

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Skript:

## Algebraische Topologie

Verfasser

Franziska Kühn

Daten

Prof. Dr. Ulrich Brehm  
Sommersemester 2012  
Hauptstudium

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Topologische Grundlagen</b>	<b>3</b>
0.1	Topologische Räume & Stetigkeit . . . . .	3
0.2	Trennungseigenschaften . . . . .	6
0.3	Zusammenhangsbegriffe . . . . .	9
0.4	Initiale und finale Topologien . . . . .	11
0.5	Mannigfaltigkeiten . . . . .	14
<b>1</b>	<b>Homotopie von Abbildungen</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Die Fundamentalgruppe</b>	<b>20</b>
2.1	Exkurs: Gruppentheorie . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Simpliziale Komplexe</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Simpliziale Approximation</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>Klassifikation der 2-dim. Mannigfaltigkeiten</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Homologiegruppen</b>	<b>51</b>



# Topologische Grundlagen

## 0.1 Topologische Räume & Stetigkeit

**Definition** (i). Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .  $(X, \mathcal{T})$  heißt topologischer Raum auf  $X$   $\Leftrightarrow$

- (1)  $X \in \mathcal{T}$
- (2)  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{T}$
- (3)  $M_1, M_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in \mathcal{T}$

$O \subseteq X$  heißt offen, falls  $O \in \mathcal{T}$ .  $A \subseteq X$  heißt abgeschlossen, falls  $X \setminus A \in \mathcal{T}$ .

(Bemerkung:  $\emptyset, X$  sind sowohl offen als auch abgeschlossen.)

- (ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum,  $x \in X$ ,  $U \subseteq X$ . Dann heißt  $U$  Umgebung von  $x \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O, O \subseteq U$

**Bemerkung** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ . Sei

$$\mathcal{T}_M := \{O \cap M; O \in \mathcal{T}\}$$

dann ist  $\mathcal{T}_M$  eine Topologie auf  $M$ . Sie heißt Unterraumtopologie auf  $M$ ,  $(M, \mathcal{T}_M)$  ein (topologischer) Unterraum.

**Beispiel** (i). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq X; \forall x \in O \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq O\}$$

eine Topologie auf  $X$ . Sie heißt die natürliche Topologie auf  $X$  (bzgl.  $d$ ).

Beweis: Aufgabe 1 (1 Punkt)

□

- (ii).  $(X, \mathcal{P}(X))$ ,  $\mathcal{P}(X)$  heißt diskrete Topologie auf  $X$  (feinste Topologie).  $(X, \{\emptyset, X\})$ ,  $\{\emptyset, X\}$  heißt indiskrete Topologie auf  $X$  (gröbste Topologie).
- (iii).  $(X, \{O \subseteq X; X \setminus O \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\})$  ist ein topologischer Raum. Die Topologie heißt cofinite Topologie auf  $X$ .

Beweis: Aufgabe 2 (1 Punkt)

□

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  heißt eine Basis von  $\mathcal{T} \Leftrightarrow$  Jede Menge in  $\mathcal{T}$  lässt sich als Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  darstellen.

### 0.1 Proposition

Eine Menge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  ist genau dann eine Basis von einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$ , wenn

$$\forall x \in X, \forall O \in \mathcal{T} \exists B \in \mathcal{B} : x \in B, B \subseteq O$$

Beweis: Aufgabe 3 (1 Punkt)

□

**0.2 Proposition**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit

- (i).  $\cup \mathcal{B} = X$
- (ii).  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3, B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Dann gilt

- (i).  $\mathcal{T} := \{\cup \mathcal{B}'; \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$  ist eine Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{B}$  ist eine Basis von  $\mathcal{T}$ .
- (ii).  $\mathcal{T}$  ist die einzige Topologie, die  $\mathcal{B}$  als Basis hat.  $\mathcal{T}$  heißt die von  $\mathcal{B}$  erzeugte Topologie.

Beweis: Aufgabe 4 (3 Punkte)

□

**0.3 Proposition**

Sei  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann erfüllt die Menge  $\mathcal{B}$  aller endlichen Durchschnitte zusammen mit  $X$ , d.h.

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap E; E \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich, } E \neq \emptyset \right\} \cup \{X\}$$

die Bedingungen (i),(ii) aus Proposition 0.2. Die von  $\mathcal{B}$  erzeugte Topologie heißt die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{S}$  eine Subbasis.

Beweis: Aufgabe 4

□

**Definition** (i). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann heißt  $\mathcal{U}_x := \{U \subseteq X; U \text{ Umgebung von } x\}$  Umgebungfilter von  $x$ .

- (ii). Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_x$  heißt Umgebungsbasis von  $x : \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq U$ .

**Beispiel** (i). In einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Umgebungsbasis von  $x$ .

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i).  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom (1.AA) :  $\Leftrightarrow$  Jeder Punkt hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

(Aus obigem Beispiel folgt: Ein metrischer Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.)

- (ii).  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom (2.AA) :  $\Leftrightarrow \mathcal{T}$  besitzt eine abzählbare Basis.

**0.4 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Folgende Aussagen sind für  $U \subseteq X$  äquivalent:

- (i).  $U$  ist offen.
- (ii).  $U$  ist Umgebung jedes seiner Punkte.
- (iii).  $\forall x \in U \exists O \in \mathcal{U}_x : O \subseteq U$

Beweis: Aufgabe 5 (1 Punkt)

□

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

- (i).  $x \in X$  heißt ein Berührungspunkt von  $A : \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$

(ii).  $x \in X$  heißt innerer Punkt von  $A : \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}_x$

**0.5 Proposition** (i). Die Menge der Berührungspunkte von  $A$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $A$  enthält. Sie heißt Abschluss von  $A$  (abgeschlossene Hülle von  $A$ ). Notation:  $\bar{A}$ ,  $\text{cl } A$ .

$\bar{A}$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die  $A$  enthalten.

(ii). Die Menge der inneren Punkte von  $A$  ist die größte offene Teilmenge von  $X$ , die in  $A$  enthalten ist. Sie heißt offener Kern von  $A$  (Inneres von  $A$ ) und wird mit  $\circ A$  ( $\text{int } A$ ) bezeichnet.  $\circ A$  ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in  $A$  enthalten sind.

(iii). Die Menge  $\text{bd } A := \bar{A} \setminus \circ A$  heißt (topologischer) Rand von  $A$ .

Beweis: Aufgabe 6 (2 Punkte) □

**Definition** (i). Seien  $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topologische Räume. Gilt  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ , dann heißt  $\mathcal{T}_2$  feiner als  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_1$  gröber als  $\mathcal{T}_2$ .

(ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ .  $A$  heißt dicht in  $X : \Leftrightarrow \bar{A} = X$ .

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $x \in X$ .

(i).  $f$  heißt stetig in  $x : \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}(\mathcal{S}) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ .  $f$  stetig  $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{S} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ .

(ii).  $f$  heißt offen  $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T} : f(O) \in \mathcal{S}$ .  $f$  heißt abgeschlossen  $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T} : Y \setminus f(X \setminus O) \in \mathcal{S}$ .

(iii).  $f$  heißt Homöomorphismus  $\Leftrightarrow f$  stetig, bijektiv und  $f^{-1}$  stetig.

(iv).  $f$  heißt Einbettung  $\Leftrightarrow$  Die Einschränkung von  $f$  auf die Bildmenge ist ein Homöomorphismus, d.h.  $f : X \rightarrow f(X)$  ist ein Homöomorphismus von  $(X, \mathcal{T})$  nach  $(f(X), \mathcal{S}_{f(X)})$ .

**Bemerkung** Offenbar gilt

(i). Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

(ii). Wenn  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  stetig und  $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ , dann ist auch  $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{S}_1)$  stetig.

(iii).  $f$  ist ein Homöomorphismus  $\Leftrightarrow f$  bijektiv, stetig, offen

**0.6 Proposition**

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  stetig  $\Leftrightarrow \forall x \in X : f$  in  $x$  stetig.

Beweis: Aufgabe 7 (2 Punkte) □

**Definition** (i). Zwei topologische Räume  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  heißen homöomorph (topologisch äquivalent)  $\Leftrightarrow$  Es existiert ein Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$ . Notation:  $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$

(ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ . Eine Umgebung von  $A$  ist eine Menge  $U \subseteq X$  mit  $A \subseteq U$ , sodass es ein  $O \subseteq X$ ,  $O \in \mathcal{T}$  gibt mit  $A \subseteq O \subseteq U$ .

**0.7 Proposition**

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $\mathcal{B}$  eine Subbasis von  $\mathcal{S}$ . Dann ist  $f$  stetig  $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{B} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ .

Beweis: Klar, da  $f^{-1}$  mit beliebiger Vereinigung und endlichen Durchschnitten verträglich ist. □

## 0.2 Trennungseigenschaften

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Er heißt ein

- (i).  $T_1$ -Raum  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : x \in O_1, y \in O_2, x \notin O_2, y \notin O_1$
- (ii).  $T_2$ -Raum (Hausdorff-Raum)  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : O_1 \cap O_2 = \emptyset, x \in O_1, y \in O_2$
- (iii).  $T_3$ -Raum  $:\Leftrightarrow \forall A \subseteq X$  abgeschlossen  $\forall x \in A^c \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : A \subseteq O_1, x \in O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$
- (iv).  $T_4$ -Raum  $:\Leftrightarrow \forall A_1, A_2 \subseteq X$  abgeschlossen, disjunkt  $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : A_1 \subseteq O_1, A_2 \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$
- (v).  $T_{3a}$ -Raum  $:\Leftrightarrow \forall A \subseteq X$  abgeschlossen  $\forall x \in A^c \exists f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig:  $f(x) = 1, f(A) \subseteq \{0\}$
- (vi). regulär  $:\Leftrightarrow T_1$ - und  $T_3$ -Raum
- (vii). vollständig regulär  $:\Leftrightarrow T_1$ - und  $T_{3a}$ -Raum
- (viii). normal  $:\Leftrightarrow T_1$ - und  $T_4$ -Raum

### 0.8 Proposition

$(X, \mathcal{T})$  ist ein  $T_1$ -Raum  $\Leftrightarrow$  Die einpunktigen Mengen sind abgeschlossen.

Beweis: • „ $\Rightarrow$ “: Zu  $x \in X$  betrachte für jedes  $y \in X \setminus \{x\}$  eine offene Menge  $O_y$  mit  $y \in O_y, x \notin O_y$ . Dann ist

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y = X \setminus \{x\}$$

offen, also  $\{x\}$  abgeschlossen.

• „ $\Leftarrow$ “: Die beiden offenen Mengen  $X \setminus \{x\}$  und  $X \setminus \{y\}$  erfüllen die Behauptung. □

**Bemerkung** Die cofinite Topologie auf einer Menge  $X$  ist die größte Topologie auf  $X$ , sodass  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_1$ -Raum ist. Falls  $|X| = \infty$  ist die cofinite Topologie kein  $T_2$ -Raum.

### 0.9 Proposition

$T_{3a} \Rightarrow T_3$

Beweis: Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_{3a}$ -Raum. Seien  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $x \in X \setminus A$ . Dann existiert  $f : [0, 1] \rightarrow X$  stetig mit  $f|_A = 0$  und  $f(x) = 1$ . Die Mengen

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \quad f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

sind offene disjunkte Umgebungen von  $A$  bzw.  $x$ . □

### 0.10 Satz (Tietze, Urysohn)

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i).  $X$  normal
- (ii). Für jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq X$  und  $f : A \rightarrow [0, 1]$  stetig gibt es eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f} : X \rightarrow [0, 1]$ .

Beweis: Elementar, trickreich, lang (1-2 Doppelstunden) □

### 0.11 Folgerung

normal  $\Rightarrow$  vollständig regulär  $\Rightarrow$  regulär  $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Beweis: (i). normal  $\Rightarrow$  vollständig regulär: Wähle als abgeschlossene Menge  $A \cup \{x\}$  und als stetige Abbildung  $f : A \cup \{x\} \rightarrow [0, 1], f|_A = \cdot, f(x) = 1$ . Dann folgt die Behauptung aus Proposition 0.8 und Theorem 0.10.

(ii). vollständig regulär  $\Rightarrow$  regulär: Proposition 0.9

(iii). regulär  $\Rightarrow T_2$ : Proposition 0.8

□

### 0.12 Proposition

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist normal.

Beweis: Aufgabe 8 (3 Punkte)

□

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  eine Folge. Dann konvergiert  $x_n$  gegen  $x \in X$   $\Leftrightarrow$  Für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  gilt  $|\{n \in \mathbb{N}; x_n \notin U\}| < \infty$ .

**Beispiel** Sei  $X$  eine unendliche Menge,  $\mathcal{T}$  die cofinite Topologie auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_1$ -Raum, aber kein  $T_2$ -Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ) konvergiert gegen jeden Punkt in  $X$ .

### 0.13 Proposition

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_2$ -Raum. Dann konvergiert eine konvergente Folge gegen genau einen Punkt.

Beweis: Angenommen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x \in X$  und  $y \in X$ . Dann seien  $O_1, O_2$  offene disjunkte Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Nach Definition: In  $O_1, O_2$  liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder. Widerspruch zu diskunkt! □

**Beispiel** Sei  $X$  mit  $|X| \geq 2$ . Dann ist  $(X, \{\emptyset, X\})$  ein  $T_3$ - und  $T_4$ -Raum, aber kein  $T_1$ -Raum.

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

(i). Eine offene Überdeckung von  $X$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$  mit  $\bigcup \mathcal{M} = X$ .

(ii).  $(X, \mathcal{T})$  heißt quasi-kompakt  $\Leftrightarrow$  Jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$\forall \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}, \bigcup \mathcal{M} = X \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \text{ endlich} : \bigcup \mathcal{F} = X$$

(iii).  $(X, \mathcal{T})$  heißt kompakt  $\Leftrightarrow$  quasi-kompakt, hausdorffsch. Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt kompakt  $\Leftrightarrow (A, \mathcal{T}_A)$  ist kompakt.

### 0.14 Satz

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann äquivalent:

(i).  $A$  kompakt

(ii).  $A$  abgeschlossen und beschränkt

Beweis: Analysis II

□

### 0.15 Proposition

Sei  $(X, \mathcal{T})$  kompakt,  $A \subseteq X$ . Dann  $A$  kompakt  $\Leftrightarrow A$  abgeschlossen.

