungskandidaten), $F: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Defekt mit

$$F((A, b), y) := A \cdot y - b$$

Also

$$F((A, b), y) = 0 \Leftrightarrow A \cdot y = b$$

Dann:

$$\partial F((A, b), \cdot) = \partial(A - \text{const } b) = A$$

invertierbar falls A invertierbar, außerdem ist $(A, b) \mapsto A$ stetig.

Satz 28.2: Ist $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $b_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A_0 \cdot y_0 = b_0$, so lässt sich für A und b in Umgebungen von A_0 und b_0 die Gleichung $A \cdot y = b$ lösen, mit y stetig abhängig von A und b , d.h. $y = A^{-1} \cdot b$. Dies folgt auch aus der Cramer'schen Regel. (Lineare Algebra)
Und zwar ist

$$g(A, b) = A^{-1}b = \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) b$$

stetig.

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$ und für alle $(x, y) \in U$ mit $f(x, y) = c$ gelte $\text{grad } f(x, y) \neq 0$. Dann lässt sich die „Höhenlinie“

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$$

immer lokal nach x oder y auflösen. (manchmal nur nach x oder y)

Wir kommen jetzt noch zur Differenzierbarkeit der in Satz 28.2 implizit definierten Funktion g , falls $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen:

Vorbetrachtung:

- Ist F in (a, b) differenzierbar, g differenzierbar in a , so folgt mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= (x \mapsto F(x, g(x)))'(a) \\ &= \frac{\partial F(a, g(a))}{\partial x} + \frac{\partial F(a, g(a))}{\partial y} \cdot g'(a) \\ g'(a) &= - \left(\frac{\partial F(a, g(a))}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a, g(a))}{\partial x} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Es sei $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Also:

$$\begin{aligned} x^2 + g(x)^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow F(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \\ \Rightarrow 2x + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{-x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

28.3 Satz: Differenzierbarkeit impliziter Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^k, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $(x, y) \mapsto F(x, y)$. Sei $(a, b) \in X \times U$ mit $F(a, b) = 0$, F in (a, b) differenzierbar, $\frac{\partial F(a, b)}{\partial y}$ invertierbar. Sei $g: X \rightarrow U$ stetig in a , $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in X$. Dann g in a differenzierbar und es gilt:

$$g'(a) = - \left(\frac{\partial F(a, b)}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a, b)}{\partial x}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $(a, b) = (0, 0)$. $A := \frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B := \frac{\partial F(0, 0)}{\partial y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar.
- F differenzierbar in $(0, 0)$:

$$F(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + (|x| + |y|) \cdot \varphi(x, y)$$

mit $\lim_{x, y \rightarrow 0} \varphi(x, y) = 0$. $F(x, g(x))$ schreibt sich also:

$$g(x) = \underbrace{-B^{-1} \cdot A \cdot x}_{g'(0)} - (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))$$

- Beweis, dass zweiter Term sich wie $|x| \cdot \psi(x)$ verhält in 2 Schritten:

1. $\exists \delta > 0, K > 0$, sodass $B(0, \delta) \subseteq X$ mit

$$|g(x)| \leq K \cdot |x|$$

für $|x| < \delta$.

Beweis:

– Es existiert $\delta > 0$ mit

$$|B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2}$$

für $|x| < \delta$. Damit:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |B^{-1} \cdot A \cdot x| + \frac{1}{2}|g(x)| + \frac{1}{2}|x| \\ |g(x)| &\leq (2\|B^{-1} \cdot A\| + 1) \cdot |x| \end{aligned}$$

2. Für $|x| < \delta$ gilt:

$$g(x) = -B^{-1} \cdot A \cdot x + |x| \cdot \psi(x)$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{|x|} \cdot (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x)) \\ |\psi(x)| &\leq (1 + K) \cdot |B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \\ &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

28.4 Satz: Stetige Differenzierbarkeit impliziter Funktionen (Zusatz zu 28.2)

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28.2: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $F: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann kann V_1 so gewählt werden, dass $g: V_1 \rightarrow V_2$ stetig differenzierbar ist.

Beweis:

- Wähle V_1 so, dass $\frac{\partial F(x, g(x))}{\partial y}$ für alle $x \in V_1$ invertierbar ist. (Möglich, da $\mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det A$ stetig ist) Dann Satz 28.3.
- Die Stetigkeit von g' folgt aus:

$$g'(x) = - \left(\frac{\partial F(x, g(x))}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(x, g(x))}{\partial x}$$

29

Lokale Invertierbarkeit, Lagrange-Multiplikatoren

Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U_1 \rightarrow U_2$ heißt Diffeomorphismus $:\Leftrightarrow f$ bijektiv, f und $f^{-1}(: U_2 \rightarrow U_1)$ stetig differenzierbar.

Bemerkung:

- Mit $g = f^{-1}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}g \circ f &= \text{id}_{U_1} \\ g'(f(x)) \cdot f'(x) &= E_n\end{aligned}$$

für alle $x \in U_1$, $f'(x)$ ist invertierbar,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1}$$

29.1 Satz: Satz der lokalen Invertierbarkeit, 2. Auflösungsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$, $f'(a)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung U_2 von $f(a) =: b$, sodass $f: U_1 \rightarrow U_2$ ein Diffeomorphismus ist. Mit $g = f^{-1}$ gilt:

$$g'(b) = f'(a)^{-1}$$

Beweis:

- Sei $F: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, y) := f(x) - y$. (Dann $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$, d.h. zum Finden von $g = f^{-1}$ ist $F(x, y) = 0$ nach x „aufzulösen“; beachte vertauschte Rollen von x und y gegenüber 1. Auflösungsatz)
- Es gilt: $F(a, b) = 0$ und

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial x} = f'(a) \text{ invertierbar}$$

Auch

$$\begin{aligned}F'(x, y) &= \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= (f'(x) \quad -E_n)\end{aligned}$$

stetig, damit ist F stetig differenzierbar.

- Aus Satz 28.2 und Zusatz 28.4: $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von b , $V \subseteq U$ offene Umgebung von a mit $g: U_2 \rightarrow V$ eindeutig definiert durch $F(g(y), y) = 0$ ($\Leftrightarrow f(g(y)) = y$) und g stetig differenzierbar.
- Für $x \in V, y \in U_2$ gilt:

$$x = g(y) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

Daher

$$U_1 := g(U_2) = f^{-1}(U_2) \cap V$$

offen (Analysis I, Übung Aufgabe 64). $f: U_1 \rightarrow U_2$ bijektiv, $g = f^{-1}|_{U_2}$.

Beispiel:

1. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 f: (0, \infty) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 (r, \varphi) &\mapsto &\begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \\
 f'(r, \varphi) &= &&\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 \det f'(r, \varphi) &= &&r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r \neq 0
 \end{aligned}$$

Also $f'(r, \varphi)$ lokal invertierbar.

29.2 Satz: Notwendige Bedingung für lokales Extremum unter Nebenbedingung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $1 \leq m \leq n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. $f'(x)$ habe Rang m für alle $x \in U$. Sei $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a \in U$ mit $f(a) = 0$ und h habe in a ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $f = 0$, d.h. es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von a mit $h(a) \geq h(x)$ für alle $x \in V \cap M$, wobei

$$M := \{x \in U; f(x) = 0\}$$

Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\text{grad } h(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } f_j(a)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen Lagrange-Multiplikatoren. (Notwendige Bedingung für lokales Extremum mit Nebenbedingung, geeignet zur „Kandidatensuche“)

Beweis:

- Nach Umm Nummerieren der Variablen und Verkleinern von U :

$$\begin{aligned}
 k &:= n - m \\
 x &= (\tilde{x}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \quad f(x) = f(\tilde{x}, \hat{x}) \\
 &\Rightarrow \frac{\partial f(\tilde{x}, \hat{x})}{\partial \hat{x}}(\tilde{x}, \hat{x}) \text{ invertierbar für alle } (\tilde{x}, \hat{x}) \in U
 \end{aligned}$$

($f'(a)$ hat m linear unabhängige Spalten, o.E. die letzten, d.h. $\frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}$ invertierbar.)

- Satz über implizite Funktionen und Zusatz 28.4: \exists offene Umgebung $\check{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ von \check{a} , offene Umgebung $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von \hat{a} , $g: \check{V} \rightarrow \hat{V}$ stetig differenzierbar mit $f(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = 0$ für alle $\tilde{x} \in \check{V}$ und $g(\check{a}) = \hat{a}$. ($(\tilde{x}, g(\tilde{x})) \in M$)

- Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\tilde{x} \mapsto f(\tilde{x}, g(\tilde{x})))'(a) \\
 &= \frac{\partial f(a)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}} \cdot g'(a)
 \end{aligned}$$

- Die Funktion $H: \check{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \mapsto h(\tilde{x}, g(\tilde{x}))$ besitzt in $\check{a} = \tilde{a}$ ein lokales Maximum, daher

$$\begin{aligned}
 0 &= H'(\check{a}) = \frac{\partial h(a)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} \cdot g'(\check{a}) \\
 &= \frac{\partial h(a)}{\partial \tilde{x}} - \underbrace{\left(\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}^{-1} \right)}_{=:\lambda} \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \tilde{x}} \\
 \Rightarrow \frac{\partial h(a)}{\partial \tilde{x}} &= \lambda \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \tilde{x}}
 \end{aligned}$$

Auch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} &= \left(\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial f(a)^{-1}}{\partial \hat{x}} \right) \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}} \\ &= \lambda \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}} \end{aligned}$$

Also:

$$h'(a) = \lambda \cdot f'(a)$$

Transponiert:

$$\begin{aligned} \text{grad } h(a) &= (\text{grad } f_1(a) \quad \dots \quad \text{grad } f_m(a)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \text{grad } f_j(a) \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Erklärung für $m = 1$:

Falls $\text{grad } h(a)$ nicht gleiche Richtung wie $\text{grad } f(a)$, dann würde h in Umgebung von a (auf $f = 0$) noch anwachsen, also a nicht Maximum.