Beweis: Aufgabe 9 (4 Punkte); siehe Funktionalanalysis I, Satz 2.2(i)

□

**Definition** Ein  $T_2$ -Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt folgenkompakt  $\Leftrightarrow$  Jede Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 0.16 Satz

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_2$ -Raum. Dann gilt:

(i).  $X$  kompakt, 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt  $\Rightarrow X$  folgenkompakt

(ii).  $X$  folgenkompakt, 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt  $\Rightarrow X$  kompakt

Beweis: Übung □

**Definition** ("Meta-Definition") Sei  $E$  eine Eigenschaft für topologische Räume. Man sagt  $X$  hat die Eigenschaft lokal (lokal-E)  $:\Leftrightarrow$  Für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}_x$  existiert eine Umgebung  $V \in \mathcal{U}_x$  mit  $V \subseteq U$ , sodass  $V$  (mit Unterraum-Topologie) die Eigenschaft  $E$  hat.

**Definition** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt lokal-kompakt  $:\Leftrightarrow \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}_x \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subseteq U, V$  kompakt.

**0.17 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i).  $(X, \mathcal{T})$  kompakt
- (ii). Für jedes System  $\mathcal{R}$  von abgeschlossenen Mengen mit der Endlichen-Durchschnitts-Eigenschaft, d.h.  $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$  gilt  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , gilt

$$\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$$

Beweis: Aufgabe 10 (1 Punkt) □

**0.18 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein Hausdorff-Raum und  $K \subseteq X$  kompakt sowie  $x_0 \in X \setminus K$ . Dann gibt es  $U \in \mathcal{U}_{x_0}$  und  $V \in \mathcal{U}_K$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

Beweis: Aufgabe 11 (3 Punkte). Hinweis: Proposition 0.15. □

**0.19 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  normal.

Beweis: Aufgabe 12 (3 Punkte) □

**0.20 Proposition**

Seien  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum und  $(Y, \mathcal{S})$  ein topologischer Raum sowie  $f : X \rightarrow Y$  stetig.

- (i).  $f(X)$  ist kompakt
- (ii). Sei  $(Y, \mathcal{S})$  ein Hausdorff-Raum. Dann ist  $f$  abgeschlossen.

Beweis: Aufgabe 13 (3 Punkte) □

**0.21 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i).  $(X, \mathcal{T})$   $T_3$ -Raum
- (ii). Für alle  $x \in X$  existiert eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis: Aufgabe 14 (2 Punkte) □

**0.22 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein  $T_i$ -Raum ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) und  $M \subseteq X$ . Dann ist  $(M, \mathcal{T}_M)$  ein  $T_i$ -Raum.

Beweis: Aufgabe 15 (1 Punkt) □

**Bemerkung** Ein Unterraum eines normalen Unterraums ist nicht notwendig normal. Ein algebraischer Unterraum eines normalen Unterraums ist normal.

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  quasi-lokalkompakt  $:\Leftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{U}_x(\mathcal{T}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ .



**Bemerkung** Kompakte topologische Räume sind quasi-lokalkompakt.

**0.23 Satz**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein quasi-lokalkompakter Raum. Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  vollständig regulär.

Beweis: Ohne Beweis □

**Bemerkung** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein Hausdorff-Raum. Dann äquivalent:

- (i).  $(X, \mathcal{T})$  lokalkompakt
- (ii).  $(X, \mathcal{T})$  quasi-lokalkompakt

Beweis: • (i)  $\Rightarrow$  (ii): Klar.

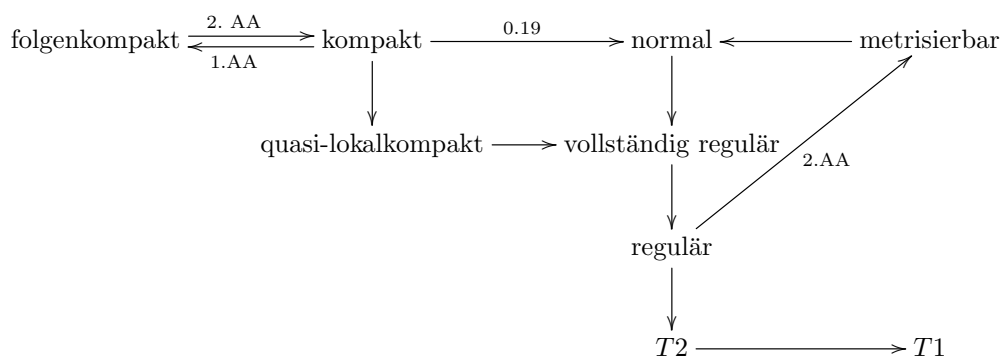
- (ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $x \in X$ . Dann existiert  $W \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$  kompakt. Sei  $U \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$ . Dann gilt:  $X$  quasi-lokalkompakt  $\stackrel{0.23}{\Rightarrow}$   $T_{3a}$ -Raum  $\stackrel{0.9}{\Rightarrow}$   $T_3$ -Raum  $\stackrel{0.21}{\Rightarrow}$   $\exists V \in \mathcal{U}_x(\mathcal{T})$  abgeschlossen:  $V \subseteq U \cap W$ . Wegen  $V \subseteq W$  folgt  $V$  kompakt (Proposition 0.15). □

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $\mathcal{T}$  metrisierbar  $:\Leftrightarrow$  Es gibt eine Metrik auf  $X$ , deren natürliche Topologie  $\mathcal{T}$  ist.

**0.24 Satz**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitskriterium erfüllt. Dann ist  $\mathcal{T}$  metrisierbar.

Beweis: Ohne Beweis □



**0.3 Zusammenhangsbegriffe**

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  zusammenhängend  $:\Leftrightarrow \mathcal{T} \cap C(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X\}$ .

- Beispiel**
- (i). Sei  $X$  eine Menge mit  $|X| \geq 2$ . Dann ist  $(X, \mathcal{P}(X))$  nicht zusammenhängend.
  - (ii).  $(X, \{\emptyset, X\})$  ist zusammenhängend.
  - (iii).  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$  ist nicht zusammenhängend ( $(0, \infty)^c = (-\infty, 0)$ )

**0.25 Proposition**

$[0, 1]$  ist zusammenhängend.

Beweis: Annahme: Es existiert  $A \subseteq [0, 1]$  offen und abgeschlossen mit  $A \neq \emptyset$ ,  $A \neq X$ . Dann ist  $1_{[0,1] \setminus A}$  stetig. Widerspruch zu Zwischenwertsatz. □

**Definition** (i). Sei  $I := [0, 1]$  mit der natürlichen Topologie. Sei  $(X; \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $w : I \rightarrow X$ . Dann heißt  $w$  Weg in  $X$   $:\Leftrightarrow w \in C(I, X)$ .

- (ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  wegzusammenhängend  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X \exists w \in C(I, X) : w(0) = x, w(1) = y$ .

**0.26 Proposition**

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig.

- (i). Sei  $(X, \mathcal{T})$  zusammenhängend. Dann ist  $(f(X), \mathcal{S}_{f(X)})$  zusammenhängend.  
 (ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  wegzusammenhängend. Dann ist  $(f(X), \mathcal{S}_{f(X)})$  wegzusammenhängend.

Beweis: Aufgabe 16 (2 Punkte) □

**0.27 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  zusammenhängend.

Beweis: Aufgabe 17 (1 Punkt) □

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i).  $(X, \mathcal{T})$  lokal-(weg)zusammenhängend  $:\Leftrightarrow$  Jeder Punkt hat eine Umgebungsbasis aus (weg)zusammenhängenden Mengen.  
 (ii). Sei  $A \subseteq X$  nichtleer.  $A$  (Weg)Zusammenhangskomponente von  $(X, \mathcal{T})$   $:\Leftrightarrow A$  ist eine maximale (weg)zusammenhängende Menge.

**0.28 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Seien  $A_1, A_2 \subseteq X$  mit  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ .

- (i).  $A_1, A_2$  zusammenhängend  $\Rightarrow A_1 \cup A_2$  zusammenhängend  
 (ii).  $A_1, A_2$  wegzusammenhängend  $\Rightarrow A_1 \cup A_2$  wegzusammenhängend

Beweis: Aufgabe 18 (2 Punkte) □

**Folgerung**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann sind die Menge der Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten Partitionen von  $X$ .

**0.29 Proposition**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Sei  $A \subseteq X$  zusammenhängend und  $B \subseteq X$  mit  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Dann  $B$  zusammenhängend.

Beweis: Aufgabe 19 (2 Punkte) □

**Bemerkung** Nach Proposition 0.27 sind lokal wegzusammenhängende Räume lokal zusammenhängend.

- Beispiel** (i).  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, die Zusammenhangskomponenten sind die ein-elementigen Mengen.  
 (ii).  $(X, \mathcal{P}(X))$  mit  $|X| \geq 2$  nicht zusammenhängend, aber lokal wegzusammenhängend.  
 (iii).  $X := \{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0)\}$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Folgt aus Proposition 0.26, 0.28, 0.29. Zusammenhangskomponente:  $X$ . Wegzusammenhangskomponenten  $X \cap ((-\infty, 0) \times \mathbb{R})$ ,  $X \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R})$ ,  $\{(0, 0)\}$   
 (iv). Kegel in  $\mathbb{R}^2$  mit Spitze  $(0, 1)$  und Basis  $\{(\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2; n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$  wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend (z.B.  $(0, 0)$  mit  $X \cap (\mathbb{R} \times (-\infty, \frac{1}{2}))$ ).

Konvention:

- (i). Wenn  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum,  $A \subseteq X$ , betrachte  $A$  mit Unterraumtopologie.  
 (ii).  $\cup A_i$ : disjunkte Vereinigung. Ggf. disjunkt machen mit  $A_i \times \{i\}$

#### 0.4 Initiale und finale Topologien

**Definition** Seien  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$  topologische Räume und  $f_\iota : M \rightarrow X_\iota$  Abbildung ( $\iota \in I$ ). Dann ist

$$\mathcal{S} := \{f_\iota^{-1}(U_\iota); \forall \iota \in I, U_\iota \in \tau_\iota\}$$

eine Subbasis der größten Topologie auf  $M$ , sodass alle  $f_\iota$  ( $\iota \in I$ ) stetig sind. Die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie heißt Initialtopologie (initiale Topologie) auf  $M$  bzgl.  $(f_\iota)_{\iota \in I}$ .

**Beispiel** (i). Falls  $M \subseteq X$  und  $i : M \rightarrow X, m \mapsto m$  die Inklusionsabbildung ist, dann ist die initiale Topologie auf  $M$  die Unterraumtopologie ( $i^{-1}(A) = A \cap M$ ).

(ii). Produktraum: Sei  $X := \prod_{\iota \in I} X_\iota$  und  $p_\iota : X \rightarrow X_\iota$  die Projektion wobei  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$  topologische Räume sind. Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  mit der initialen Topologie  $\mathcal{T}$  bzgl.  $(p_\iota)_{\iota \in I}$  der Produktraum.

**Bemerkung** Eine Basis der Produkttopologie besteht also aus Mengen der Form

$$\left\{ \prod_{\iota \in F} U_\iota \times \prod_{\iota \in I \setminus F} X_\iota; F \subseteq I \text{ endlich}, U_\iota \in \tau_\iota (\iota \in F) \right\}$$

#### 0.30 Satz

Seien  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow X_\iota$  Abbildungen ( $\iota \in I$ ) und  $\mathcal{T}$  die Initialtopologie auf  $X$ . Für jeden topologischen Räume  $(S, \mathcal{S})$  und Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gilt:

$$g \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \iota \in I : (f_\iota \circ g) \text{ stetig}$$

Beweis: • „ $\Rightarrow$ “: Klar, da alle  $f_\iota$  nach Definition der Initialtopologie stetig sind.

• „ $\Leftarrow$ “: Sei  $S \in \mathcal{S} := \bigcup_{\iota \in I} \{f_\iota^{-1}(U_\iota); U_\iota \in \tau_\iota\}$ , dann gibt es  $\iota \in I$  und  $U_\iota \in \tau_\iota$  mit  $S = f_\iota^{-1}(U_\iota)$ , also

$$g^{-1}(S) = g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota)) = (f_\iota \circ g)^{-1}(U_\iota) \in \mathcal{S}$$

also  $g$  stetig nach Proposition 0.7. □

**Definition** Seien  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$  topologische Räume und  $f_\iota : X_\iota \rightarrow M$  ( $\iota \in I$ ) eine Familie von Abbildungen. Dann ist

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\iota \in I} \{O \subseteq M; f_\iota^{-1}(O) \in \tau_\iota\}$$

die feinste Topologie auf  $M$ , sodass alle  $f_\iota$  stetig sind. Sie heißt die Finaltopologie auf  $M$  bzgl.  $(f_\iota)_{\iota \in I}$  und  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ .

**Bemerkung**  $f^{-1}$  bewahrt bei beliebigen Durchschnitten und Vereinigungen und der Durchschnitt von Topologien ist eine Topologie.

**Beispiel** (i). Topologische Summe: Seien  $(X_\iota)_{\iota \in I}$  disjunkt und  $M := \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$  und  $f_\iota : X_\iota \rightarrow M, x \mapsto x$ . Dann ist die Finaltopologie offenbar

$$\left\{ \bigcup_{\iota \in I} U_\iota; \forall \iota \in I : U_\iota \in \tau_\iota \right\}$$

$M$  mit der Finaltopologie heißt die (topologische) Summe der  $(X_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ . Notation:  $\sum X_\iota$  für  $\bigcup X_\iota$  mit Finaltopologie.

(ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Sei  $p : X \rightarrow X/R$  die natürliche Abbildung. Dann heißt  $(X/R, \tilde{\mathcal{T}})$  der Quotientenraum von  $(X, \mathcal{T})$  bzgl.  $R$ , wobei  $\tilde{\mathcal{T}}$  die Finaltopologie auf  $X/R$  bzgl.  $p$  und  $(X, \mathcal{T})$  ist.

( $p$  ist stetig und surjektiv.  $p$  ist offen (abgeschlossen)  $\Leftrightarrow$  Für jede offene (abgeschlossene) Menge  $A \subseteq X$  gilt:  $p^{-1}(p(A))$  ist offen (abgeschlossen).)

**0.31 Satz**

Seien  $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$  topologische Räume,  $f_\iota : X_\iota \rightarrow M$  und  $\mathcal{T}$  die Finaltopologie auf  $M$  bzgl.  $(f_\iota)_{\iota \in I}$  und  $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ . Für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{S})$  und jede Abbildung  $g : M \rightarrow Y$  gilt:

$$g \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \iota \in I : (f_\iota \circ g) \text{ stetig}$$

Beweis: • „ $\Rightarrow$ “: Da nach Definition alle  $f_\iota$  stetig sind, ist die Behauptung klar.

- „ $\Leftarrow$ “: Sei  $O \in \mathcal{S}$ . Dann  $f_\iota^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_\iota)^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\iota$ , also  $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ . □

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume.

- Sei  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann heißt die Finaltopologie auf  $Y$  bzgl.  $f$  auch die Identifizierungstopologie bzgl.  $f$ .
- Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt eine identifizierende Abbildung, falls die Topologie  $\mathcal{S}$  die Identifizierungstopologie bzgl.  $f$  ist, d.h.  $A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ .
- Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv. Bezeichne  $R(f)$  die Äquivalenzrelation  $R(f) := \{(x, y); f(x) = f(y)\}$ . Sei  $\bar{f} : X/R(f) \rightarrow Y$  die eindeutig bestimmte bijektive Abbildung mit  $\bar{f} \circ p = f$ .  $f$  ist genau dann identifizierend, wenn  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus ist. ( $X/R(f)$  trägt die finale Topologie bzgl.  $p$ .)

**0.32 Bemerkung** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $R, S$  Äquivalenzrelationen auf  $X$  bzw.  $Y$ . Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und mit  $R$  und  $S$  verträglich, d.h.

$$(x, y) \in R \Rightarrow (f(x), f(y)) \in S$$

Dann gibt es genau eine Abbildung  $\bar{f} : X/R \rightarrow Y/S$  mit  $\bar{f} \circ p_R = p_S \circ f$  und  $\bar{f}$  ist stetig nach Satz 0.31 ( $X/R$  hat Finaltopologie bzgl.  $p_R$ ).

Wenn  $f$  ein Homöomorphismus ist und  $f, f^{-1}$  verträglich mit den Relationen sind, dann ist auch  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus.

**0.33 Proposition** (i). Jede stetige surjektive offene (abgeschlossene) Abbildung ist identifizierend.

- Jede stetige surjektive Abbildung eines komplexen Raumes  $X$  auf einen  $T_2$ -Raum  $Y$  ist identifizierend.
- Seien  $f : X \rightarrow Y$  identifizierend sowie  $g : Y \rightarrow Z$  stetig und surjektiv.  $g$  ist identifizierend  $\Leftrightarrow g \circ f$  ist identifizierend.

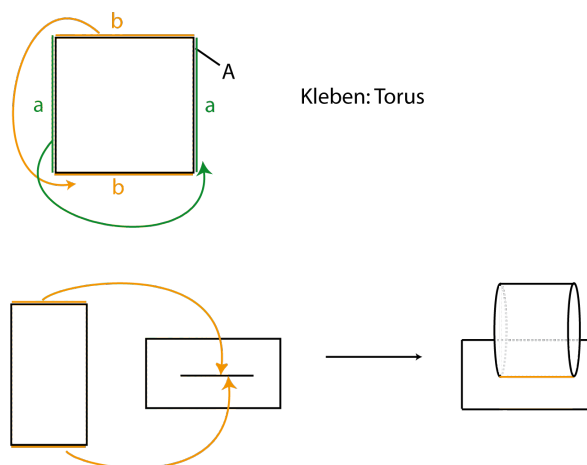
Beweis: Aufgabe 20 (3 Punkte). Hinweis: Proposition 0.20. □

**0.34 Proposition**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation,  $A \subseteq X/R$ . Falls  $B := p^{-1}(A)$  offen (abgeschlossen) ist, dann ist die natürliche Bijektion  $A \rightarrow B/R \cap (B \times B)$  ein Homöomorphismus.

Beweis: Aufgabe 21 (2 Punkte) □

Konstruktion: Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Sei  $f : A \rightarrow Y$  stetig. Sei  $R$  auf  $X \cup Y$  die von  $\{(a, f(a)); a \in A\}$  erzeugte Äquivalenzrelation (also  $(u, v) \in R$ , falls  $u = v$  oder  $u \in A, v = f(u)$  oder  $v \in A, u = f(v)$  oder  $u, v \in A, f(u) = f(v)$ ). Bezeichne  $Y \cup_f X = (X + Y)/R$  mit der Quotiententopologie. Sprechweise:  $Y \cup_f X$  entsteht aus  $Y$  durch Einkleben von  $X$  mit Klebeabbildung  $f$ .



**0.35 Folgerung**

Bezeichne  $p : X + Y \rightarrow Y \cup_f X$  die natürliche Abbildung.

- (i). Die Einschränkung  $p|_Y Y \rightarrow Y \cup_f X$  ist eine Einbettung.
- (ii). Die Einschränkung  $p|_{X \setminus A} X \setminus A \rightarrow Y \cup_f X$  ist eine Einbettung.

Der Raum  $Y \cup_f X$  ist also in natürlicher Weise zerlegt in einen abgeschlossenen Unterraum homöomorph zu  $Y$  und einen Unterraum homöomorph zu  $X \setminus A$ . Durch die Klebeabbildung wird beschrieben wie sie zusammengefügt sind.

Beweis: Folgt aus Proposition 0.34. □

**0.36 Proposition**

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Seien  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\varphi : X \rightarrow Z$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  seien stetige Abbildungen mit  $\varphi|_A = \psi \circ f$ . Bezeichne

$$\varphi + \psi : X + Y \rightarrow Z, x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & x \in X \\ \psi(x) & x \in Y \end{cases}$$

Dann ist  $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \rightarrow Z$  wohldefinierte Abbildung und stetig.

Beweis: Folgt aus Bemerkung 0.32. □

Notation:

$$\begin{aligned} B_n(x, \varepsilon) &:= B_\varepsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\| < \varepsilon\} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \\ B[0, \varepsilon] &:= D_\varepsilon^n \\ S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

**Beispiel** (i). Offensichtlich ist  $B(0, 1) \cong \mathbb{R}^n$  ( $x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|}$ )

(ii).  $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$  für  $x \in S^n$  beliebig, stereographische Projektion.

**Definition** Ein topologischer Raum, der homöomorph zu  $B(0, 1)$  ist, heißt  $n$ -Zelle.

**Beispiel** (zum Identifizieren/Klebeabbildung) (i). Sei  $X := B[0, 1]$ ,  $A = S^{n-1}$  und  $Y = \{p\}$  einpunktig,  $f : A \rightarrow \{p\}$ .  $\{p\} \cup_f B[0, 1] \cong S^n$

(ii).  $\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$  (Schreibweise:  $S^n /_{\pm \text{id}}$ ) wobei  $xRy \Leftrightarrow x = y$  oder  $x = -y$ , d.h. auf  $S^n$  werden Antipodenpunkte identifiziert.  $\mathbb{R}P^n$  heißt der  $n$ -dimensionale projektive Raum. (Wähle als Repräsentanten Einheitsvektoren und identifiziere  $x$  mit  $-x$ .)

- (iii). Wähle  $X = B[0, 1]$ ,  $A = S^{n-1}$ ,  $Y = \mathbb{R}P^{n-1}$ ,  $f : S^{n-1} \rightarrow S_{\mathbb{R}}^{n-1} = \mathbb{R}P^{n-1}$ , also  $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f B[0, 1]$ . Dies ergibt rekursiv eine Zerlegung des  $\mathbb{R}P^n$  in je eine Zelle der Dimension  $0, \dots, n$ .



**0.37 Satz (Invarianz des Gebietes)**

Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $X \cong Y$  und  $X$  offen. Dann ist  $Y$  offen in  $\mathbb{R}^n$ .

Beweis: Später, gegen Ende des Semesters. □

**0.38 Satz (Invarianz der Dimension)**

Aus  $m \neq n$  folgt  $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ ,  $S^m \not\cong S^n$  und  $B_n[0, 1] \not\cong B_m[0, 1]$ .

Beweis: Sei  $m < n$ .

- $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ , aber  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$ , also folgt aus Satz 0.37, dass  $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ .
- Wegen  $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$  folgt  $S^n \not\cong S^m$  für  $m \neq n$ .
- Angenommen  $B_n[0, 1] \cong B_m[0, 1]$ . Dann existiert ein Homöomorphismus  $f : B_m[0, 1] \rightarrow B_n[0, 1]$ , also ist  $B_n[0, 1] \subseteq \mathbb{R}^n$  homöomorph zu  $f^{-1}(\text{int } B_n[0, 1]) \subseteq B_m[0, 1] \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ . Widerspruch zu 0.37. □

**0.39 Satz (Invarianz des Randes)**

Jeder Homöomorphismus  $f : B_n[0, 1] \rightarrow B_n[0, 1]$  bildet  $S^{n-1}$  auf  $S^{n-1}$  ab.

Beweis: Angenommen  $x \in S^{n-1}$  und  $z := f(x) \in \text{int } B_n[0, 1] = B_n(0, 1)$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $U := B(z, \varepsilon) \subseteq B_n(0, 1)$ . Dann wäre  $f^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^n$ , aber wegen  $f^{-1}(U) \subseteq B_n[0, 1]$  und  $f^{-1}(U) \cap S^{n-1} \neq \emptyset$  nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ . Widerspruch zu 0.37. □

**0.5 Mannigfaltigkeiten**

**Definition** (i). Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt eine (topologische)  $n$ -Mannigfaltigkeit  $:\Leftrightarrow X$  ist  $T_2$ -Raum, der das 2. Abzählbarkeitskriterium erfüllt und für alle  $x \in X$  existiert entweder

- (1) eine offene Umgebung  $U$ , die homöomorph zu  $B_n(0, 1)$  ist
- (2) oder: eine offene Umgebung  $U$ , die homöomorph zu einem abgeschlossenen Halbraum ist und das Bild von  $x$  unter dem Homöomorphismus auf dem Rand liegt.

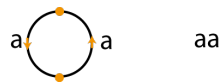
(ii). Der Rand (Mannigfaltigkeitsrand) einer  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\partial M := \{x \in M; x \text{ hat keine offene Umgebung } U \cong B_n(0, 1)\}$ .

**Definition** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit.  $M$  heißt

- (i). unberandet  $:\Leftrightarrow \partial M = \emptyset$
- (ii). geschlossen  $:\Leftrightarrow M$  unberandet, kompakt und zusammenhängend.
- (iii). Fläche  $:\Leftrightarrow n = 2$

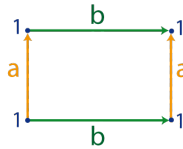
Wir werden die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten vollständig klassifizieren. Es gilt: Jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem  $2n$ -Eck mit paarweiser Identifikation von Kanten.

**Beispiel** (i). Homöomorph zu  $\mathbb{R}P^2$ :



aa

(ii). Homöomorph zu Torus bzw.  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ :



$aba^{-1}b^{-1}$

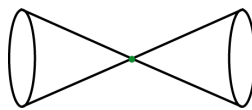
(iii). Homöomorph zu Torus:



$abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$

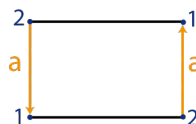
Für die Ecken: Benutze die erzeugte Äquivalenzrelation und identifiziere die entsprechenden Ecken.

(iv). Keine 2-Mannigfaltigkeit:



Beim Entfernen des grünen Punktes zerfällt es in zwei Zusammenhangskomponenten.

(v). Möbiusband:



**0.40 Satz** (Tychonoff)

Seien  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  topologische Räume,  $X_i \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$X := \prod_{i \in I} X_i \text{ quasi-kompakt} \Leftrightarrow \forall i \in I : X_i \text{ quasi-kompakt}$$

Beweis: Ohne Beweis. (Topologische Vektorräume, Satz 4.1)

□

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i). Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann bezeichnet  $X/A$  den Quotientenraum bzgl. der Relation  $xRy \Leftrightarrow x = y$  oder  $x, y \in A$ .
- (ii). Der Kegel über  $X$  ist  $CX := (X \times [0, 1]) / X \times \{1\}$  mit Spitze (Punkt)  $[X \times \{1\}]_R$ . ( $X \mapsto CX, x \mapsto (x, 0)$  ist eine Einbettung.)

Beispiel:  $CS^n \cong B_n[0, 1]$  ( $(x, t) \mapsto x \cdot (1 - t)$ ).

(iii). Die Einhängung von  $X$  ist  $EX := (X \times [0, 1]) /_{X \times \{0,1\}}$ .

**0.41 Proposition** (i).  $f : X \rightarrow Y$  stetig induziert eine stetige Abbildung  $Ef : EX \rightarrow EY$ .

(ii).  $ES^n \cong S^{n+1}$

Beweis: Aufgabe 22 (2P)

□

**Definition** Seien  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  topologische Räume und  $x_i \in X_i$  mit  $\{x_i\}^c \in \mathcal{T}_i$ . Dann heißt  $VX_i = \sum X_i /_A$  mit  $A := \{x_i, i \in I\}$  die Einpunktvereinigung der  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  und  $[A]$  der gemeinsamen Punkt.

**Beispiel** Sei  $X_i := [0, 1]$  und  $x_i := 0$ ,  $I = \mathbb{N}$  und  $X$  die Einpunktvereinigung und  $x$  der gemeinsame Punkt.

(i).  $x \in X$  hat keine abzählbare Umgebungsbasis (also erfüllt nicht das 1. Abzählbarkeitskriterium und ist daher nicht metrisierbar).

(ii).  $x \in X$  hat keine kompakte Umgebung

Beweis: Aufgabe 23/24 (jeweils 4P)

□



# 1

## Homotopie von Abbildungen

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume. Seien  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$  stetig. Dann heißen  $f$  und  $g$  homotop  $:\Leftrightarrow$  Es gibt eine stetige Abbildung  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  existiert mit  $F(x, 0) = f(x)$  und  $F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$ .  $F$  heißt Homotopie.

Notation:  $f \simeq g$ .

**Beispiel**  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$  und  $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x$  sind homotop, denn  $F(x, t) := t \cdot x$  ist eine Homotopie.