2. Andere Formulierung der Methode:

Betrachte

$$H: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, H(x, \lambda) = h(x) - \lambda_1 \cdot f_1(x) - \dots - \lambda_m \cdot f_m(x)$$

und suche nach x, λ mit $H'(x, \lambda) = 0$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x, \lambda)}{\partial x} \\ \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } h(x) - \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1(x) \dots \\ -(f_1(x) \quad \dots \quad f_m(x)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Lokale Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x \cdot y^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 1$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y - 1 \\ \text{grad } h &= \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y^2 &= \lambda \\ 2xy &= \lambda \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 & \lambda &= 0 & x_1 &= 1 \\ y_2 &= 2x & x_2 &= \frac{1}{3} & y_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit:

$$h(x_1, y_1) = 0 \quad h(x_2, y_2) = \frac{4}{27} > h(x_1, y_1)$$

Globale Betrachtungen bei $f = 0$:

$$\begin{aligned} h(x, y) &\rightarrow \infty & (x \rightarrow \infty) \\ h(x, y) &\rightarrow -\infty & (x \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

Also (x_1, y_1) lokales Minimum, (x_2, y_2) lokales Maximum.

2. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann besitzt A eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren, d.h. $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ mit $(x^j | x^k) = \delta_{jk}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $A \cdot x^j = \lambda \cdot x^j$ für $j = 1, \dots, n$.

Beweis:

- Betrachte

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= (A \cdot x | x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \cdot x_j \cdot x_k \\ f_0: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & f_0(x) &= |x|^2 - 1 \end{aligned}$$

Maximumstelle x^1 von h unter $f_0 = 0$ existiert ($\{x; f_0(x) = 0\}$ kompakt und h stetig). Nach Satz 29.2 existiert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$:

$$\text{grad } h(x^1) = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_0(x^1)$$

Nun gilt wegen der Symmetrie von A :

$$\begin{aligned} \text{grad } h(x) &= 2Ax \\ \text{grad } f_0(x) &= 2x \\ \Rightarrow A \cdot x^1 &= \lambda_1 \cdot x^1 \end{aligned}$$

Jetzt weitere Nebenbedingung: $f_1(x) = (x | x^1)$.

$$\text{grad } f_1(x) = x^1 \quad \text{grad } f_0(x) = 2x$$

sind linear unabhängig auf M_2

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; f_0(x) = f_1(x) = 0\}$$

und daher in Umgebung von M_2 . Aus Kompaktheit von M_2 folgt: Es existiert Maximumstelle x^2 von h auf M_2 . Nach Satz 29.2 gibt es λ'_1, λ_2 :

$$2Ax^2 = 2\lambda_2 \cdot x^2 + \lambda'_1 \cdot x^1$$

Wegen

$$(Ax^2 | x^1) = (x^2 | Ax^1) = \lambda'_1 \cdot (x^2 | x^1) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (2Ax^2 - 2\lambda_2 \cdot x^2 - \lambda'_1 \cdot x^1 | x^1) \\ &= -\lambda'_1 \cdot (x^1 | x^1) \\ \Rightarrow \lambda'_1 &= 0 \end{aligned}$$

Also:

$$Ax^2 = \lambda_2 \cdot x^2$$

u.s.w. (nächste Nebenbedingung $f_2(x) := (x | x^2)$)

31

Integral von Treppenfunktionen im \mathbb{R}^n

- Ziel: Berechnung von Volumina, z.B. $\text{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0, 1))$:

$$\begin{aligned}\text{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)) &= \int_{B(0,1)} 1 \, dx \\ &= 2 \int_{B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1)} \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \, dx_1 \dots dx_{n-1}\end{aligned}$$

- Für $a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$a \leq b \Leftrightarrow a_j \leq b_j \text{ für alle } j = 1, \dots, n$$

Falls $a \leq b$:

$$\begin{aligned}[a, b] &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; a \leq x \leq b\}\end{aligned}$$

(n -dimensionales abgeschlossenes Intervall)

$$\text{vol}_n[a, b] := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

(n -dimensionales Volumen (Maß) von $[a, b]$)

- Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{1}_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{1}_B := \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

Indikatorfunktion von B (charakteristische Funktion), auch $\chi_b := \mathbb{1}_B$

- Treppenfunktionen:

$$T(\mathbb{R}^n) := \text{lin}\{\mathbb{1}_{[a,b]}; a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b\}$$

(Vektorraum). Jede Treppenfunktion f hat die Gestalt

$$f = \sum_{j=1}^m c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $a^1, \dots, a^m, b^1, \dots, b^m \in \mathbb{R}^n$, $a^j \leq b^j$ für alle $j = 1, \dots, m$.

- Bemerkungen:

1. Für $n = 1$: Bekannte Treppenfunktionen, abgesehen davon, dass bisher nur auf Intervallen definiert. Beispiel:

$$\varphi(x) := \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-2,0]} + 3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} + 96,5 \cdot \mathbb{1}_{[0,0]}$$

2. Ergänzung: Auch im \mathbb{R}^n ist folgende Definition möglich: Gegeben sei Intervallsystem $\{I\}$ mit $\text{int } I \cap \text{int } \tilde{I} = \emptyset$ für $I \neq \tilde{I}$.

$$f(x) = c_I \quad \text{für } x \in \text{int}(I)$$

Für $x \notin \bigcup I$ sei $f(x) = 0$.

3. Sei $1 \leq k \leq n - 1$, $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $\hat{x} = (x_{k+1} \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist dann $f(\cdot, \hat{x}) \in T(\mathbb{R}^k)$.

Beweis:

– Es genügt $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ zu betrachten. Seien $a = (\check{a}, \hat{a})$, $b = (\check{b}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) \\ &= \mathbb{1}_{[\check{a}, \check{b}]}(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]}(\hat{x}) \end{aligned}$$

Damit:

$$f(\cdot, \hat{x}) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[\check{a}, \check{b}]} & \text{falls } \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

• Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$$

mit $a^j, b^j \in \mathbb{R}^n$, $a^j \leq b^j$ für $j = 1, \dots, k$ definieren wir das Integral

$$\int f(x) dx := \sum_{j=1}^k c_j \cdot \text{vol}_n([a^j, b^j])$$

Hierbei ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, also die rechte Seite unabhängig von der Darstellung von f ist.

31.1 Satz: Eigenschaften des Integrals

1. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist das soeben definierte Integral wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Darstellung ab.
2. Die Abbildung $f \in T(\mathbb{R}^n) \mapsto \int f(x) dx$ ist linear.
3. Sei $1 \leq k \leq n - 1$. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\hat{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}$ eine Treppenfunktion und

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

Es folgt somit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n$$

Beweis:

1. • Es genügt zu zeigen: $f \in T(\mathbb{R}^n)$, $f = \sum_{j=1}^m c_j \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$ mit $f(x) = 0$ für alle x , so gilt

$$\sum_{j=1}^m c_j \cdot \text{vol}_n[a^j, b^j] = 0$$

• Für $n = 1$:

Für $f = \sum_{j=1}^m c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j, b^j]}$ sei $x_0 < \dots < x_l$ mit $\{x_k\} = \{a^j, b^j; j = 1, \dots, m\}$. Dann gilt:

$$\text{vol}[a^j, b^j] = \sum_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} \text{vol}[x_i, x_{i+1}]$$

Dann:

$$\begin{aligned}
 \int f &= \sum_{j=1}^m c_j \cdot \text{vol}[a^j, b^j] \\
 &= \sum_{j=1}^m c_j \cdot \sum_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} \text{vol}[x_i, x_{i+1}] \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \text{vol}[x_i, x_{i+1}] \left(\sum_{j: [x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} c_j \right)
 \end{aligned}$$

Nun gilt für $x \in (x_i, x_{i+1})$:

$$f(x) = \sum_{j: [x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} c_j = 0$$

wegen $f = 0$. Damit $\int f = 0$.

- Sei $n \geq 2$ und die Aussage für $1, \dots, n-1$ bewiesen. Sei $1 \leq k \leq n-1$. Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist die Treppenfunktion

$$f(\tilde{x}, \cdot) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j, \check{b}^j]}(\tilde{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}^j, \hat{b}^j]}(\cdot)$$

die Nullfunktion und nach Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{j=1}^m c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j, \check{b}^j]} \cdot \text{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] = 0$$

Abermals nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m c_j \cdot \text{vol}[\check{a}^j, \check{b}^j] \cdot \text{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] &= 0 \\
 \sum_{j=1}^m c_j \cdot \text{vol}[a^j, b^j] &= 0 \\
 \int f &= 0
 \end{aligned}$$

2. Klar nach Definition.
3. Es genügt diese Eigenschaft für die Indikatorfunktion zu zeigen (wegen Linearität). Sei $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int \mathbb{1}_{[a,b]}(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x} &= \text{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]} \\
 \int \left(\int \mathbb{1}_{[a,b]}(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x} \right) d\hat{x} &= \text{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \int \mathbb{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]} d\hat{x} \\
 &= \text{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \text{vol}[\hat{a}, \hat{b}] \\
 &= \text{vol}[a, b] \\
 &= \int f
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Wiederholte Anwendung der letzten Formel von Satz 31.1 ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, f(x_n)) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n$$

2. Obige Formel für allgemeinere Funktionen erlaubt die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen.

31.2 Folgerung: Positivität des Integrals

Aus $f, g \in T(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x) dx \leq \int g(x) dx$$

Beweis: per Induktion (ähnlich 31.1)

31.3 Satz: Weitere Treppenfunktionen

Sei $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^\pm, |f|, f \wedge 1$ sind ebenfalls Treppenfunktionen.

$$f^+ = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \max\{f(x), 0\}$$

$$(f \wedge 1)(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) < 1 \\ 1 & f(x) \geq 1 \end{cases} = \min\{f(x), 1\}$$

31.4 Hilfssatz

Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{1}_A \in T(\mathbb{R}^n)\}$. Dann gilt:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$$

Beweis: siehe Übung

Beweis zu Satz 31.3:

- Sei $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit n -dimensionalen abgeschlossenen Intervallen A_i . Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, k\}$:

$$A_J := \bigcap_{j \in J} A_j \setminus \bigcup_{j \notin J} A_j$$

$$a_J := \sum_{j \in J} a_j$$

Dann gilt:

$$f = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, k\}} a_J \cdot \mathbb{1}_{A_J}$$

und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$. (A_J besteht genau aus den x , die in A_j sind für $j \in J$, aber nicht in A_j für $j \notin J$.) Daher:

$$f^+ = \sum_J \max\{a_J, 0\} \cdot \mathbb{1}_{A_J}$$

$$f \wedge 1 = \sum_J \min\{f(x), 1\} \cdot \mathbb{1}_{A_J}$$

sind Treppenfunktionen.

32

Das n -dimensionale Riemann-Integral

- Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann

$$\overline{\int} f(x) dx := \inf \left\{ \int \psi(x) dx; \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f \right\}$$

Oberintegral von f ,

$$\underline{\int} f(x) dx := \sup \left\{ \int \varphi(x) dx; \varphi \in T(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f \right\}$$

Unterintegral von f . (Dabei $\overline{\int} f = \infty$, falls $\nexists \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq f$.) Offenbar $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

- f heißt Riemann-Integrierbar, wenn

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f$$

und $\int f(x) dx = \overline{\int} f(x) dx$.

- Bemerkung: $\overline{\int} f < \infty \Leftrightarrow \exists \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f \Leftrightarrow f$ nach oben beschränkt und $\exists r > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B[0, r]: f(x) \leq 0$

32.1 Hilfssatz: Rechenregeln Ober- und Unterintegral

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

1. $\underline{\int} f(x) dx = -\overline{\int} (-f)(x) dx$
2. $\overline{\int} c f(x) dx = c \cdot \overline{\int} f(x) dx$ für $c \geq 0$
3. $\overline{\int} (f + g)(x) dx \leq \overline{\int} f(x) dx + \overline{\int} g(x) dx$, falls $\overline{\int} f(x) dx, \overline{\int} g(x) dx < \infty$

„Rechenregeln“:

$$\begin{aligned} c \cdot \infty &= \infty & c \cdot (-\infty) &= -\infty & (c > 0) \\ \infty + a &= a + \infty = \infty & (-\infty < a \leq \infty) \\ -\infty + a &= a - \infty = -\infty & (-\infty \leq a < \infty) \end{aligned}$$

Beweis:

- Siehe $n=1$. Für 3.: Es existieren $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $f \leq \varphi, g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \varphi + \psi$. Daher:

$$\begin{aligned} \overline{\int} f + g &\leq \int \varphi + \psi \\ &= \int \varphi + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g &\leq \overline{\int} f + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g &\leq \overline{\int} f + \overline{\int} g \end{aligned}$$

32.2 Satz: Linearität des Riemann-Integrals

Die Menge $R(\mathbb{R}^n)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum und die Abbildung

$$R(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int f(x) dx \in \mathbb{R}$$

ist linear. Aus $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x) dx \leq \int g(x) dx$$

(Monotonie des Integrals)

Beweis: siehe $n = 1$

Bemerkung:

- Aus Monotonie: Ist $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $m \leq f \leq M$ für geeignete $m, M \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$, dann

$$m \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \leq f \leq M \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$$

daher:

$$m \cdot \text{vol}_n[a, b] \leq \int f \leq M \cdot \text{vol}_n[a, b]$$

32.3 Satz: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann äquivalent:

1. $f \in R(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}^n) : \varphi \leq f \leq \psi, \int (\psi - \varphi) dx \leq \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists g, h \in R(\mathbb{R}^n) : g \leq f \leq h, \int (h - g) dx \leq \varepsilon$

Beweis:

1. $1. \Leftrightarrow 2.$: Klar nach Definition
2. $2. \Rightarrow 3.$: Trivial
3. $3. \Rightarrow 1.$:

Sei $\varepsilon > 0$ und g, h wie in 3. vorausgesetzt. dann:

$$\begin{aligned} \int g &\leq \int \underline{f} \leq \overline{\int f} \leq \int h \leq \int g + \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{\int f} - \int \underline{f} &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

32.4 Satz: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$, $f|_{[a,b]}$ stetig, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus [a,b]} = 0$. Dann $f \in R(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_{[a,b]}$ gleichmäßig stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass aus $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Man findet eine Überdeckung von $[a, b]$ durch abgeschlossene n -dimensionale Intervalle Q_1, \dots, Q_m mit Seitenlängen $\leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, alle $Q_j \subseteq [a, b]$. Für $x, y \in Q_j$ folgt dann:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wir disjunktuieren

$$\tilde{Q}_1 := Q_1 \quad \tilde{Q}_2 := Q_2 \setminus Q_1 \quad \tilde{Q}_j := Q_j \setminus \bigcup_{k=1, \dots, j-1} Q_k$$

und wählen $x^j \in Q_j$ für $j = 1, \dots, m$ (ohne Einschränkung $\tilde{Q}_j \neq \emptyset$). Nach Hilfssatz 31.4 sind $\mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} \in T(\mathbb{R}^n)$ für $j = 1, \dots, m$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=1}^m f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j}}_{=:g} - \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} &\leq f \leq \underbrace{\sum_{j=1}^m f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j}}_{=:h} + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \\ \Rightarrow \int (h - g)(x) dx &= \int 2\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} dx \\ &= 2\varepsilon \cdot \text{vol}_n[a, b] \end{aligned}$$

Mit Satz 32.3: $f \in R(\mathbb{R}^n)$

32.4.1 Kompakte Träger

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum. Für $f \in C(\Omega)$: Träger von f

$$\text{spt } f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^\Omega$$

und

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega); \text{spt } f \text{ kompakt}\}$$

Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

$$\text{spt}(f + g) \subseteq \text{spt}(f) + \text{spt}(g)$$

Aus Satz 32.4: $C_c(\mathbb{R}^n) \subset R(\mathbb{R}^n)$

- Beispiele:

1. $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi(x) := x^2 - 1$. Dann: $\text{spt}(\varphi) = (-1, 1) \Rightarrow \varphi \notin C_c((-1, 1))$
2. $\Omega = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \begin{cases} x^2 - 1 & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \notin (-1, 1) \end{cases} \\ \text{spt}(\varphi) &= [-1, 1] \Rightarrow \varphi \in C_c(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

32.5 Satz: Fundamentale Ungleichung

Seien $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^+, f^-, |f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f \cdot g \in R(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt:

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx$$

(fundamentale Ungleichung)

Beweis:

- f^+ : Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Dann $\varphi^+ < f^+ < \psi^+$ und $\psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$ mit $\varphi^+, \psi^+ \in T(\mathbb{R}^n)$. Also:

$$\int(\psi^+ - \varphi^+) \leq \int(\psi - \varphi) < \varepsilon$$

Damit $f^+ \in R(\mathbb{R}^n)$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} f^- &= (-f)^+ \in R(\mathbb{R}^n) \\ |f| &= f^+ + f^- \in R(\mathbb{R}^n) \\ \max\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2} \cdot |f - g| \in R(\mathbb{R}^n) \\ \min\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2} \cdot |f - g| \in R(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

- $f \cdot g$: o.E.: $0 \leq f \leq 1, 0 \leq g \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq 1, 0 \leq \varphi_2 \leq g \leq \psi_2, \int(\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon, \int(\psi_2 - \varphi_2) \leq \varepsilon$. Dann:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \leq f \cdot g \leq \psi_1 \cdot \psi_2$$

mit $\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi_1 \cdot \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$. Damit:

$$\begin{aligned} \int(\psi_1 \cdot \psi_2 - \varphi_1 \cdot \varphi_2) &= \int \underbrace{(\psi_1 - \varphi_1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\psi_2}_{\leq 1} + \int \underbrace{(\psi_2 - \varphi_2)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\varphi_1}_{\leq 1} \\ &\leq \int(\psi_1 - \varphi_1) + \int(\psi_2 - \varphi_2) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

- Fundamentale Ungleichung: Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

$$\pm \int f \leq \int |f|$$

32.5.1 Jordan-Messbarkeit

- Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. B heißt Jordan-messbar $:\Leftrightarrow \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\text{vol}_n(B) := \int \mathbb{1}_B(x) dx$$

Volumen (Jordan-Inhalt).