Achtung: Ob  $f \simeq g$  ist auch abhängig von  $Y$ .

### 1.1 Proposition

$\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ .

Beweis: (i).  $f \simeq f$ , denn  $F(x, t) := f(x)$  ist eine Homotopie.

(ii).  $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ : Wähle  $\tilde{F}(x, t) := F(x, 1 - t)$ .

(iii).  $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$ : Seien  $F_1, F_2$  Homotopien von  $f$  nach  $g$  bzw. von  $g$  nach  $h$ . Dann ist

$$\tilde{F}(x, t) := \begin{cases} F_1(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $h$ . (Für Stetigkeit: Falls  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$  mit  $A_i \subseteq X$  abgeschlossen, dann ist  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $f|_{A_i}$  stetig für  $i = 1, \dots, n$ .)

□

**Definition** Zwei topologische Räume  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  heißen homotopie-äquivalent (oder vom selben Homotopietyp)  $:\Leftrightarrow$  Es gibt stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ .  $f, g$  heißen Homotopie-Äquivalenz. Notation:  $X \simeq Y$ .

**1.2 Proposition** (i).  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

(ii). Seien  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  und  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  stetig mit  $f_0 \simeq f_1$  und  $g_0 \simeq g_1$ . Dann gilt  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ .

Beweis: (ii). Sei  $F$  eine Homotopie von  $f_0$  nach  $f_1$  und  $G$  eine Homotopie von  $g_0$  nach  $g_1$ . Dann ist  $g_0 \circ F : X \times I \rightarrow Z$  eine Homotopie zwischen  $g_0 \circ f_0$  und  $g_0 \circ f_1$ .  $G_0 \circ (f_1 \times \text{id}_{[0,1]}) : X \times I \rightarrow Z$  ist eine Homotopie zwischen  $g_0 \circ f_1$  und  $g_1 \circ f_1$ . Wie in Proposition 1.1(iii) folgt: Es gibt eine Homotopie von  $g_0 \circ f_0$  nach  $g_1 \circ f_1$ .

(i).  $X \simeq X$  sowie  $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$  sind klar. Seien  $X \simeq Y, Y \simeq Z$ , dann existieren  $f_0 : X \rightarrow Y, f_1 : Y \rightarrow Z, g_0 : Y \rightarrow Z, g_1 : Z \rightarrow Y$  stetig mit

$$f_0 \circ f_1 \simeq \text{id}_Y \quad f_1 \circ f_0 \simeq \text{id}_X \quad g_0 \circ g_1 \simeq \text{id}_Z \quad g_1 \circ g_0 \simeq \text{id}_Y$$

Dann

$$\begin{aligned}(f_1 \circ g_1) \circ (g_0 \circ f_0) &\stackrel{(ii)}{\simeq} f_1 \circ f_0 \simeq \text{id}_X \\ (g_0 \circ f_0) \circ (f_1 \circ g_1) &\simeq f_0 \circ f_1 \simeq \text{id}_Z\end{aligned}$$

□

### 1.3 Lemma

Seien  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig. Für alle  $x \in X$  sei die Verbindungsstrecke  $\{t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y); t \in [0, 1]\} \subseteq Y$ . Dann  $f \simeq g$ .

Beweis: Definiere  $F : X \times I \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto (1-t) \cdot f(x) + t \cdot f(y)$ . Offensichtlich  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  und  $F$  ist stetig. □

### 1.4 Korollar

Seien  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $f, g : X \rightarrow S^{n-1}$  stetig. Falls  $f(x) \neq -g(x)$  für alle  $x \in X$ , dann gilt  $f \simeq g$ .

Beweis: • Sei  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto x$  die Inklusionsabbildung. Dann gibt es nach Lemma 1.3 eine Homotopie  $X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zwischen  $i \circ f$  und  $i \circ g$ .

- Sei  $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ . Offenbar  $\varphi$  stetig und  $\varphi \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ . Also ist  $\varphi \circ F$  die gesuchte Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .

□

**Beispiel** Es gilt  $S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und  $S^1 \simeq X := \partial B_2[0, 1] \cup \{(x, 1); x \geq 1\}$  nach Lemma 1.3. Sind nicht homöomorph, da  $S^1$  nach Entfernen von 2 Punkten in 2 Zusammenhangskomponenten zerfällt,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nur in eine und  $X$  möglicherweise in 3 Zusammenhangskomponenten.

**Bemerkung** (i).  $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$ , aber die Umkehrung ist i.A. falsch. Die Einteilung in homotopie-äquivalente Räume ist also wesentlich gröber als die Einteilung in homöomorphe Räume.

- (ii). Die topologischen Invarianten, die wir definieren werden, werden für homotopie-äquivalente Räume übereinstimmen.

**Definition**  $(X, A)$  heißt ein Paar von Räumen (Raumpaar)  $:\Leftrightarrow A \subseteq X$  ist ein topologischer Unterraum.

**Definition** Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Raumpaare sowie  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

- (i).  $f$  heißt stetige Abbildung von Raumpaaren  $:\Leftrightarrow f : X \rightarrow Y$  stetig und  $f(A) \subseteq B$ .
- (ii).  $f$  und  $g$  heißen homotop  $:\Leftrightarrow$  Es gibt eine stetige Abbildung  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  mit  $F(x, 0) = f(x)$  und  $F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$  (also insbesondere  $F(a, t) \in B$  für alle  $a \in A, t \in [0, 1]$ ).
- (iii). Sei  $f(a) = g(a)$  für alle  $a \in A$ .  $f, g$  heißen homotop relativ zu  $A$   $:\Leftrightarrow$  Es gibt eine Homotopie  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  mit  $F(a, t) = f(a) = g(a)$  für alle  $t \in [0, 1], a \in A$ .

Notation:  $f \simeq g \text{ rel } A$

- (iv).  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  heißen homotopie-äquivalent  $:\Leftrightarrow$  Es gibt stetige Abbildungen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ ,  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ .

**Bemerkung** (i). Proposition 1.1, 1.2 gelten auch entsprechend für Paare. Lemma 1.3 gilt ebenfalls mit zusätzlicher Voraussetzung  $\{t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y); t \in [0, 1]\} \subseteq B$  für alle  $x, y \in A$ .

- (ii). Ferner ist auch die Relation  $\simeq \text{rel } A$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Insbesondere gilt  $f \not\simeq g \text{ rel } A$ , falls  $f|_A \neq g|_A$ .

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

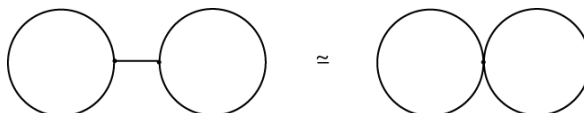
- (i). Sei  $r : X \rightarrow A$ . Dann heißt  $r$  Retraktion auf  $X$  bzgl.  $A \Leftrightarrow r|_A = \text{id}_A$ .
- (ii).  $A$  heißt Retrakt von  $X \Leftrightarrow$  Es gibt eine Abbildung  $r : X \rightarrow A$ , sodass  $r$  eine Retraktion auf  $X$  bzgl.  $A$ .
- (iii). Sei  $j : A \rightarrow X, a \mapsto a$  und  $r : X \rightarrow A$ . Dann heißt  $r$  eine Deformationsretraktion auf  $X$  bzgl.  $A \Leftrightarrow r$  Retraktion auf  $X$  bzgl.  $A$  und  $j \circ r \simeq \text{id}_X$ .
- (iv). Sei  $r : X \rightarrow A$ .  $r$  heißt starke Deformationsretraktion  $\Leftrightarrow r$  Retraktion auf  $X$  bzgl.  $A$  und  $j \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ .
- (v).  $A$  heißt (starker) Deformationsretrakt  $\Leftrightarrow$  Es gibt  $r : X \rightarrow A$  mit  $r$  (starke) Deformationsretraktion auf  $X$  bzgl.  $A$ .
- (vi).  $(X, \mathcal{T})$  heißt kontrahierbar  $\Leftrightarrow \exists x \in X : (X, \mathcal{T})$  und  $(x, \{\emptyset, \{x\}\})$  sind homotopie-äquivalent.

**Bemerkung** Für jeden Deformationsretrakt  $A$  von  $X$  gilt  $A \simeq X$ .

- Beispiel**
- (i).  $\mathbb{R}^n$  ist kontrahierbar,  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto t \cdot x$ .  $\{0\}$  ist starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^n$ .
  - (ii).  $S^1$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1, x \mapsto \frac{x}{|x|}$ .
  - (iii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Dann ist  $e : X \rightarrow X, x \mapsto x_0$  eine Retraktion auf  $X$  bzgl.  $\{x_0\}$  und  $\{x_0\}$  ein Retrakt, aber z.B. für  $X = S^1$  ist  $S^1 \neq \{x_0\}$ , also  $\{x_0\}$  kein Deformationsretrakt von  $S^1$ .

**1.5 Proposition** (i). Sei  $X = \{(1, 0)^T + s \cdot (t, -1)^T; s \in [0, 1], t \in \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\{(0, 0)\}$  ein Deformationsretrakt, aber kein starker Deformationsretrakt von  $X$ . (Aufgabe 25, 6 Punkte)

- (ii). Es gilt:



(Aufgabe 26, 5P)

- (iii). Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher zusammenhängender ungerichteter Graph (Schleifen und Mehrfachkanten zugelassen).
  - (1) Beschreiben Sie  $G$  explizit in natürlicher Weise als topologischen Raum. (2 Punkte)
  - (2) Sei  $e \in E$  (keine Schleife) mit Endpunkten  $x, y \in E, x \neq y$ . Sei  $G'$  der Graph, der durch Entfernen von  $e$  und Identifizieren von  $x$  und  $y$  aus  $G$  hervorgeht. Dann ist  $G \simeq G'$ . (4 Punkte)
  - (3)  $G \neq \emptyset$  ist homotopie-äquivalent zu einem Graphen mit einer Ecke und  $|E| - |V| + 1$  Kanten (Schleifen). (2 Punkte)

# 2

## Die Fundamentalgruppe

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i). Sei  $w$  ein Weg und  $x_0 \in X$ . Dann heißt  $w$  geschlossener Weg mit Basispunkt  $x_0$  : $\Leftrightarrow w(0) = w(1) = x_0$ .
- (ii). Seien  $u$  und  $v$  Wege in  $X$  mit  $u(1) = v(0)$ . Dann ist

$$uv : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto uv(t) := \begin{cases} u(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
$$u^{-1} : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto u^{-1}(t) := u(1-t)$$

( $uv$  und  $u^{-1}$  sind stetig.)

### 2.1 Proposition

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i). Seien  $u_1, u_2, v_1, v_2$  Wege in  $X$  mit  $u_1(0) = u_2(0)$ ,  $u_1(1) = u_2(1) = v_1(0) = v_2(0)$ ,  $v_1(1) = v_2(1)$  und  $u_1 \simeq u_2 \text{ rel}\{0, 1\}$ ,  $v_1 \simeq v_2 \text{ rel}\{0, 1\}$ . Dann ist

$$u_1 v_1 \simeq u_2 v_2 \text{ rel}\{0, 1\}$$
$$u_1^{-1} \simeq u_2^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$$

- (ii). Seien  $u, v, w$  Wege in  $X$  mit  $u(1) = v(0)$  und  $v(1) = w(0)$ . Dann gilt

$$(uv)w \simeq u(vw) \text{ rel}\{0, 1\}$$
$$uu^{-1} \simeq e_{u(0)} \text{ rel}\{0, 1\}$$
$$e_{u(0)}u \simeq ue_{u(1)} \simeq u \text{ rel}\{0, 1\}$$

wobei  $e_x : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x$  für  $x \in X$ . Weiterhin gilt  $(u^{-1})^{-1} = u$ .

**Beweis:** (i). Seien  $F, G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  Homotopien von  $u_1$  nach  $u_2$  bzw.  $v_1$  nach  $v_2$  relativ zu  $\{0, 1\}$ . Dann ist

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (t, s) \mapsto \begin{cases} F(2t, s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1, s) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

eine Homotopie von  $u_1 v_1$  zu  $u_2 v_2 \text{ rel}\{0, 1\}$ . Weiter ist

$$\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (t, s) \mapsto F(1-t, s)$$

eine Homotopie von  $u_1^{-1}$  nach  $u_2^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$ .

- (ii).  $(u^{-1})^{-1}$  ist klar. Nach Lemma 1.3 gilt für zwei stetige Abbildungen  $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\varphi(0) = \psi(0)$  und  $\varphi(1) = \psi(1)$ , dass  $\varphi = \psi \text{ rel}\{0, 1\}$ . Offenbar ist  $(uv)w(t) = u(vw)(\varphi(t))$  mit

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{4} + t & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Da nach Lemma 1.3  $\varphi \simeq \text{id}_{[0,1]} \text{rel}\{0,1\}$  folgt aus Proposition 1.2(ii), dass  $u(vw) \simeq (uv)w \text{rel}\{0,1\}$ .  
Es gilt  $e_{u(0)}u(t) = u(\varphi(t))$  mit

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und wie oben folgt  $\varphi \simeq \text{id}_{[0,1]} \text{rel}\{0,1\}$ . Damit  $e_{u(0)} \simeq u \text{rel}\{0,1\}$ .  $ue_{u(1)} \simeq u \text{rel}\{0,1\}$  folgt analog.

Weiter  $uu^{-1}(t) = u(\varphi(t))$  mit

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

also  $\varphi \simeq e_0 \text{rel}\{0,1\}$  und damit  $uu^{-1} \simeq u \circ e_0 = e_{u(0)} \text{rel}\{0,1\}$ . □

### 2.2 Satz

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Dann ist  $\Pi_1(X, x_0)$  die Menge der Homotopieklassen  $\text{rel}\{0,1\}$  geschlossener Wege in  $X$  mit Basispunkt  $x_0$ . Es sind

$$[u] \cdot [v] := [u \cdot v] \qquad [u]^{-1} := [u^{-1}]$$

wohldefiniert und  $(\Pi_1(X, x_0), \cdot, ^{-1}, [e_{x_0}])$  eine Gruppe, die Fundamentalgruppe von  $(X, x_0)$ .