- Für $f \in R(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\mathbb{1}_B \cdot f \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_B f(x) dx := \int \mathbb{1}_B \cdot f(x) dx$$

- Ebenso: Ist $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases} \in R(\mathbb{R}^n)$$

, dann:

$$\int_B f(x) dx := \int \mathbb{1}_B \cdot \tilde{f} dx$$

- B heißt Jordan-Nullmenge $:\Leftrightarrow B$ Jordan-messbar und $\text{vol}_n(B) = 0$.

• Bemerkungen:

1. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow B$ beschränkt, ∂B [Rand von B] ist Jordan-Nullmenge. (folgt aus Aufgabe 71b))
2. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ Jordan-messbar

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A \cap B} \in R(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \setminus A} \in R(\mathbb{R}^n)$$

Menge der Jordan-messbaren Mengen bilden einen Mengerring.

33

Satz von Fubini, Berechnung von Integralen

33.1 Satz von Fubini

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Sei $1 \leq k \leq n-1$. ($x \in \mathbb{R}^n : x = (\tilde{x}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$). Dann ist

$$\mathbb{R}^{n-k} \ni \hat{x} \mapsto \overline{\int f(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x}}$$

Riemann-integrierbar und

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^k} f(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x}} \right) d\hat{x}$$

Bemerkung: Statt $\overline{\int}$ auch $\underline{\int}$ möglich.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, \hat{x}) &\leq f(\cdot, \hat{x}) \leq \psi(\cdot, \hat{x}) \\ \Rightarrow \underbrace{\int \varphi(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x}}_{=:\varphi_2(\hat{x})} &\leq \underbrace{\overline{\int f(\tilde{x}, \hat{x})}}_{=:f_2(\hat{x})} \leq \underbrace{\int \psi(\tilde{x}, \hat{x}) d\tilde{x}}_{=:\psi_2(\hat{x})} \end{aligned}$$

Dann $\varphi_2(\hat{x}), \psi_2(\hat{x}) \in T(\mathbb{R}^{n-k})$ nach Satz 31.1.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})) d\hat{x} = \int (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \varepsilon$$

Aus Satz 32.3: $f_2 \in R(\mathbb{R}^{n-k})$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x}) d\hat{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi \\ \int \varphi &\leq \int f \leq \int \psi \end{aligned}$$

Damit:

$$\left| \int f_2(\hat{x}) d\hat{x} - \int f \right| < \int \psi - \int \varphi < \varepsilon$$

33.2 Folgerung: Berechnung von Integralen

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\int f(x) dx = \int_{x_n \in \mathbb{R}} \dots \int_{x_1 \in \mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

falls die Integrale existieren. Reihenfolge der Integration ist vertauschbar.

Beispiel:

1. Volumen eines abgeschnittenen Drehparaboloids

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

später: B ist Jordan-messbar.

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \int \int \int \mathbb{1}_B dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} 1 dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx \\ &= 2 \cdot \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad x = \cos t \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \sin t dt \\ &= \frac{8}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos(2t) + \cos^2(2t)) dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

mit $\sin^4 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Einfacher:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \int \int \mathbb{1}_B(x, y, z) d(x, y) dz \\ &= \int_0^1 \int_{x^2+y^2 \leq 1-z} 1 d(x, y) dz \\ &= \int_0^1 \pi \cdot \sqrt{1-z^2} dz \\ &= \pi \cdot \left[z - \frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

33.3 Folgerung: Prinzip von Cavalieri

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $1 \leq k \leq n-1$ und für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned} A_{\hat{x}} &:= \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid (\tilde{x}, \hat{x}) \in A\} \\ B_{\hat{x}} &:= \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^k \mid (\tilde{x}, \hat{x}) \in B\} \end{aligned}$$

Jordan-messbar und $\text{vol}_k(A_{\hat{x}}) = \text{vol}_k(B_{\hat{x}})$. Dann:

$$\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(B)$$

Beweis:

- Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt:

$$\mathbb{1}_A(\cdot, \hat{x}) = \mathbb{1}_{A_{\hat{x}}} \quad \mathbb{1}_B(\cdot, \hat{x}) = \mathbb{1}_{B_{\hat{x}}}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_n(A) &= \int \mathbb{1}_A(x) dx \\
 &= \int_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int_{\check{x} \in \mathbb{R}^k} \underbrace{\mathbb{1}_A(\check{x}, \hat{x})}_{\mathbb{1}_{A_{\hat{x}}}} d\check{x} d\hat{x} \\
 &= \int_{\hat{x}} \text{vol}_k(A_{\hat{x}}) d\hat{x} \\
 &= \int_{\hat{x}} \text{vol}_k(B_{\hat{x}}) d\hat{x} \\
 &= \dots = \text{vol}_n(B)
 \end{aligned}$$

33.4 Satz: Stetigkeit bei iterierten Integralen

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n, a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $1 \leq k \leq n - 1$. Dann ist

$$[\hat{a}, \hat{b}] \ni \hat{x} \mapsto \int_{\check{x} \in [\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}$$

stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. (f gleichmäßig stetig)
- Für $\hat{x}, \hat{y} \in [\hat{a}, \hat{b}], |\hat{x} - \hat{y}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{[\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} - \int_{[\check{a}, \check{b}]} f(\check{x}, \hat{y}) d\check{x} \right| &\leq \int_{[\check{a}, \check{b}]} \underbrace{|f(\check{x}, \hat{x}) - f(\check{x}, \hat{y})|}_{< \varepsilon} d\check{x} \\
 &\leq \varepsilon \cdot \text{vol}_{n-k}[\check{a}, \check{b}]
 \end{aligned}$$

da

$$|(\check{x}, \hat{x}) - (\check{x}, \hat{y})| = |\hat{x} - \hat{y}| < \delta$$

33.5 Satz: Jordan-Messbarkeit

Seien $f_1, f_2 \in R(\mathbb{R}^n), f_1 \leq f_2$. Dann ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f_1(x) < y < f_2(x)\}$$

Jordan-messbar,

$$\text{vol}_{n+1}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

33.6 Hilfssatz: Jordan-Messbarkeit kartesisches Produkt

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^k, B \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ Jordan-messbar. Dann $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1 \in T(\mathbb{R}^k)$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq \mathbb{1}_A \leq \psi_1 \leq 1$ und $\int(\psi_1 - \varphi_1) < \varepsilon$. Entsprechend φ_2, ψ_2 zu B. Dann:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\check{x}, \hat{x}) &:= \varphi_1(\check{x}) \cdot \varphi_2(\hat{x}) \\
 \psi(\check{x}, \hat{x}) &:= \psi_1(\check{x}) \cdot \psi_2(\hat{x})
 \end{aligned}$$

Dann $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi(\check{x}, \hat{x}) \leq \underbrace{\mathbb{1}_A(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_B(\hat{x})}_{\mathbb{1}_{A \times B}} \leq \psi(\check{x}, \hat{x})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int (\psi(\check{x}, \hat{x}) - \varphi(\check{x}, \hat{x})) dx &= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x})) \cdot \psi_2(\hat{x}) dx + \int \varphi_1(\check{x}) \cdot (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})) dx \\ &= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x})) d\check{x} \cdot \int \psi_2(\hat{x}) d\hat{x} \\ &\quad + \int \varphi_1(\check{x}) d\check{x} \cdot \int (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})) d\hat{x} \\ &\leq \varepsilon \cdot (\text{vol}_{n-k}(B) + \varepsilon) + \text{vol}_k(A) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Beweis zu Satz 33.5:

1. Sind $f_1, f_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ so gilt die Behauptung:

Es gibt Jordan-messbare Mengen $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A_j \cap A_i = \emptyset$ für $j \neq i$, sodass

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{j=1}^k c'_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \\ f_2 &= \sum_{j=1}^k c''_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \end{aligned}$$

(Beweis von Satz 31.3) Dann:

$$B_j := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c'_j < y < c''_j, x \in A_j\} = A_j \times (c'_j, c''_j)$$

Jordan-messbar nach Hilfssatz 33.6. Damit auch

$$B = \bigcup_{j=1}^k B_j$$

Jordan-messbar.

2. Allgemeiner Fall:

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \leq f_1 \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq f_2 \leq \psi_2$, $\int (\psi_j - \varphi_j) < \varepsilon$ für $j=1,2$. Dann sind

$$\begin{aligned} B_i &:= \{(x, y) \mid \psi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ B_a &:= \{(x, y) \mid \varphi_1(x) < y < \psi_2(x)\} \end{aligned}$$

Jordan-messbar nach 1. und $B_i \subseteq B \subseteq B_a$ (oder $\mathbb{1}_{B_i} \leq \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_{B_a}$). Außerdem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\mathbb{1}_{B_a} - \mathbb{1}_{B_i}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_2 - \varphi_1) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_2 - \psi_1)^+}_{\geq \int (\varphi_2 - \psi_1)} \\ &\leq \int ((\psi_2 - \varphi_1) - (\varphi_2 - \psi_1)) \\ &= \int (\psi_2 - \varphi_2) + \int (\psi_1 - \varphi_1) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Damit $\mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Gleichheit: Satz von Fubini

Bemerkungen:

1. $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ ist Jordan-messbar: $f_1, f_2: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_2(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} & x \in B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_1(x) := -f_2(x)$$

Dann $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1) = B$ aus Satz 33.5.

2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow \partial A$ Jordan-Nullmenge

Beweis: Mit Aufgabe 71b) bzw. 74. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi \leq \mathbb{1}_A \leq \psi \leq 1$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Es gilt:

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varphi(x)\}}_{\text{offen}} \subseteq \underbrace{A}_{A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}} \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 1\}}_{\text{abgeschlossen}}$$

Also

$$\partial A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\psi(x) = 1, \varphi(x) = 0}_{\psi(x) - \varphi(x) = 1}\}$$

Damit $0 \leq \mathbb{1}_{\partial A} \leq (\psi - \varphi)$. Aus $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$ folgt die Behauptung.

3. Damit $B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] = B_{\mathbb{R}^n} \cup \partial B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ Jordan-messbar.
4. Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $f(\cdot - a) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(x - a) dx = \int f(x) dx$$

Für $r > 0$ ist $f(r \cdot x) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(r \cdot x) dx = \frac{1}{r^n} \int f(x) dx$$

Klar für Treppenfunktionen, allgemein aus Konstruktion des Riemann-Integrals.

Beispiel:

1. Volumen von $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1) =: B_n$

$$\omega_n := \text{vol}_n B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$$

Nach vorheriger Bemerkung:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n B(\mathbb{R}^n) &= r^n \cdot \omega_n \\ \omega_1 &= 2 \end{aligned}$$

Für $n > 1$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_{B_n} 1 dx \\ &= \int_{x_n=-1}^1 \int_{|x_1, \dots, x_{n-1}|^2 \leq 1 - x_n^2} 1 d(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_n \\ &= \int_{t=-1}^1 \underbrace{\sqrt{1 - t^2}^{n-1} \cdot \omega_{n-1}}_{\text{vol}_n B_{n-1}(0, \sqrt{1-t^2})} dt \\ &= c_n \cdot \omega_{n-1} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \quad t = \cos x \\ &= \int_0^\pi \sin^n x dx \end{aligned}$$

Dann $c_0 = \pi$, $c_1 = 2$.

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi \sin^n x dx \\ &= \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^\pi}_0 + (n-1) \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} \cdot \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^{n-2} dx}_{c_{n-2}} - (n-1) \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^n x dx}_{c_n} \\ \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} \end{aligned}$$

Damit $c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\omega_2 = c_2 \cdot \omega_1 = \pi$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n \cdot c_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-1} \cdot c_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot c_{n-2} \cdot c_{n-3} \\ &= \dots = \frac{1}{n} \cdot c_1 \cdot c_0 \\ &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= c_n \cdot \omega_{n-1} \\ &= c_n \cdot c_{n-1} \cdot \omega_{n-2} \\ &= \frac{2\pi}{n} \cdot \omega_{n-2} \end{aligned}$$

Also für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \omega_{2(k-1)} \\ &= \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\pi}{k-1} \cdot \omega_{2(k-2)} \\ &= \frac{\pi^{k-1}}{k!} \cdot \omega_2 \\ &= \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n!}{2}\right)} \\ \omega_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1} \cdot \omega_{2k+1} \\ &= \dots = \frac{(2\pi)^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \cdot \omega_1 \\ &= \frac{2^{k+1} \cdot \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$

Einheitliche Schreibweise mit der Gamma-Funktion Γ :

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

für beliebige $n \geq 1$.

Bemerkung:

- Die Eulersche Gamma-Funktion ist

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

für $x > 0$. Uneigentlich bei ∞ und für $x < 1$ auch bei 0. (Existiert bei 0, da $0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq t^{x-1}$; bei ∞ , da $t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ beschränkt auf $(1, \infty)$ für alle $x > 0$.)

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R}) = 1 \\ \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x \cdot e^{-t} dt \\ &= \underbrace{-t^x \cdot e^{-t}}_0 \Big|_0^{\infty} + x \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= x \cdot \Gamma(x) \end{aligned}$$

für beliebige $x > 0$. Daher:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) \\ &= \dots = n! \cdot \Gamma(1) = n! \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gerade:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Außerdem $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (wird später bewiesen).

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt \quad t = \frac{1}{2}s^2 \\ &= \sqrt{2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2} \cdot s ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Damit für $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2} + 1\right) &= \frac{2k+1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \dots = \frac{(2k+1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^{k+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also:

$$\omega_{2k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2} + 1\right)} \cdot \pi^k = \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2} + 1\right)}$$

dabei $w_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Genauer: Bestimmt man r_n so, dass

$$\underbrace{\text{vol}_n B_n(0, r)}_{r_n^n \cdot \omega_n} = 1$$

d.h.

$$r_n = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

dann

$$\begin{aligned} r_n &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \sqrt{n} \\ \frac{r_n}{\sqrt{n}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{aligned}$$

(Stirlingsche Formel)

34

Transformationsformel

34.1 Satz: Urform der Transformationsformel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Für alle $f \in C_c(V)$ gilt:

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

Bemerkungen:

1. Ist $f \in C_c(V)$, dann $f \circ \Phi \in C_c(U)$ ($\Leftrightarrow (f \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Phi'(x)| \in C_c(U)$). Ist $Q \subseteq V$ ein n -dimensionales abgeschlossenes Intervall, dann ist i.a.

$$\mathbb{1}_Q \circ \Phi \notin T(\mathbb{R}^n)$$

Beweis: Sei $K \subseteq V$. Dann K kompakt $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(K)$ kompakt.

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\{y \in V \mid f(y) \neq 0\} &= \{x \in U \mid f(\Phi(x)) \neq 0\} \text{ kompakt} \\ \Phi^{-1}\{y \in V \mid f(y) \neq 0\} &= \underbrace{\Phi^{-1}\{y \in V \mid f(y) \neq 0\}}_{\text{spt}(f \circ \Phi)} \\ &= \{x \in U \mid f(\Phi(x)) \neq 0\} \end{aligned}$$

2. Für $n=1$ folgt der Satz aus der Substitutionsregel: $\Phi: (a, b) \rightarrow (c, d)$ bijektiv, z.B. monoton fallend, und ein Diffeomorphismus.

$$\begin{aligned} \int_{(c,d)} f(y) dy &= - \int_d^c f(y) dy \\ &= - \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \underbrace{\Phi'(x)}_{<0} dx \\ &= \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot |\Phi'(x)| dx \end{aligned}$$

3. Ist $a \in \mathbb{R}^n$, $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$. Dann $\Phi'(x) = E_n$, $\det \Phi'(x) = 1$. Also

$$\int f(x - a) dx = \int f(y) dy$$

- Ist $r > 0$, $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto r \cdot x$. Dann $\Phi'(x) = r \cdot E_n$, $\det \Phi'(x) = r^n$. Also

$$r^n \cdot \int f(r \cdot x) dx = \int f(y) dy$$

4. $|\det \Phi'(x)|$ ist „Verzerrungsfaktor“.

Beweis: im nächsten Kapitel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (auf U), $f \in R(U)$, falls es eine kompakte Menge $K \subseteq U$ gibt, sodass $f|_{U \setminus K} = 0$ und $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar.

$$\int_U f(x) dx := \int \tilde{f}(x) dx$$

34.2 Satz: Transformationsformel

Seien U, V, Φ wie in Satz 34.1. Dann gilt: Für $f \in R(V)$ ist $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

Beweis: Ende des Kapitels

Beispiele:

1. Polarkoordinaten

$$\Phi: \underbrace{(0, \infty) \times (-\pi, \pi)}_U \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})}_V$$

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist Diffeomorphismus,

$$\det \Phi'(r, \varphi) = r$$

Berechnung von Schwerpunkt eines halben Kreisringes: B ist Jordan-messbar,

$$x_s = \frac{\int_B x d(x, y)}{\text{vol}_2(B)}$$

mit $\text{vol}_2(B) = \frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)$ und

$$\begin{aligned} \int_B x d(x, y) &= \int_V \mathbb{1}_B(x, y) \cdot x d(x, y) \\ &= \int_U \underbrace{\mathbb{1}_B(\Phi(r, \varphi))}_{\mathbb{1}_{\Phi^{-1}(B)}(r, \varphi)} \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot r d(r, \varphi) \\ &= \int_{R_1 < r < R} \int_{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos \varphi d\varphi dr \\ &= \frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3) \end{aligned}$$

Damit:

$$x_s = \frac{\frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3)}{\frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^3}$$

Für $R_1 \rightarrow 0$: (Schwerpunkt Halbkreis, mit Polarkoordinaten nicht „direkt“ zugänglich)

$$x_2 = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,4024R$$

Bemerkung: Für Polarkoordinaten ist $r \cdot d\varphi dr$ das „Flächenelement“.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (und damit auch $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

Folgende Rechnung „naiv“:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &= \int_{r>0, -\pi < \varphi < \pi} e^{-r^2} \cdot r d(r, \varphi) \\ &= \int_{r>0} e^{-r^2} \cdot r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Rechtfertigung dieser Schritte:

- Im 1.Schritt:

$$I_R := \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)$$

für $R > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ definiere

$$S_k := \Phi\left(-\frac{1}{k}, R\right] \times \left[-\pi + \frac{1}{k}, \pi - \frac{1}{k}\right] \subseteq B[0, R]$$

Dann

$$B[0, R] \setminus S_k \subseteq \left[-R, \frac{1}{k}\right] \times \left[-\max\left\{R \cdot \sin \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right\}, \max\left\{R \cdot \sin \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right\}\right]$$

damit

$$\text{vol}_2 B[0, R] \setminus S_k \leq 2 \cdot \left(R + \frac{1}{k}\right) \cdot \max\left\{R \cdot \sin \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right\} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$$

Damit

$$I_R = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)$$

Mit Transformationsformel:

$$\begin{aligned} \int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_{\left[\frac{1}{k}, R\right] \times \left[-\pi + \frac{1}{k}, \pi - \frac{1}{k}\right]} e^{-r^2} \cdot r d(r, \varphi) \\ &= \int_{r=\frac{1}{k}}^R e^{-r^2} \cdot r dr \cdot 2 \cdot \left(\pi - \frac{1}{k}\right) \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_{\frac{1}{k}}^R \cdot 2 \left(\pi - \frac{1}{k}\right) \\ &= \left(\pi - \frac{1}{k}\right) \cdot \left(e^{-\frac{1}{k^2}} - e^{-R^2}\right) \\ &\rightarrow \pi \cdot (1 - e^{-R^2}) \quad (k \rightarrow \infty) \\ &= \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \end{aligned}$$

- Außerdem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

Es gibt $(R_n) \subseteq (1, \infty)$ mit $R_{n+1} \geq \sqrt{2} \cdot R_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Damit:

$$\begin{aligned} \int_{[-R_n, R_n]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &\leq \int_{B[0, R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &\leq \int_{[-R_{n+1}, R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-R_n}^{R_n} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{[-R_n, R_n]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B[0, R_n]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \pi \end{aligned}$$

Also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

3. Zylinderkoordinaten in \mathbb{R}^3 , d.h. Polarkoordinaten in x-y-Ebene, z unverändert

$$\begin{aligned} \Phi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(r, \varphi, \zeta) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \\ dx dy dz &= r dr d\varphi d\zeta \end{aligned}$$

Berechnung des Volumens von

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}; 0 \leq |z| \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

Satz von Fubini:

$$\text{vol}_3(B) = 2 \cdot \int_{B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2})} \sqrt{1 - x^2 - y^2} d(x, y)$$

Polarkoordinaten:

$$A := \{(r, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi\}$$

Dann:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= 2 \cdot \int_A \sqrt{1 - r^2} \cdot r d(r, \varphi) \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr d\varphi \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin \varphi|^3) d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \pi - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \pi - \frac{8}{9} \approx 1,21 \end{aligned}$$

Halbkugel ohne B hat das Volumen $\frac{8}{9}$.

4. Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\Phi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y = 0\} \\ \Phi(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix} \\ \det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) &= r^2 \cdot \cos \vartheta \\ \Rightarrow r^2 \cdot \cos \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta &= dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

Berechnung des Schwerpunktes der Halbkugel:

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |(x, y, z)| \leq 1, z \geq 0\}$$

Dann

$$z_2 = \frac{\int_B z \, d(x, y, z)}{\text{vol}_3(B)}$$

mit $\text{vol}_3(B) = \frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\int_B z \, d(x, y, z) &= \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} (r \cdot \sin \vartheta) \cdot (r^2 \cdot \cos \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= 2\pi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \, d\vartheta \underbrace{\int_{r=0}^1 r^3 \, dr}_{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi\end{aligned}$$

Also:

$$z_s = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

34.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}|_U = f$, $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = 0$.

1. Es gebe $K \subseteq U$ kompakt, sodass $f|_{U \setminus K} = 0$. Dann:

$$\begin{aligned}\overline{\int \tilde{f}} &= \inf \left\{ \int_U \psi(x) \, dx \mid \psi \in C_c(U), \psi \geq f \right\} \\ \underline{\int \tilde{f}} &= \sup \left\{ \int_U \varphi(x) \, dx \mid \varphi \in C_c(U), \varphi \leq f \right\}\end{aligned}$$

2. $f \in R(U) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in C_c(U) : \varphi \leq f \leq \psi, \int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$

Beweis:

1. Bekannt für $U = \mathbb{R}^n$ (Aufgabe 74). Allgemein: Es gibt $\chi \in C_c(U)$ mit $0 \leq \chi \leq 1, \chi|_K = 1$

$$\chi(x) = \max\{1 - k \cdot \text{dist}(x, K), 0\} \quad k \text{ groß}$$

Klar:

$$\begin{aligned}\overline{\int \tilde{f}} &= \inf \left\{ \int \psi(x) \, dx; \psi \in C_c(\mathbb{R}^n) \mid \psi \geq \tilde{f} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \int \psi(x) \, dx; \psi \in C_c(U), \psi \geq \tilde{f} \right\}\end{aligned}$$

Sei $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geq \tilde{f}$. Dann $\psi^-, \chi \cdot \psi^+ \in C_c(U)$, $f \leq \chi \cdot \psi^+ - \psi^-$.

$$\int \psi(x) dx = \underbrace{\int (1 - \chi) \cdot \psi^+}_{\geq 0} + \int (\chi \cdot \psi^+ - \psi^-) \geq \int \chi \cdot \psi^+ - \psi^-$$

Damit „ \geq “.

2. Klar mit 1.

34.4 Beweis: Satz 34.2

- Sei $f \in R(V)$. Für $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi \in C_c(V) \Leftrightarrow \varphi \circ \Phi \in C_c(U)$$

Damit:

$$\begin{aligned} \underline{\int}_V f(x) dx &= \sup \left\{ \int_V \varphi(y) dy; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f \right\} \\ &\stackrel{34.1}{=} \sup \left\{ \int \varphi \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)| dx; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \tilde{\varphi} dx; \tilde{\varphi} \in C_c(U), \tilde{\varphi} \leq f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \right\} \\ &= \underline{\int}_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)| dx \end{aligned}$$

Entsprechend für Oberintegral:

$$\overline{\int}_V f(y) dy = \dots = \overline{\int}_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

Wegen $\underline{\int}_V f = \overline{\int}_V f$ folgt Gleichheit der rechten Seiten, also $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y) dy = \int_U (f \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

35

Beweis der Transformationsformel

Bemerkungen:

1. Besonders einfacher Diffeomorphismus $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: Vertauschung von Koordinaten (π ... Permutation von $\{1, \dots, n\}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$). Jede Spalte und jede Zeile der Darstellungsmatrix enthält genau eine 1. Dafür Transformationsformel klar, zunächst für Treppenfunktionen, dann auch für $R(\mathbb{R}^n)$, insbesondere für $C_c(\mathbb{R}^n)$.
2. $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, $x \mapsto A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n-k}$ beliebig und Satz 34.1 für k bewiesen, dann auch für A (s.u. für Beispiel).

Beispiel: $n = 2$, $k = 1$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \int f(A \cdot x) \cdot |\det A| &\stackrel{SvF}{=} \int_{x_2} \int_{x_1} f(x_1 + x_2, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{x_2} \int_{y_1} f(y_1, x_2) dy_1 dx_2 \\ &= \int f(y) dy \end{aligned}$$

3. Mit 1. und 2. und geeigneter Zerlegung von beliebiger Matrix A , kann man die Transformationsformel für beliebige linear Abbildungen Φ zeigen. Allgemeines Φ durch lokale Approximation.

35.1 Hilfssatz: Transformationsformel auf Produkt von Diffeomorphismen

Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow W$, $\psi: W \rightarrow V$ Diffeomorphismen, für die die Transformationsformel gilt. Dann gilt sie auch für $\psi \circ \Phi: U \rightarrow V$.

Beweis:

- Sei $f \in C_c(V)$. Dann:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \Phi)'(x) &= \psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \\ \det(\psi \circ \Phi)'(x) &= \det \psi'(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
 \int f(\psi \circ \Phi)(x) \cdot |\det(\psi \circ \Phi)'(x)| dx &= \int_U f \circ \psi(\Phi(x)) \cdot |\det \psi'(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx \\
 &= \int_W f \circ \psi(z) \cdot |\det \psi'(z)| dz \\
 &= \int_V f(y) dy
 \end{aligned}$$

35.2 Hilfssatz: Induktion

Seien Voraussetzungen wie in Satz 34.1. Außerdem sei $1 \leq k \leq n - 1$ und die Gültigkeit der Transformationsformel für k anstatt von n sei vorausgesetzt und sei Φ in der Form

$$\Phi(\tilde{x}, \hat{x}) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x}) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

mit $\check{\Phi}: U \rightarrow \mathbb{R}^k$. Dann gilt die Behauptung von Satz 34.1

Beweis:

- Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned}
 U_{\hat{x}} &:= \{\tilde{x}; (\tilde{x}, \hat{x}) \in U\} \\
 V_{\hat{x}} &:= \{\tilde{x}; (\tilde{x}, \hat{x}) \in V\}
 \end{aligned}$$

Dann ist $\check{\Phi}(\cdot, \hat{x}): U_{\hat{x}} \rightarrow V_{\hat{x}}$ ein Diffeomorphismus.