Beweis: Wohldefiniert nach Proposition 2.1(i). Gruppeneigenschaften nach 2.1(ii). □

### 2.3 Satz

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume sowie  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0$ . Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\Pi_1(f) := f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0), [w] \mapsto f_{\#}([w]) := [f \circ w]$$

Ferner gilt

- (i). Falls  $g : Y \rightarrow Z$  stetig mit  $g(y_0) = z_0$ , dann  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ .
- (ii).  $(\text{id}_X)_{\#} = \text{id}_{\Pi_1(X, x_0)}$  (für  $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{S})$ )
- (iii). Falls  $g : X \rightarrow Y$  mit  $g(x_0) = y_0$  und  $f \simeq g \text{rel}\{x_0\}$ , dann  $f_{\#} = g_{\#}$ .

Beweis: •  $f_{\#}$  eindeutig ist klar.  $f_{\#}$  ist wohldefiniert: Seien  $w_1 \simeq w_2 \text{rel}\{0,1\}$ , dann folgt  $f \circ w_1 \simeq f \circ w_2 \text{rel}\{0,1\}$  nach Proposition 1.2(ii).

- $f_{\#}$  ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$f \circ (uv)(s) = \begin{cases} f \circ u(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f \circ v(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f \circ u)(f \circ v)(s)$$

also  $f_{\#}([u] \cdot [v]) = f_{\#}([u]) \cdot f_{\#}([v])$ .

- (i).  $(g \circ f)_{\#}([w]) = [g \circ f \circ w] = g_{\#} \circ f_{\#}([w])$
- (ii). Klar.
- (iii).  $f_{\#}([w]) = [f \circ w] \stackrel{1.2(ii)}{=} [g \circ w] = g_{\#}([w])$

□

## 2.4 Satz

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x_0, x_1 \in X$ . Sei  $u$  ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$ . Dann ist

$$u_+ : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_0), [w] \mapsto u_+([w]) := [uwu^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus. Ferner gilt:

- (i).  $u \simeq v \text{ rel}\{0, 1\} \Rightarrow u_+ = v_+$
- (ii).  $(e_{x_0})^+ = \text{id}$  für  $x_1 = x_0$
- (iii). Sei  $v$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_2$ . Dann gilt  $(uv)_+ = u_+v_+$ .
- (iv). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$ . Dann gilt

$$f_{\#} \circ u_+ = (f \circ u)_+ \circ f_{\#} : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$$

Beweis: Wegen  $w_1 \simeq w_2 \text{ rel}\{0, 1\} \Rightarrow uw_1u^{-1} \simeq uw_2u^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$  folgt, dass  $u_+$  wohldefiniert ist.

- (i).  $u \simeq v \text{ rel}\{0, 1\} \Rightarrow uwu^{-1} \simeq vuv^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$ , also  $u_+ = v_+$ .
- (ii). Klar.
- (iii).  $(uv)w(uv)^{-1} = u(vwv^{-1})u^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$
- (iv). Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\#} \circ u_+([w]) &= f_{\#}([uwu^{-1}]) = [f \circ (uwu^{-1})] \\ &= [(f \circ u)(f \circ w)(f \circ u^{-1})] = (f \circ u)_+ \circ f_{\#} \end{aligned}$$

$u_+$  ist ein Gruppenisomorphismus:

$$\underbrace{u(w_1w_2)u^{-1}}_{u_+[w_1w_2]} \simeq \underbrace{(uw_1u^{-1})}_{u_+[w_1]} \underbrace{(uw_2u^{-1})}_{u_+[w_2]} \text{ rel}\{0, 1\}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \forall [w] \in \Pi_1(X, x_1) : uu^{-1}wuu^{-1} &\simeq w \text{ rel}\{0, 1\} \\ \forall [w] \in \Pi_1(X, x_0) : u^{-1}uwu^{-1}u &\simeq w \text{ rel}\{0, 1\} \end{aligned}$$

nach 2.1(ii), d.h.  $(u^{-1}) \circ u_+ = \text{id}$  und  $u_+ \circ (u^{-1})_+ = \text{id}$ , also  $(u^{-1})_+ = (u_+)^{-1}$ . □

## 2.5 Folgerung

Falls  $X$  wegzusammenhängend ist, dann gilt

$$\forall x_0, x_1 \in X : \Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(X, x_1)$$

Beweis: Folgt direkt aus 2.4. □

**2.6 Bemerkung** (i). In diesem Fall schreiben wir  $\Pi_1(X)$ .

(ii). Falls  $[u] \in \Pi_1(X, x_0)$ , dann ist  $u_+([w]) = [u][w][u]^{-1}$  ein innerer Automorphismus.

## 2.7 Lemma

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $F : I \times I \rightarrow X$  stetig. Seien  $u_0, u_1, v_0, v_1 : I \rightarrow X$  definiert durch

$$u_0(t) := F(t, 0) \quad u_1(t) := F(t, 1) \quad v_0(t) := F(0, t) \quad v_1(t) := F(1, t)$$

Dann gilt  $u_0v_1 \simeq v_0u_1 \text{ rel}\{0, 1\}$ .

Beweis: Seien  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1 : I \rightarrow I \times I$  definiert durch

$$\tilde{u}_0(t) := (t, 0) \quad \tilde{u}_1(t) := (t, 1) \quad \tilde{v}_0(t) := (0, t) \quad \tilde{v}_1(t) := (1, t)$$

dann gilt  $F \circ \tilde{u}_j = u_j$  und  $F \circ \tilde{v}_j = v_j$  für  $j = 1, 2$ . Offenbar gilt  $\tilde{u}_0\tilde{v}_1 \simeq \tilde{v}_0\tilde{u}_1 \text{ rel}\{0, 1\}$  nach Lemma 1.3, also

$$u_0v_1 = F \circ (\tilde{u}_0\tilde{v}_1) \simeq F \circ (\tilde{v}_0\tilde{u}_1) = v_0u_1 \text{ rel}\{0, 1\} \quad \square$$

### 2.8 Satz

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$  und  $f \simeq g$ . Sei  $H : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  und  $w : I \rightarrow X$  definiert durch  $w(t) := H(x_0, t)$ . Dann gilt:

$$f_{\#} = w_+ \circ g_{\#}$$

Beweis: Sei  $u : I \rightarrow X$  stetig mit  $u(0) = u(1) = x_0$ . Nach Lemma 2.7 angewendet auf  $F := H \circ (u \times \text{id}_{[0,1]})$  folgt mit

$$\begin{aligned} u_0(t) &= H(u(t), 0) = f \circ u(t) \\ u_1(t) &= H(u(t), 1) = g \circ u(t) \\ v_0(t) &= H(u(0), t) = H(x_0, t) = w(t) = H(u(1), t) = v_1(t) \end{aligned}$$

dass

$$\underbrace{u_0v_1}_{(f \circ u)_w} \simeq \underbrace{v_0u_1}_{w(g \circ u)} \text{ rel}\{0, 1\}$$

also  $f \circ u \simeq w(g \circ u)w^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$ , d.h.  $f_{\#} = w_+ \circ g_{\#}$ . □

### 2.9 Folgerung

Gilt  $f \circ g \simeq \text{id}$ , dann ist  $f_{\#} \circ g_{\#}$  ein Isomorphismus (insbesondere  $g_{\#}$  injektiv und  $f_{\#}$  surjektiv). Wegzusammenhängende homotopie-äquivalente Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt einfach zusammenhängend  $:\Leftrightarrow X$  wegzusammenhängend und  $\Pi_1(X)$  ist die triviale (einelementige) Gruppe.

**Bemerkung** Nach Folgerung 2.9 ist jeder kontrahierbare Raum einfach zusammenhängend.

**Beispiel** (i).  $S^1$  ist wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend,  $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . (Später)

(ii).  $S^n, n \geq 2$ , ist einfach zusammenhängend, aber nicht kontrahierbar. (Später)

(iii). Poincaré-Vermutung: Jede einfach zusammenhängende kompakte (unberandete) 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu  $S^3$ . (Wurde vor einigen Jahren bewiesen.)

## 2.1 Exkurs: Gruppentheorie

- Normalteiler  $N$ : Untergruppe von  $G$  mit  $aN = Na$  für alle  $a \in G$  ( $N = aNa^{-1}$ ).
- Faktorgruppe  $(aN)(bN) := (ab)N = a(Nb)N$  mit natürlichem Homomorphismus  $\text{nat} : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$
- Homomorphie-Satz: Sei  $f : G \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismus, dann existiert ein injektiver Gruppenhomomorphismus  $\bar{f}$  mit  $f = \bar{f} \circ \text{nat}$  ( $N := \ker f$ , ist Normalteiler). Falls  $f$  surjektiv ist, ist  $\bar{f}$  ein Isomorphismus.
- Freie Gruppe: Sei  $M$  eine Menge. Gesucht ist Gruppe  $F(M)$  und Abbildung  $i : M \rightarrow F(M)$ , sodass für alle Gruppen  $G$  und Abbildung  $f : M \rightarrow G$  genau ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{f} : F(M) \rightarrow G$  mit  $\bar{f} \circ i = f$  existiert.  $F(M)$  heißt freie Gruppe.

Eindeutigkeit: Seien  $F_1(M), F_2(X)$  freie Gruppen über  $M$ . Dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus  $f_1: F_1(M) \rightarrow F_2(M)$  und  $f_2: F_2(M) \rightarrow F_1(M)$ . Damit folgt, dass  $f_2 \circ f_1 = \text{id}_{F_1(M)}$  wegen Eindeutigkeit des Homomorphismus. Analog:  $f_1 \circ f_2 = \text{id}_{F_2}$ . Also  $F_1(M) \cong F_2(M)$ .

Existenz: Fasse Elemente aus  $M$  als Buchstaben auf und betrachte alle (formalen) Worte über  $X \cup X^{-1}$ . Definiere dann Äquivalenzrelation  $R$ , die von der Relation  $w_1 x x^{-1} w_2 \sim w_1 w_2$ , wobei  $w_1, w_2$  Wörter und  $x \in X \cup X^{-1}$  Buchstabe, erzeugt wird.  $R$  ist mit der Multiplikation verträglich und man erhält damit eine Gruppe. Neutrales Element ist das leere Wort.

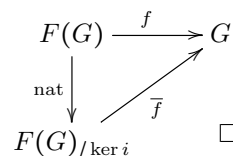
Alternativ: Normalform („reduziertes Wort“), d.h. kürze solange es geht direkt nebeneinanderstehende Buchstaben  $xx^{-1}$  (bzw.  $x^{-1}x$ ). Ist unabhängig von Reihenfolge. Dann  $F(X)$  Menge der reduzierten Wörter,  $w_1 w_2 = r(w_1 w_2)$ .

**Proposition**

Jede Gruppe ist isomorph zur Faktorgruppe einer freien Gruppe.

Beweis: Sei  $i: G \rightarrow F(G), g \mapsto g$  als Wort mit 1 Buchstabe. Dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus  $f: F(G) \rightarrow G$  und  $f$  ist surjektiv. Homomorphiesatz: Es existiert genau ein injektiver Gruppenhomomorphismus  $\bar{f}: F(G)_{\ker i} \rightarrow G$ .

Wegen  $f$  surjektiv ist  $\bar{f}$  surjektiv d.h.  $\bar{f}$  ist ein Isomorphismus.



**Bemerkung** Es genügt ein Erzeugendensystem  $E \subseteq G$  zu betrachten.

**Satz (Nielsen, Schreier (1927))**

Untergruppen von freien Gruppen sind frei.

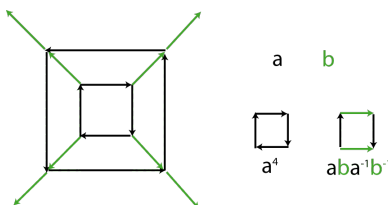
**Beispiel** Die von  $\{a^n b a^{-n}; n \in \mathbb{N}_0\}$  erzeugte Untergruppe von  $F(\{a, b\}) =: F(a, b)$  ist isomorph zu  $F(\mathbb{N}_0)$  (also insbesondere nicht endlich erzeugt).

Beweis: Aufgabe 28 (5P) □

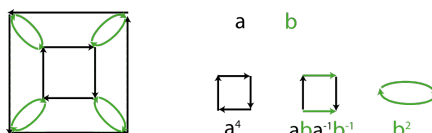
**Definition** Eine Darstellung einer Gruppe der Form  $F(\{a_1, \dots, a_n\}) / \langle w_1, \dots, w_m \rangle$  mit  $w_1, \dots, w_m \in F(\{a_1, \dots, a_n\})$  heißt eine endliche Präsentation der Gruppe.  $G$  heißt endlich präsentierbar  $\Leftrightarrow$  Es existieren endliche Mengen  $E \subseteq G, R \subseteq F(E)$  mit  $G \cong F(E) / \langle R \rangle$ . ( $\langle R \rangle$  bezeichnet den von  $R$  erzeugten Normalteiler.)

**Beispiel (Cayley-Diagramm)** Cayley-Diagramm von einer Darstellung der Gruppe durch Erzeugende und Relationen (endliche Präsentation): Das Cayley-Diagramm ist ein (einfacher) gerichteter Graph, dessen Knoten die Gruppenelemente sind und dessen (gerichtete) Kanten  $(v, va)$  mit  $v \in G, a \in E$ , d.h. Kante von  $v$  nach  $w$ , falls  $w = va$ . Kantenfärbng für jedes Erzeugende  $a \in E$ .

(i).  $G := F(a, b) / \langle \{a^4, abab^{-1}\} \rangle$



(ii).  $G := F(a, b) / \langle \{a^4, abab^{-1}, b^2\} \rangle$





Es gilt  $G = D_4$  (Diedergruppe): Betrachte dazu  $a := (1, 2, 3, 4)$ ,  $b := (1, 2)(3, 4)$ . Dann  $a^4 = e$ ,  $b^2 = e$ ,  $aba = (1, 2)(3, 4) = b$ , damit folgt, dass die erzeugte Permutationsgruppe Faktorgruppe von  $G$  ist und da beide Gruppen gleich viele Elemente besitzen, sind diese identisch.

Konvention für  $a \in E$  mit  $a^2 \in R$ : Zeichne nur die Kanten mit Farbe als ungerichtete Kanten ein.

(iii).  $G := F(a, b) / \langle a^2, b^2 \rangle$  hat Cayley-Diagramm



(iv).  $G := F(a, b) / \langle a^5, b^2, (ab)^3 \rangle (= A_5)$  Aufgabe 29 (5 Punkte): Zeichne das Cayley-Diagramm.