- Sei $f \in C_C(V)$. Dann:

$$\begin{aligned}
 \int_V f(y) dy &= \int_{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int_{\hat{y} \in V_{\tilde{y}}} f(\tilde{y}, \hat{y}) d\tilde{y} d\hat{y} \\
 &= \int_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int_{U_{\hat{x}}} f(\check{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x}), \hat{x}) \cdot \left| \det \frac{\partial \check{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x})}{\partial \tilde{x}} \right| d\tilde{x} d\hat{x} \\
 &= \int_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}} \int_{U_{\hat{x}}} f(\Phi(\tilde{x}, \hat{x})) \cdot |\det \Phi'(\tilde{x}, \hat{x})| d\tilde{x} d\hat{x} \\
 &= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx
 \end{aligned}$$

da

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \check{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x})}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \check{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x})}{\partial \hat{x}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- Entsprechend folgert man wie in Hilfssatz 35.2 die Aussage für

$$\Phi(\tilde{x}, \hat{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \hat{\Phi}(\tilde{x}, \hat{x}) \end{pmatrix}$$

35.3 Satz: Zerlegung des Diffeomorphismus

Seien U, V wie in Satz 34.1, $a \in U$, $b := \Phi(a)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_a \subseteq U$ von a , eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Psi: U_a \rightarrow W$, $\tilde{\Psi}: W \rightarrow V_b := \Phi(U_a)$ von der Form wie in Hilfssatz 35.2, sodass $\Phi|_{U_a} = \tilde{\Psi} \circ \Psi$ gilt.

Beweis:

- Sei $1 \leq k \leq n-1$. Die Zeilen von $\Phi'(a)$ sind linear unabhängig, also auch die oberen k Zeilen. Nach Permutation der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

hat linear unabhängige Spalten.

- Die Abbildung $\Psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

hat in a die Ableitung

$$\Psi'(a) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}'(a) \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

Diese ist invertierbar (Spalten sind linear unabhängig). Nach Satz von der lokalen Invertierbarkeit gibt es eine offene Umgebung U_a von a und eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\Psi: U_a \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus ist.

- Sei

$$\tilde{\Psi} := \Phi \circ \Psi^{-1}: W \rightarrow V_b$$

(ist Diffeomorphismus) und von der Form

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} \check{z} \\ \hat{\Psi}(z) \end{pmatrix}$$

Zu $z \in W$ und $y := \tilde{\Psi}(z) \in V_b$ gibt es $x \in U_a$ mit

$$\begin{aligned} z &= \Psi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix} \\ y &= \Phi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{\Phi}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h. $\check{y} = \check{\Phi}(x) = \check{z}$.

35.4 Satz: Partition der Eins (leichte Form)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq V$ kompakt, $m \in \mathbb{N}$, $(V_j)_{j=1, \dots, m}$ eine offene Überdeckung von K mit $V_j \subseteq V$ offen. Dann gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_c(V)$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\text{spt } \varphi_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \dots, m$ und

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1$$

für alle $x \in K$. (Die Familie $(\varphi_j)_{j=1, \dots, m}$ heißt der Überdeckung (V_j) untergeordnete Partition der Eins.)

Beweis:

- Für alle $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$ und $r_x > 0$, sodass $B(x, 2r_x) \subseteq V_j$. Wegen Kompaktheit von K besitzt die offene Überdeckung $(B(x, r_x))_{x \in K}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(B(x_k, r_{x_k}))_{k=1, \dots, p}$. Für $1 \leq j \leq m$ setze

$$K_j := \bigcup_{k \in \{1, \dots, p\}: B(x_k, 2r_{x_k}) \subseteq V_j} B[x_k, r_{x_k}] \cap K$$

Dann K_j kompakt, $K_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \dots, m$ und $\bigcup_{j=1}^m K_j = K$. Für $1 \leq j \leq m$ findet man $\psi_j \in C_C(V)$ mit $\text{spt } \psi_j \subseteq V_j$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ und $\psi_j(x) = 1$ für alle $x \in K_j$ (Vgl. § 34). Definiere

$$\psi_0(x) := d(x, K) \quad (x \in V)$$

Dann ist ψ ,

$$\psi := \sum_{j=0}^m \psi_j(x)$$

eine stetige Funktion $\psi: V \rightarrow (0, \infty)$

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\psi} \quad j = 1, \dots, m$$

haben die behaupteten Eigenschaften.

35.5 Beweis: Satz 34.1

- Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt die Transformationsformel für k mit $1 \leq k \leq n - 1$.
- Für $b \in V$ sei V_b gemäß Satz 35.3 bestimmt (also gilt die Transformationsformel für U_a, V_b, Φ wobei $\Phi(a) = b$).
- Sei $f \in C_C(V)$. Zu $K := \text{spt } f$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{b_1}, \dots, V_{b_m})$ der offenen Überdeckung $(V_b)_{b \in V}$. Definiere $a_j := \Phi^{-1}(b_j)$ und $U_{a_j} := \Phi^{-1}(V_{b_j})$ für $j = 1, \dots, m$.
- Zu $(V_{b_1}, \dots, V_{b_m})$ wähle $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ wie in Satz 35.3. Dann:

$$\begin{aligned} \int_V f(y) dy &= \int_V \sum_{j=1}^m \varphi_j(y) \cdot f(y) dy \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{V_{b_j}} \varphi_j(y) \cdot f(y) dy \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{U_{a_j}} \varphi_j(\Phi(x)) \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx \\ &= \int_U \underbrace{\sum_{j=1}^m \varphi_j(\Phi(x)) \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|}_{\text{für } x: f(\Phi(x)) \neq 0} dx \\ &= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx \end{aligned}$$

36

Fourier-Reihen

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode 2π

$$:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = f(x)$$

Dann ist f schon bestimmt durch $f|_{[0,2\pi]}$ bzw. $f|_{[-\pi,\pi]}$.

- Beispiele: $\sin x$, $\cos x$, $\sin(n \cdot x)$, $\cos(n \cdot x)$
- Ziel: 2π -periodische Funktionen als Fourier-Reihe

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n \cdot x + b_n \cdot \sin n \cdot x)$$

darzustellen, für möglichst allgemeine Funktionen; Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot nx} \quad (c_n \in \mathbb{C})$$

- Entsprechungen:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx &= c_n \cdot e^{i \cdot nx} + c_{-n} \cdot e^{-i \cdot nx} \\ &= c_n \cdot (\cos nx + i \cdot \sin nx) + c_{-n} \cdot (\cos nx - i \cdot \sin nx) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i \cdot (c_n - c_{-n}) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

- Bemerkungen: Integration komplexer Funktionen

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Riemann-Integrierbar $:\Leftrightarrow \Re(f)$ und $\Im(f)$ Riemann-Integrierbar

$$\int f(x) dx := \int \Re(f) dx + i \cdot \int \Im(f) dx$$

$f \mapsto \int f(x) dx$ ist \mathbb{C} -linear:

– Additivität: Klar

$$\int (f + g) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

– Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = \lambda_1 + i \cdot \lambda_2$ und $f = f_1 + i \cdot f_2$.

$$\begin{aligned} \int (\lambda \cdot f) dx &= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2 + i \cdot (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1)) dx \\ &= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2) dx + i \cdot \int (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1) dx \\ &= \lambda_1 \cdot \int f_1 dx - \lambda_2 \cdot \int f_2 dx + i \cdot (\lambda_1 \cdot \int f_2 dx + \lambda_2 \cdot \int f_1 dx) \\ &= (\lambda_1 + i \cdot \lambda_2) \cdot \left(\int f_1 dx + i \cdot \int f_2 dx \right) \\ &= \lambda \cdot \int f dx \end{aligned}$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar $\Rightarrow |f|$ ist Riemann-Integrierbar

Beweis:

(a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann $g \in R(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}) : |g - \varphi| \leq \psi, \int \psi \leq \varepsilon$

„ \Rightarrow “ Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\varphi_1, \varphi_2 \in T(\mathbb{R})$ mit $\varphi_1 \leq g \leq \varphi_2$, sodass $\int (\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$. Dann $\varphi := \varphi_1$ und $\psi := \varphi_2 - \varphi_1$.

„ \Leftarrow “ Seien ψ, φ wie vorausgesetzt. Dann $\varphi_1 := \varphi - \psi$ und $\varphi_2 := \varphi + \psi$.

(b) Seien $f = f_1 + i \cdot f_2$ Riemann-Integrierbar und $\varepsilon > 0$. Es existieren $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R})$, sodass

$$|f_1 - \varphi_1| \leq \psi_1 \quad |f_2 - \varphi_2| \leq \psi_2$$

Dann $|\varphi_1 + i \cdot \varphi_2| =: |\varphi| \in T(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} ||f| - |\varphi|| &\leq |f - \varphi| \leq |f_1 - \varphi_1| + |f_2 - \varphi_2| \\ &\leq \psi_1 + \psi_2 \\ \Rightarrow \int (\psi_2 + \psi_1) &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

3. Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar:

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx$$

Beweis: Es gibt $\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| = 1$:

$$\left| \int f(x) dx \right| = \gamma \cdot \int f(x) dx$$

Dann:

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) dx \right| &= \gamma \cdot \int f(x) dx \\ &= \int \gamma \cdot f(x) dx \\ &= \Re \left(\int \gamma \cdot f(x) dx \right) \\ &= \int \underbrace{\Re(\gamma \cdot f)}_{\leq |\gamma \cdot f| = |f|} dx \\ &\leq \int |f(x)| dx \end{aligned}$$

4. Hauptsatz gilt

5. Im Folgenden $\varphi_n(x) := e^{i \cdot nx}$

36.1 Hilfssatz: Orthogonalitätsrelation

1. Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n \cdot \overline{\varphi_m} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 2\pi & \text{für } n = m \end{cases}$$

2. Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in \mathbb{C} , $\sum_n |c_n| < \infty$,

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

dann ist f stetig, 2π -periodisch,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx$$

Beweis:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx &= \int_0^{2\pi} e^{ix(m-n)} dx \\ &= \begin{cases} [x]_0^{2\pi} & m = n \\ [\sin(x \cdot (m-n)) - i \cdot \cos(x \cdot (m-n))]_0^{2\pi} & m \neq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

2. Stetigkeit mit Kapitel 20, Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \cdot \varphi_m(x)}_{=: C} \cdot e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N c_m \cdot \varphi_m(x) \cdot e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N c_m \cdot \int_0^{2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} dx}_{2\pi \cdot \delta_{mn}} c_m \\ &= c_n \end{aligned}$$

da C gleichmäßig konvergent auf $[0, 2\pi]$.

Definition:

- Ist $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so heißen

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx$$

die Fourier-Koeffizienten von f und

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \cdot \varphi_n$$

heißt Fourier-Reihe von f .

Bemerkung zu reellen Fourier-Reihen:

- Sei $f \in R[0, 2\pi]$, f reell-wertig. Dann sind

$$\begin{aligned} a_n(f) &:= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \\ b_n(f) &:= i \cdot (c_n(f) - c_{-n}(f)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \end{aligned}$$

reell für $n \in \mathbb{N}$ und

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

reell.

Beispiel:

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

f ungerade, deshalb alle $a_n(f) = 0$. Aus

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \cdot dx \\ &= \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot [-\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{n gerade} \\ \frac{4}{\pi \cdot n} & \text{n ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ergibt sich die Fourier-Reihe:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1) \cdot x)}{2n+1}$$

36.2 Satz: Dirichlet-Kerne

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Für die Partialsummen

$$s_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) \cdot \varphi_k$$

gilt die Darstellung

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_n(y) dy$$

mit den Dirichlet-Kernen

$$D_n(y) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \cdot y}{\sin \frac{y}{2}}$$

wobei $D_n(2\pi m) = 2n + 1$. Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^n c_k(f) \cdot e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_0^{2\pi} f(y) \cdot e^{-iky} dy \cdot e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cdot \sum_{k=-n}^n e^{ik \cdot (x-y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^x f(x-y) \cdot \sum_{k=-n}^n e^{iky} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_n(y) dy
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
D_n(y) &= \sum_{k=-n}^n e^{iky} \\
&= \frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot y} - e^{-iny}}{e^{iy} - 1} \cdot \frac{e^{-i\frac{1}{2}y}}{e^{-i\frac{1}{2}y}} \\
&= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot y}{\sin \frac{y}{2}}
\end{aligned}$$

mit $D_n(2\pi m) = 2n + 1$.

Bemerkung:

- f stetig und 2π -periodisch $\not\Rightarrow s_n(f) \rightarrow f$ gleichmäßig

36.3 Satz: Cesàro-Mittel

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Für die Cesàro-Mittel

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f)$$

gilt die Darstellung

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot K_n(y) dy$$

mit den Fejér-Kernen

$$K_n(y) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2$$

Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot D_k(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) \cdot K_n(y) dy
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 K_n(y) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(y) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{e^{iy} - 1} \cdot \left(\sum_{k=0}^n e^{i(k+1)y} - \sum_{k=0}^n e^{-iky} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(e^{iy} - 1)^2} \cdot (e^{i(n+2)y} - 2e^{iy} + e^{-iny}) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}y} - e^{-i\frac{n+1}{2}y}}{e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}y)}{\sin\frac{y}{2}} \right)^2
 \end{aligned}$$

Für $y = 2\pi m$:

$$K_n(2\pi m) = n + 1$$

36.4 Satz von Fejér

Sei f 2π -periodisch und stetig. Dann

$$\sigma_n(f)(x) \rightarrow f(x)$$

gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- Eigenschaften von K_n :

1. $K_n(y) \geq 0$
2. Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(y) dy = 1$$

denn:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iky} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1
 \end{aligned}$$

Damit:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(y) dy = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_k(y) dy = 1$$

3. Für $\delta > 0$ gilt:

$$\sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} K_n(y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Klar, da $|\sin\frac{y}{2}| \geq \sin\frac{\delta}{2}$.

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

für $|x - y| \leq \delta$ (f gleichmäßig stetig).

$$\begin{aligned}
 |f(x) - \sigma_n(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-y)) \cdot K_n(y) dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-y)| \cdot K_n(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq \varepsilon} K_n(y) dy + \\
 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq 2\|f\|_{[-\pi, \pi]}} K_n(y) dy \\
 &\leq \varepsilon + 2 \cdot \|f\|_{[-\pi, \pi]} \cdot \sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} K_n(y) \\
 &\leq 2\varepsilon \text{ für } n \text{ groß}
 \end{aligned}$$

- Insbesondere: f stetig, 2π -periodisch $\Rightarrow f$ gleichmäßig approximierbar für n groß durch trigonometrische Polynome (= Lin $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}\}$).

36.5 Satz: Approximationssatz von Weierstraß

Sei $\varepsilon > 0$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es ein Polynom p mit

$$\|f - p\|_{[a, b]} \leq \varepsilon$$

Beweisskizze:

- o.E.: $[a, b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Idee: Ergänze f stetig, 2π -periodisch. Approximiere f durch trigonometrische Polynome φ . Entwickle φ in Potenzreihe; abbrechen.
- alternativ: *operatorname{abs}* ist durch Polynome gleichmäßig approximierbar. Unterteile f in Streckenzüge. Streckenzüge durch Linearkombination von *abs* approximieren.

Bemerkung:

- I.a. $s_n(f) \not\rightarrow f$ gleichmäßig, wenn f stetig

36.5.1 2-Norm

Für $f \in R[0, 2\pi]$ sei

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

die 2-Norm.

Bemerkungen:

1. $\|\lambda \cdot f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$ (Klar)
2. Für $f, g \in R[0, 2\pi]$:

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

(Skalarprodukt). Dann:

$$|(f|g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Beweis:

- Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$, sodass

$$|(f|g)| = \gamma \cdot (f|g)$$

Sind $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq 1$, dann

$$0 \leq \|\gamma \cdot f - g\|_2^2 = (\gamma \cdot f - g | \gamma \cdot f - g)$$

Damit:

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot f - g | \gamma \cdot f - g) &= \|\gamma \cdot f\|_2^2 - \underbrace{(g | \gamma \cdot f)}_{=|(f|g)|} - \underbrace{(\gamma \cdot f | g)}_{=|(f|g)|} + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - 2 \cdot |(f|g)| + \|g\|_2^2 \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq 1 \end{aligned}$$

- Sind $\alpha, \beta > 0$, $\|f\|_2^2 \leq \alpha$, $\|g\|_2 \leq \beta$, dann

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left| \left(\frac{1}{\alpha} f \middle| \frac{1}{\beta} g \right) \right| = \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot |(f|g)| \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

3. Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= (f + g | f + g) \\ &\leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

4. $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Beispiel: $\mathbb{1}_{\{1\}}$

5. Mit $(\cdot | \cdot)$:

$$(\varphi_n | \varphi_m) = \delta_{mn}$$

(φ_n) ist „Orthonormalsystem“.

36.6 Hilfssatz

Für $f \in R[0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left\| f - \sum_{j=-n}^n c_j(f) \cdot \varphi_j \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=-n}^n |c_j(f)|^2$$

mit $c_j(f) = (f | \varphi_j)$.

Beweis: nachrechnen

36.7 Hilfssatz

Sei $f \in R[0, 2\pi]$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es g stetig, 2π -periodisch mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

36.8 Satz: Parsevalsche Gleichung

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Dann:

$$\begin{aligned} \left\| \underbrace{f - \sum_{j=-n}^n c_j(f) \cdot \varphi_j}_{s_n(f)} \right\|_2 &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \|f\|_2^2 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2 \end{aligned}$$

(Parsevalsche Gleichung)

Beweisidee:

- wahr, falls f trigonometrisches Polynom
- f approximierbar durch trigonometrisches Polynom (36.7)
- $\varepsilon/3$ -Argument
- 2. Teil klar mit HS 36.6

Beispiele:

1. Sei

$$f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Dann:

$$c_j(f) = \begin{cases} 0 & j \text{ gerade} \\ \frac{2}{i\pi j} & j \text{ ungerade} \end{cases}$$

Parsevalsche Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 = \|f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^2}{\pi^2 \cdot (2n+1)^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Daraus:

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

mit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= s - \frac{1}{4}s = \frac{3}{4}s \\ \Rightarrow s &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. Setze $f(x) = (x - \pi)^2$. Dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$