**Definition** Seien  $G_i$  Gruppen für  $i \in I$ . Das Coprodukt (freies Produkt)  $\coprod_{i \in I} G_i$  ist eine Gruppe zusammen mit Homomorphismen  $\varphi_i : G_i \rightarrow \coprod_{i \in I} G_i$  ( $i \in I$ ), sodass für alle Gruppen  $G$  und Gruppenhomomorphismen  $f_i : G_i \rightarrow G$  genau ein Homomorphismus  $f : \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow G$  existiert mit  $f \circ \varphi_i = f_i$  für alle  $i \in I$ .

**Satz** (Konstruktion des Coprodukts)

Seien  $G_i = F(M_i) / \langle R_i \rangle$  mit  $M_i$  paarweise disjunkte Mengen und  $R_i \subseteq F(M_i)$ . Dann ist

$$F\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) / \langle \bigcup_i R_i \rangle$$

mit  $\varphi_i([w]) := [w]$  ( $i \in I$ ) Coprodukt.

Beweis: • Leicht zu zeigen:  $\varphi_i$  ist wohldefiniert, Homomorphismus.

- Sei  $G$  eine Gruppe und  $f_i : G \rightarrow G_i$  Gruppenhomomorphismen. Sei  $M := \bigcup_{i \in I} M_i$ . Sei  $j : M \rightarrow G$  definiert durch  $j|_{M_i} = f_i \circ \text{nat}_i \circ \varphi_i$ . Dann  $j$  wohldefiniert und total definiert. □

**Bemerkung** Das Wortproblem (d.h. ist ein vorgegebenes Wort in einem erzeugten Normalteiler) für endlich präsentierte Gruppen ist nicht entscheidbar. Sogar: Es gibt eine endlich präsentierte Gruppe mit nicht entscheidbarem Wortproblem.

# 3

## Simpliziale Komplexe

**Definition** (i). Seien  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ , dann heißt

$$\text{co}\{x_0, \dots, x_k\} := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i \cdot x_i; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

konvexe Hülle von  $\{x_0, \dots, x_k\}$ .

- (ii). Die konvexe Hülle von  $(k+1)$  affin unabhängigen Punkten  $\{x_0, \dots, x_k\}$  heißt ein  $k$ -Simplex und  $k$  die Dimension des Simplexes.  $x_0, \dots, x_k$  heißen Ecken.
- (iii). Die konvexe Hülle von einer  $m$ -elementigen Teilmenge von  $\{x_0, \dots, x_k\}$  mit  $(x_i)_{i=0}^k$  affin unabhängig heißt eine  $(m-1)$ -Seite des Simplexes. Falls  $0 < m < k+1$  heißt die Seite eine eigentliche Seite.

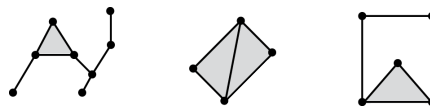
**Bemerkung** (i). Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die  $\{x_0, \dots, x_k\}$  enthält.

- (ii).  $\emptyset$  ist eine  $(-1)$ -Seite und 0-Seiten sind genau die Ecken. Eine Seite eines Simplex ist wieder ein Simplex.

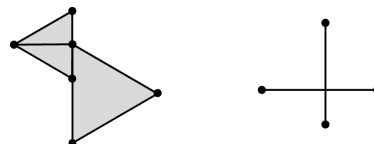
**Definition** Ein (geometrischer) simplizialer Komplex ist eine endliche Menge  $\mathcal{K}$  von Simplexes in  $\mathbb{R}^n$ , sodass

- (i). Der Durchschnitt von je zwei Simplexes aus  $\mathcal{K}$  ist eine gemeinsame Seite der Simplexes.
- (ii). Jede Seite eines Simplexes aus  $\mathcal{K}$  ist in  $\mathcal{K}$ .

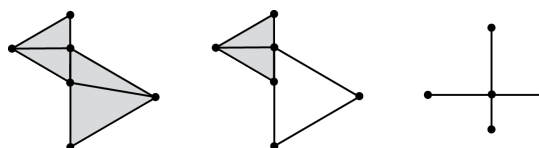
**Beispiel** (i). Die folgenden Objekte sind simpliziale Komplexe:



- (ii). Die beiden Objekte sind keine simplizialen Komplexe



(Links: Schnitt der beiden unteren Dreiecke ist keine Seite, da affin abhängig. Rechts: Schnitt der beiden Geraden ist keine gemeinsame Seite) aber



sind simpliziale Komplexe.

- Definition** (i). Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex.  $|\mathcal{K}|$  bezeichne die Vereinigung der Simplizes von  $\mathcal{K}$ , also  $|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}$ .  $|\mathcal{K}|$  heißt der Träger oder das zu  $\mathcal{K}$  gehörende Polyeder. Wir betrachten  $|\mathcal{K}|$  mit Unterraum-Topologie des  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii). Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt triangulierbar  $\Leftrightarrow$  Es existiert ein simplizialer Komplex  $\mathcal{K}$  mit  $|\mathcal{K}| \cong X$ .  $(\mathcal{K}, \varphi)$  heißt Triangulierung von  $X$ , wobei  $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow X$  Homöomorphismus.
- (iii). Die Dimension eines simplizialen Komplexes  $\mathcal{K}$  ist das Maximum der Dimension der Simplizes von  $\mathcal{K}$ .

**Beispiel** Dimension eines simplizialen Komplexes



**Definition** (i). Ein (abstrakter) simplizialer Komplex ist eine endliche Menge  $E$  zusammen mit einer Menge  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$ , sodass  $\bigcup \mathcal{S} = E$  und

$$A \subset B, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \in \mathcal{S}$$

Dimension von  $(E, \mathcal{S})$  ist  $d := \max\{\text{card } A; A \in \mathcal{S}\}$ .

- (ii). Sei  $\mathcal{K}$  ein geometrischer simplizialer Komplex und  $E$  die Eckenmenge von  $\mathcal{K}$ . Sei  $\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{P}(E); \text{co } A \in \mathcal{K}\}$ . Dann ist  $(E, \mathcal{S})$  ein abstrakter simplizialer Komplex, er heißt der zu  $\mathcal{K}$  gehörende abstrakte simpliziale Komplex.
- (iii). Zwei abstrakte simpliziale Komplexe  $(E_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(E_2, \mathcal{S}_2)$  heißen kombinatorisch isomorph  $\Leftrightarrow$  Es existiert  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  bijektiv mit  $\varphi(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$ , wobei  $\varphi(\mathcal{S}_1) := \{\varphi(A); A \in \mathcal{S}_1\}$ .
- (iv). Für  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex sei

$$\text{relint } M := \text{int}_{\text{aff } M} M$$

das relative Innere von  $M$ .

- (v). Eine Realisierung eines abstrakten simplizialen Komplexes  $(E, \mathcal{S})$  ist eine injektive Abbildung  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\{\text{co } \varphi(M); M \in \mathcal{S}\}$  ein geometrischer simplizialer Komplex ist.
- 3.0 Proposition** (i). Die Ecken eines Komplexes  $\mathcal{G}$  sind genau die Punkte, die nicht im relativen Inneren einer in  $\mathcal{G}$  liegenden Strecke sind. Sie sind also durch  $\mathcal{G}$  eindeutig bestimmt.
- (ii). Die natürliche Realisierung eines abstrakten simplizialen Komplexes  $(\{a_1, \dots, a_n\}, \mathcal{S})$  ist gegeben durch die Abbildung  $\varphi : \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(a_i) := e_i$ .

### 3.1 Satz

Ein  $n$ -dimensionaler abstrakter simplizialer Komplex  $(E, \mathcal{S})$  hat eine Realisierung in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Beweis: Sei  $E = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Wir wählen  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ , sodass  $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)\}$  in allgemeiner Lage liegen, d.h. je  $\min\{2n+2, k\}$  Punkte aus  $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)\}$  sind affin unabhängig. Sei dazu

$$\varphi(a_j) := x_j := (j \quad j^2 \quad \dots \quad j^{2n+1}) \quad (1 \leq j \leq k)$$

Angenommen  $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_{2n+2}}\}$  sind affin abhängig. Dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+2} \in \mathbb{R}$ , nicht alle = 0, mit

$$\sum_{i=1}^{2n+2} \lambda_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{2n+2} \lambda_i \cdot j_i^p = 0$$

für  $p = 1, \dots, 2n + 1$ . Nun ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ j_1 & \dots & j_{2n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1^{2n+1} & \dots & j_{2n+1}^{2n+2} \end{pmatrix} = \prod_{i>m} (j_i - j_m) \neq 0$$

also hat das zugehörige homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung, d.h.  $x_{j_1}, \dots, x_{j_{2n+1}}$  sind affin unabhängig.

Wir definieren  $\mathcal{K} := \{\text{co } \varphi(A); A \in \mathcal{S}\}$ .  $\mathcal{K}$  erfüllt offensichtlich die Bedingung, dass Seiten von Simplizes in  $\mathcal{K}$  wieder in  $\mathcal{K}$  sind. Seien  $\sigma_p, \tau_q$   $p$ - bzw.  $q$ -dimensionale Simplizes in  $\mathcal{K}$  und  $r$  die Zahl der gemeinsamen Ecken. Dann ist die Zahl der Ecken, die in  $\sigma_p$  oder  $\tau_q$  sind  $p+q+2-r \leq 2n+2$ , also sind diese affin unabhängig und können als Ecken eines  $(p+q+1-r)$ -Simplexes gewählt werden, welches  $\tau_q, \sigma_p$  als Seiten enthält, also  $\sigma_p \cap \tau_q$  gemeinsame Seite.  $\square$

**Bemerkung** Man kann zeigen, dass für  $n \in \mathbb{N}_0$  die Dimension  $2n + 1$  bestmöglich ist. Zum Beispiel für eine Menge  $E$  mit  $\text{card}(E) = 2n + 3$ ,  $\mathcal{S} := \{I; I \subseteq E, \text{card } I \leq n + 1\}$  ist  $(E, \mathcal{S})$  ein  $n$ -dimensionaler simplizialer Komplex, der aber nicht in  $\mathbb{R}^{2n}$  einbettbar ist (nichttrivial!). Für einen gegebenen simplizialen Komplex kann die Einbettungsdimension kleiner sein.

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex.

- (i). Ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ , die die Bedingung (ii) erfüllt (d.h. Seiten von Simplizes in  $\mathcal{L}$  gehören zu  $\mathcal{L}$ ).
- (ii). Das  $r$ -Skelett  $\text{sk}_r(\mathcal{K})$  ist die Menge der höchstens  $r$ -dimensionalen Simplizes in  $\mathcal{K}$ . ( $\text{sk}_r(\mathcal{K})$  ist ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ .)
- (iii). Ein simpliziales Paar  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  besteht aus einem simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$  und einem Unterkomplex  $\mathcal{L}$ .

**Beispiel** Sei  $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$  ein  $n$ -Simplex.  $\{\sigma_n\}$  ist kein simplizialer Komplex, aber  $\mathcal{K}(\sigma_n) := \{\sigma; \sigma \text{ Seite von } \sigma_n\}$  ist ein simplizialer Komplex. Dann heißt

$$\text{sk}_{n-1}(\mathcal{K}(\sigma_n)) = \mathcal{K}(\sigma_n) \setminus \{\sigma_n\}$$

heißt Randkomplex von  $\sigma_n$ . Es gilt

$$\text{rel int } \sigma_n = \sigma_n \setminus |\text{sk}_{n-1}(\mathcal{K}(\sigma_n))|$$

### 3.2 Proposition

Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar in  $\mathbb{R}^m$ .

- (i).  $|\mathcal{K}|$  ist eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ .
- (ii).  $|\mathcal{L}|$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $|\mathcal{K}|$ .
- (iii). Falls  $\mathcal{M}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$  ist, dann auch  $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  und  $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$  Unterkomplexe von  $\mathcal{K}$ .
- (iv).  $X \subseteq |\mathcal{K}|$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \forall \sigma \in \mathcal{K}: X \cap \sigma$  abgeschlossen.
- (v). Ein Simplex  $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$  ist eine kompakte wegzusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Ein Simplex hat eindeutig bestimmte  $k$ -Seiten.
- (vi). Jeder Punkt in  $|\mathcal{K}|$  ist im relativen Inneren genau eines Simplexes von  $\mathcal{K}$ .

Beweis: Leicht  $\square$

**Definition** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  (geometrische) simpliziale Komplexe. Eine simpliziale Abbildung  $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  ist eine Abbildung, für die gilt

- (i). Für  $\text{co}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$  ist  $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{L}$ .

(ii). Für  $\text{co}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$  gilt für alle  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ :

$$f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot f(a_i)$$

d.h.  $f$  ist „linear“ (genauer: affin) auf jedem Simplex.

**Bemerkung** Nach (i) werden Ecken auf Ecken abgebildet. Eine simpliziale Abbildung ist durch ihre Einschränkung auf die Eckenmenge von  $\mathcal{K}$  eindeutig bestimmt.

**Definition** Eine simpliziale Abbildung von simplizialen Paaren  $f(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ist eine simpliziale Abbildung  $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{M}|$  mit  $f(|\mathcal{L}|) \subseteq |\mathcal{N}|$ .

**Bemerkung** Die Komposition von simplizialen Abbildungen ist wieder eine simpliziale Abbildung.

### 3.3 Proposition

Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  eine simpliziale Abbildung. Dann ist  $f$  stetig.

Beweis: Sei  $X \subseteq |\mathcal{L}|$  abgeschlossen, dann ist  $X \cap \tau$  abgeschlossen für alle  $\tau \in \mathcal{L}$ . Sei  $\sigma \in \mathcal{K}$ , dann  $f|_\sigma$  stetig und daher  $f^{-1}(X) \cap \sigma$  abgeschlossen in  $\sigma$ , also  $f^{-1}(X)$  abgeschlossen nach Proposition 3.2(iv).  $\square$

**Definition** Seien  $(E_1, \mathcal{K}_1), (E_2, \mathcal{K}_2)$  abstrakte simpliziale Komplexe. Eine (abstrakte) simpliziale Abbildung ist eine Abbildung  $f: E_1 \rightarrow E_2$  mit  $f(\sigma) \in \mathcal{K}_2$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}_1$ .

### 3.4 Satz

Seien  $(E_i, \mathcal{K}_i)$  abstrakte simpliziale Komplexe und  $\varphi_i: E_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  Realisierungen von  $\mathcal{K}_i$  mit geometrischen Komplexen  $\tilde{\mathcal{K}}_i$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Sei  $f: E_1 \rightarrow E_2$  eine abstrakte simpliziale Abbildung.

- (i). Dann gibt es eine eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung  $\tilde{f}: |\tilde{\mathcal{K}}_1| \rightarrow |\tilde{\mathcal{K}}_2|$  mit  $\tilde{f}(\varphi_1(e)) = \varphi_2(f(e))$  für alle  $e \in E_1$ .
- (ii). Falls  $f$  injektiv ist, dann auch  $\tilde{f}$  injektiv, also eine Einbettung.
- (iii). Falls  $f$  ein kombinatorischer Isomorphismus ist, ist  $\tilde{f}$  ein Homöomorphismus.
- (iv). Sei  $g: E_2 \rightarrow E_3$  eine abstrakte simpliziale Abbildung, dann gilt  $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ .

Beweis: (i). Klar mit Proposition 3.2(vi) und der eindeutigen Fortsetzbarkeit von der Eckenmenge eines Simplexes zu einer affinen Abbildung auf dem Simplex. (Sei  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  eine Ecke von  $\mathcal{K}_1$ , dann definiere  $\tilde{f}(x) := \varphi_2(f(\varphi_1^{-1}(x)))$ . Beachte, dass  $\varphi_1$  injektiv.)

(iv) Klar wegen Eindeutigkeit.

(iii) Nach Definition sind  $f, f^{-1}$  abstrakte simpliziale Abbildungen. Wegen (iv) folgt daher

$$\tilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}} = \widetilde{\text{id}_{E_2}} = \text{id}_{|\tilde{\mathcal{K}}_2|}$$

Analog erhält man  $\widetilde{f^{-1}} \circ \tilde{f} = \text{id}_{|\tilde{\mathcal{K}}_1|}$ , also  $\widetilde{f^{-1}} = (\tilde{f})^{-1}$  und  $\tilde{f}, \widetilde{f^{-1}}$  sind stetig nach Proposition 3.3.

(ii). Betrachte  $f|: (E_1, \mathcal{K}_1) \rightarrow (f(E_1), \{f(\sigma); \sigma \in \mathcal{K}_1\})$ .  $f|$  ist ein kombinatorischer Isomorphismus, da  $f$  injektiv. Es gilt  $f = i \circ f|$  mit  $i: (f(E_1), \{f(\sigma); \sigma \in \mathcal{K}_1\}) \rightarrow (E_2, \mathcal{K}_2)$  Inklusionsabbildung,  $\tilde{i}$  ist Einbettung. Behauptung folgt mit (iii), (iv).  $\square$

**Bemerkung** Sei  $E$  eine endliche Menge und  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$  mit  $\bigcup \mathcal{S} = E$ . Dann ist durch  $\mathcal{K} := \{\sigma \subseteq E; \exists M \in \mathcal{S}: \sigma \subseteq M\}$  ein abstrakter simplizialer Komplex gegeben.

**Definition** Seien  $(E_1, \mathcal{K}_1)$  und  $(E_2, \mathcal{K}_2)$  abstrakte simpliziale Komplexe mit  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Der Join von  $(E_1, \mathcal{K}_1)$  und  $(E_2, \mathcal{K}_2)$  ist definiert durch

$$(E_1, \mathcal{K}_1) * (E_2, \mathcal{K}_2) := (E_1 \cup E_2, \{\sigma \subseteq E_1 \cup E_2; \forall i \in \{1, 2\}: \sigma \cap E_i \in \mathcal{K}_i\})$$

**Bemerkung** (i). Der Join von zwei abstrakten simplizialen Komplexen ist wieder ein abstrakter simplizialer Komplex. Es gilt  $\dim(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) = \dim \mathcal{K}_1 + \dim \mathcal{K}_2 + 1$ . Ferner

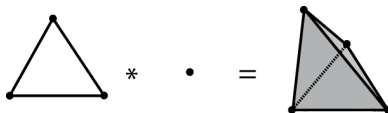
$$(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) * \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 * (\mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_3) \qquad \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_1$$

(ii). Seien  $\varphi_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  geometrische Realisierungen von  $(E_i, \mathcal{K}_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Zeigen Sie, dass

$$\varphi : E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}, e \mapsto \begin{cases} (\varphi_1(e), 0, 0) & e \in E_1 \\ (0, \varphi_2(e), 1) & e \in E_2 \end{cases}$$

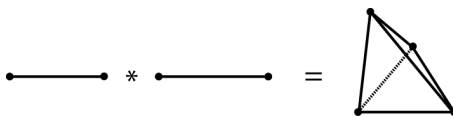
eine geometrische Realisierung von  $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$  ist. (Aufgabe 30, 3 Punkte)

**Beispiel** (i).  $\mathcal{K} * (\{a\}, \{\{a\}, \emptyset\})$  heißt die Pyramide über  $\mathcal{K}$  (Kegel).

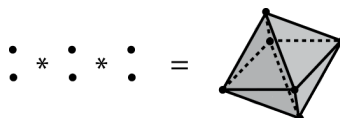


(ii).  $\mathcal{K} * (\{a, b\}, \{\{a\}, \{b\}, \emptyset\})$  heißt Einhängung von  $\mathcal{K}$  (Doppelpyramide)

(iii). Es gilt

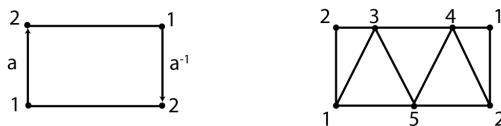


(iv). Es gilt



(Oberfläche des Oktaeders)

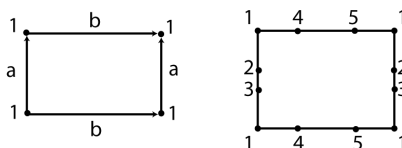
**Beispiel** (i). Möbiusband mit Triangulierung:



Aufgabe 31 (2 Punkte): Man gebe eine Realisierung dieser Triangulierung in  $\mathbb{R}^3$  an.

(ii). Projektive Ebene ( $\mathbb{R}P^2$ ), Aufgabe 32 (3 Punkte): Man finde eine Triangulierung mit 6 Ecken. Zeige, dass das Möbiusband aus (i) in diesen simplizialen Komplex eingebettet werden kann.

(iii). Aufgabe 33 (5 Punkte): Man finde eine Triangulierung mit 7 Ecken:



Die angefangenen Triangulierung rechts soll auf das Innere des Quadrates fortgesetzt werden.

**Definition** Bezeichne  $f_i$  die Anzahl der  $i$ -Seiten eines  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\mathcal{K}$ . Dann heißt

$$\chi(\mathcal{K}) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot f_i$$

die Euler-Charakteristik von  $\mathcal{K}$ .  $\chi$  ist eine topologische Invariante, d.h.  $|\mathcal{K}_1| \cong |\mathcal{K}_2| \Rightarrow \chi(\mathcal{K}_1) = \chi(\mathcal{K}_2)$ .

Aufgabe 34 (4 Punkte): Beweisen Sie, dass für eine 2-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit gilt:

$$f_0 \geq \left\lceil \frac{1}{2} \cdot (7 + \sqrt{49 - 24 \cdot \chi}) \right\rceil$$

# 4

## Simpliziale Approximation

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Seien  $x \in |\mathcal{K}|$  und  $\tau \in \mathcal{K}$ .

(i). Definiere

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathcal{K}; \exists \varrho \in \mathcal{K} : x \in \varrho, \sigma \text{ Seite von } \varrho\}$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathcal{K}; \exists \varrho \in \mathcal{K} : \tau \subseteq \varrho, \sigma \subseteq \varrho\}$$

d.h. ist die Menge der Simplizes in  $\mathcal{K}$ , die  $x$  (bzw.  $\tau$ ) als Seite enthalten sowie alle ihre Seiten.  $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}$  heißt simpliziale Umgebung von  $x$  bzw.  $\tau$ .

(ii). Sei

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x); x \notin \sigma\}$$

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\tau); \sigma \cap \tau = \emptyset\}$$

dann heißt Lk Link von  $x$  bzw.  $\tau$ .

(iii). Für  $x \in \text{rel int } \tau$  heißt

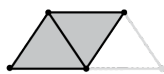
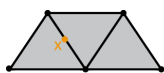
$$\text{St}_{\mathcal{K}}(x) := |\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x)| \setminus |\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x)| =: \text{St}_{\mathcal{K}}(\tau)$$

heißt Stern von  $x$  bzw.  $\tau$ .

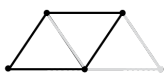
**Bemerkung** (i).  $\text{St}_{\mathcal{K}}(\tau)$  hängt offenbar nicht von der Wahl von  $x$  ab.

(ii). In der Literatur wird manchmal auch  $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\tau)$  als Stern bezeichnet.

**Beispiel** (i).



Umgebung

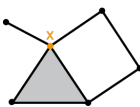


Link

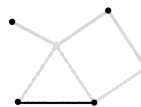
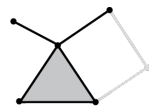


Stern

(ii).

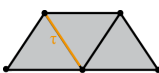


Umgebung

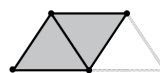


Link

(iii).



Umgebung



Link

### 4.1 Proposition

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex und  $x \in |\mathcal{K}|$ .

(i).  $|\mathcal{N}(x)|$  ist sternförmig bzgl.  $x$ , d.h. für alle  $y \in |\mathcal{N}(x)|$  liegt die Verbindungsstrecke  $xy$  in  $|\mathcal{N}(x)|$ .



(ii). Jeder von  $x$  ausgehende Strahl  $\ell \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\ell \cap |\mathcal{N}(x)| \neq \{x\}$  trifft  $\text{Lk}(x)$  in genau einem Punkt.

Beweis: (i). Falls  $y \in |\mathcal{N}(x)|$ , dann gibt es  $\tau \in \mathcal{K}$  mit  $x, y \in \tau$ .  $\tau$  ist konvex und daher  $xy \subseteq \tau \subseteq |\mathcal{N}(x)|$ .

(ii). Aufgabe 35 (3 Punkte) □

**Definition** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Dann heißt eine simpliziale Abbildung  $g : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  eine simpliziale Approximation von  $f$ , falls für jede Ecke  $a$  von  $\mathcal{K}$  gilt:

$$f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$$

**Bemerkung** Falls  $f$  simplizial ist, dann ist  $g := f$  eine simpliziale Approximation von  $f$ . ( $f$  bildet einen Simplex, der  $a$  als Ecke enthält, auf einen Simplex in  $\mathcal{L}$  ab, der  $f(a)$  als Ecke hat, also  $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(f(a))$ .)

#### 4.2 Proposition

Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Falls  $g$  eine Abbildung von der Menge der Ecken in  $\mathcal{K}$  in die Menge der Ecken von  $\mathcal{L}$  ist und

$$f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$$

dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) simpliziale Abbildung  $\bar{g} : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ , die Fortsetzung von  $\bar{g}$  ist und eine simpliziale Approximation von  $f$ .

Beweis: • Zu zeigen:  $\text{co}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K} \Rightarrow \text{co}\{g(a_0), \dots, g(a_n)\} \in \mathcal{L}$ . Dann lässt sich  $g$  eindeutig zu einer simplizialen Abbildung  $\bar{g}$  auf  $\mathcal{K}$  fortsetzen und nach Definition ist  $\bar{g}$  eine simpliziale Approximation.

• Sei  $x \in \text{rel int co}\{a_0, \dots, a_n\}$ . Dann ist  $x \in \bigcap_{j=0}^n \text{St}(a_j)$  und daher

$$f(x) \in \bigcap_{j=0}^n f(\text{St}(a_j)) \subseteq \bigcap_{j=0}^n \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a_j))$$

daher ist  $g(a_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) Ecke des eindeutig bestimmten Simplexes  $\sigma \in \mathcal{L}$  mit  $f(x) \in \text{rel int } \sigma$  (Proposition 3.2(vi)). Also  $\text{co}(g(a_0), \dots, g(a_n))$  Seite von  $\sigma \in \mathcal{L}$ . □

#### 4.3 Satz

Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Sei  $g$  eine simpliziale Approximation von  $f$ . Dann gilt  $f \simeq g$ , sogar  $f \simeq g \text{ rel}\{x \in |\mathcal{K}|; f(x) = g(x)\}$ .

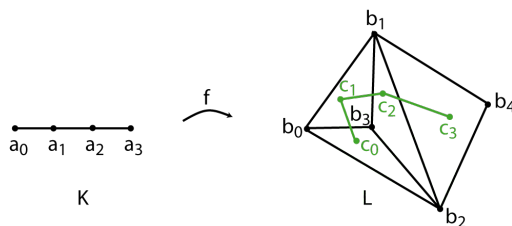
Beweis: Sei  $x \in |\mathcal{K}|$ , dann existiert  $\sigma \in \mathcal{K}$  mit  $x \in \text{rel int } \sigma$ ,  $\sigma = \text{co}\{a_0, \dots, a_n\}$ . Dann ist  $f(x)$  in einem Simplex  $\tau \in \mathcal{L}$ , das  $g(a_0), \dots, g(a_n)$  als Ecken hat (möglicherweise weitere Ecken, siehe Beweis von 4.2), also  $g(x) \in \tau$ . Damit liegt die Verbindungsstrecke von  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\tau \subseteq |\mathcal{L}|$ , also  $f \simeq g$  nach Lemma 2.3,

$$F(x, t) := (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$$

Damit 2. Behauptung klar. □

**Bemerkung** Fazit: Eine simpliziale Approximation approximiert eine Abbildung „bis auf Homotopie“.

**Beispiel** (i). Die simplizialen Komplexe  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  sowie die Abbildung  $f$  seien durch die folgende Abbildung gegeben, dabei gelte  $f(a_i) = c_i$  für  $i = 0, \dots, 3$ .



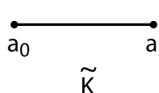
Dann gilt beispielsweise  $\text{St}(a_1) = (a_0, a_2)$  und daher

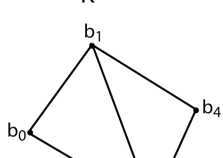
$$\begin{aligned} f(\text{St}(a_0)) &\subseteq \text{St}(b_0) \cap \text{St}(b_1) \cap \text{St}(b_2) & f(\text{St}(a_1)) &\subseteq \text{St}(b_2) \\ f(\text{St}(a_2)) &\subseteq \text{St}(b_1) & f(\text{St}(a_3)) &\subseteq \text{St}(b_1) \cap \text{St}(b_3) \end{aligned}$$

Für eine simpliziale Approximation  $g : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  muss daher gelten:

$$g(a_0) \in \{b_0, b_1, b_2\} \quad g(a_1) = b_2 \quad g(a_2) = b_1 \quad g(a_3) \in \{b_1, b_3\}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass es verschiedene simpliziale Abbildungen geben kann.

(ii).  Seien  $\mathcal{L}, f$  wie in (i), aber statt  $\mathcal{K}$  betrachte nun  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Dann ist  $f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0))$  in keinem Eckenstern enthalten, d.h. es gibt keine simpliziale Approximation.

(iii).  Seien  $\tilde{\mathcal{K}}, f$  wie in (ii), aber statt  $\mathcal{L}$  betrachte nun  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Dann ist

$$f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0)) \subseteq \text{St}_{\tilde{\mathcal{L}}}(b_1) \cap \text{St}_{\tilde{\mathcal{L}}}(b_3)$$

also existiert wieder eine simpliziale Approximation.

Die Existenz einer simplizialen Approximation  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  ist also stark von  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  abhängig (und nicht nur von  $|\mathcal{K}|, |\mathcal{L}|$ ). Dabei vergrößert eine „feinere Unterteilung“ von  $\mathcal{K}$  bzw. eine „gröbere Unterteilung“ von  $\mathcal{L}$  die Möglichkeit einer simplizialen Approximation.

Idee: Lasse  $\mathcal{L}$  fest und „verfeinere“  $\mathcal{K}$  solange, bis (hoffentlich) eine simpliziale Approximation von  $f$  existiert.

**Definition** Seien  $a_0, \dots, a_n$  affin unabhängig. Der Schwerpunkt des Simplexes  $\sigma := \text{co}(a_0, \dots, a_n) \neq \emptyset$  ist

$$\hat{\sigma} := \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{j=0}^n a_j$$

**Bemerkung** (i). Offenbar gilt  $\hat{\sigma} \in \text{relint } \sigma$ .

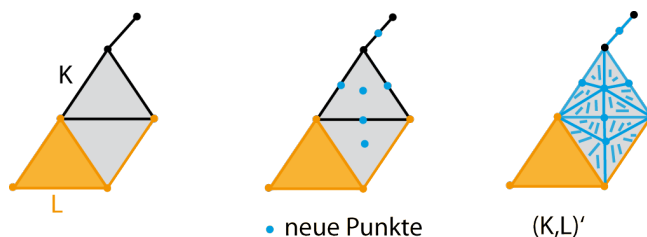
(ii). Wir wollen die Möglichkeit vorbehalten, dass ein Teil von  $\mathcal{K}$  unverändert bleibt. Wir gehen deshalb zu einem simplizialen Paar  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  über.

**Definition** Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar. Dann ist die baryzentrische Unterteilung von  $\mathcal{K}$  relativ zu  $\mathcal{L}$  (der abgeleitete Komplex)  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  definiert als

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}, \mathcal{L})' := \{ & \text{co}(a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m); \text{co}(a_0, \dots, a_k) \in \mathcal{L}, k, m \geq -1 \\ & \sigma_0, \dots, \sigma_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}, \sigma_m \supseteq \sigma_{m-1} \dots \supseteq \sigma_0 \supseteq \text{co}(a_0, \dots, a_k) \} \end{aligned}$$

Notation: Falls  $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ , dann schreibe  $\mathcal{K}'$  für  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ .

**Beispiel**



#### 4.4 Proposition

Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar.  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  ist ein simplizialer Komplex, der  $\mathcal{L}$  als Unterkomplex enthält und es gilt  $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}|$ .

Beweis: Die Ecken von  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  sind alle Ecken von  $\mathcal{L}$  und alle Ecken der Form  $\hat{\sigma}$  mit  $\sigma \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ . Nach Definition ist klar, dass Seiten von Simplizes in  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  wieder in  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  sind. Offenbar gilt zudem  $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| \subseteq |\mathcal{K}|$  (denn: Sei  $\sigma = \text{co}(a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m)$  wie in der Definition, dann gilt wegen der aufsteigenden Ordnung der Simplizes, dass  $\sigma \subseteq \sigma_m \in \mathcal{K}$ ).

Dass  $|\mathcal{K}| \subseteq |(\mathcal{K}, \mathcal{L})'|$  und dass der Durchschnitt von Simplizes aus  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  eine gemeinsame Seite ist, wird induktiv nach der Dimension von  $\mathcal{K}$  gezeigt. Betrachte das  $r$ -Skelett von  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}^r := \text{sk}_r(\mathcal{K})$  und  $\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}$ . Benutze folgendes Lemma mit  $r = \dim \mathcal{K}$ .  $\square$

#### 4.5 Lemma

Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar. Sei  $n := \dim \mathcal{K}$ ,  $-1 \leq r \leq n$ . Dann gilt:

- (i).  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  ist ein simplizialer Komplex, der  $\mathcal{L}$  als Unterkomplex enthält.
- (ii).  $|(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}|$
- (iii). Jedes Simplex von  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  ist in einem Simplex von  $\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}$  enthalten.
- (iv). Sei  $\mathcal{N}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}^r$ , dann ist  $(\mathcal{N}, \mathcal{N} \cap \mathcal{L})'$  ein Unterkomplex von  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ .

Beweis: (i). Dass Seiten von Simplizes in  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  wieder in  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  sind, ist klar nach Definition. Ebenso, dass  $\mathcal{L}$  ein Unterkomplex ist. Noch zu zeigen: Der Durchschnitt von Simplizes ist eine gemeinsame Seite. Dazu: Induktion nach  $r$ .

- $r = -1$ : Klar, da  $\mathcal{K}^{-1} = \{\emptyset\}$  und daher  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})' = (\mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{L}$ .
- $r = 0$ :  $\mathcal{K}^0$  ist die Menge der Ecken von  $\mathcal{K}$  und daher folgt nach Definition  $(\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}$ .
- Induktionsschritt: Betrachte die folgenden drei Fälle:
  - (1)  $\varrho \in (\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  und  $\eta$  ist von der Form  $\eta = \text{co}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau) \subseteq \sigma$  mit  $\tau \in (\mathcal{K}^{r-1} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}^r \setminus \mathcal{K}^{r-1}$ : Dann ist  $\varrho \cap \eta = \varrho \cap \tau$  (denn  $\varrho \cap \sigma \subseteq \tau$  wegen  $\sigma \notin \mathcal{K}^{r-1}$ ).  $\varrho \cap \tau$  ist gemeinsame Seite nach Induktionsannahme.
  - (2)  $\varrho = \text{co}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$ ,  $\eta = \text{co}(\{\hat{\sigma}\} \cup \mu)$ : Dann ist  $\varrho \cap \eta = \text{co}(\{\hat{\sigma}\} \cup (\tau \cap \mu))$  eine gemeinsame Seite.
  - (3)  $\varrho = \text{co}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$ ,  $\eta = \text{co}(\{\hat{\nu}\} \cup \mu)$  mit  $\hat{\sigma} \neq \hat{\nu}$ : Dann  $\varrho \cap \eta = \tau \cap \mu$  gemeinsame Seite.

(ii). Aufgabe

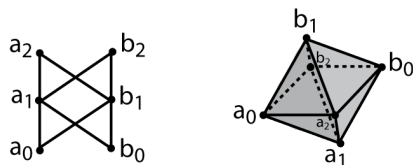
(iii). Klar, da  $\text{co}(a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m) \subseteq \sigma_m$  (Simplizes aufsteigend geordnet!).

(iv). Klar.  $\square$

**Bemerkung** Konstruktion kann für abstrakte simpliziale Komplexe durchgeführt werden, dies kann für partiell geordnete endliche Mengen  $(M, \leq)$  verallgemeinert werden.

Sei  $(M, \leq)$  eine endliche partiell geordnete Menge. Dann bezeichne  $\Delta(M)$  den abstrakten simplizialen Komplex (Ordnungskomplex) mit Eckenmenge  $M$  und alle Ketten in  $(M, \leq)$  als abstrakte Simplexe. (Es ist klar, dass dies ein abstrakter simplizialer Komplex ist, da eine Teilmenge einer Kette eine Kette ist.) Die  $k$ -Simplexe sind also Ketten der Länge  $k+1$ ,  $x_0 < \dots < x_k$ .

#### Beispiel



**Definition** Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar.

- (i). Der  $r$ -fach abgeleitete Komplex  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)}$  von  $\mathcal{K}$  relativ zu  $\mathcal{L}$  ( $r$ -fache baryzentrische Unterteilung) ist rekursiv definiert durch

$$(\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(0)} := \mathcal{K} \qquad (\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)} := ((\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r-1)}, \mathcal{L})'$$

- (ii). Die Sternüberdeckung von  $\mathcal{K}$  ist die Menge der Ecksterne von  $\mathcal{K}$ .
- (iii). Die Maschenweite (mesh) einer offenen Überdeckung eines metrischen Raumes ist das Supremum der Durchmesser der Überdeckungsmengen. Für  $\mathcal{K}$  ist  $\text{mesh}(\mathcal{K})$  die Maschenweite der Sternüberdeckung von  $\mathcal{K}$ .

#### 4.6 Proposition

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$  mit  $\text{mesh}(\mathcal{K}^{(r)}) < \varepsilon$ .

Beweis: • Sei  $\lambda$  das Maximum der Länge der 1-Simplexe von  $\mathcal{K}$ . Dann gilt offenbar  $\text{diam}(\text{St}(a)) \leq 2\lambda$  für alle Ecken  $a$  von  $\mathcal{K}$  (jede Ecke von  $N(a)$  ist in der abgeschlossenen Kugel  $B[0, \lambda]$  enthalten).

- Sei  $n := \dim \mathcal{K}$ . Sei  $\lambda^{(r)}$  die maximale Länge der 1-Simplexe in  $\mathcal{K}^{(r)}$ . Dann gilt  $\lambda^{(1)} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \lambda$ , denn

$$\begin{aligned} d\left(a_0, \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_i\right) &= \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (a_i - a_0) \right\| \leq \frac{1}{m+1} \cdot m \cdot \max_{i=1, \dots, m} \|a_i - a_0\| \\ &\leq \frac{m}{m+1} \cdot \lambda \leq \frac{n}{n+1} \cdot \lambda \end{aligned}$$

Folglich

$$\text{mesh}(\mathcal{K}^{(r)}) \leq 2 \cdot \lambda^{(r)} \leq 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \cdot \lambda \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad \square$$

#### 4.7 Lemma

Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es  $\delta > 0$ , sodass

$$\forall A \subseteq X, \text{diam}(A) < \delta \exists i \in I : A \subseteq U_i$$

$\delta$  heißt Lebesgue-Zahl von  $(U_i)_{i \in I}$ .

Beweis: Da  $X$  kompakt ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $I = \{1, \dots, n\}$  endlich. Für  $x \in X$ ,  $i \in I$  sei  $f_i(x) := d(x, X \setminus U_i)$ .  $f_i$  ist stetig für alle  $i \in I$ , daher

$$f(x) := \max_{i \in I} f_i(x)$$

stetig. Somit ist  $f(X) \subseteq [0, \infty)$  kompakt und  $0 \notin f(X)$  (da  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung ist und  $d(x, X \setminus U_i) = 0 \Leftrightarrow x \in X \setminus U_i$ ). Also gibt es  $\delta > 0$  mit  $f(x) > \delta$  für alle  $x \in X$ .  $\square$

#### 4.8 Satz

Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$ , sodass  $f : |\mathcal{K}^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  eine simpliziale Approximation hat.

Beweis: Betrachte  $\{f^{-1}(\text{St}(b)); b \text{ Ecke von } \mathcal{L}\}$ . Dies ist eine offene Überdeckung von  $\mathcal{K}$ . Nach Lemma 4.7 hat diese eine Lebesgue-Zahl  $\delta > 0$ . Wähle  $r \in \mathbb{N}$  mit  $\text{mesh}(\mathcal{K}) < \delta$ . Dann gibt es für jede Ecke  $a$  von  $\mathcal{K}^{(r)}$  eine Ecke  $B$  von  $\mathcal{L}$  mit  $\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}} \subseteq f^{-1}(\text{St}(b))$ , also

$$f(\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}}) \subseteq \text{St}(b)$$

d.h. nach Proposition 4.2 hat  $f$  eine simpliziale Approximation.  $\square$

**Folgerung**

Es gibt abzählbar viele Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ .

Beweis: Es gibt nur endlich viele simpliziale Abbildungen von  $\mathcal{K}^{(r)}$  nach  $\mathcal{L}$ . Nach Satz 4.8 und 4.3 gibt es für jedes  $f$  ein  $r \in \mathbb{N}$ , sodass  $f$  homotop zu einer simplizialen Approximation von  $\mathcal{K}^{(r)}$  nach  $\mathcal{L}$  ist.  $\square$

**4.9 Satz**

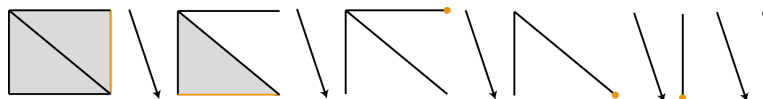
Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$  ein simpliziales Paar und  $\mathcal{L}$  ein simplizialer Komplex. Sei  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Falls  $f|_{|\mathcal{M}|}$  simplizial ist, gibt es  $r \in \mathbb{N}$  und eine simpliziale Abbildung  $h : |(\mathcal{K}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ , sodass  $h|_{|\mathcal{M}|} = f|_{|\mathcal{M}|}$  und  $h \simeq f \text{ rel } |\mathcal{M}|$ .

Beweis: Ohne Beweis, siehe z.B. Mauder, Algebraic Topology Theorem 2.5.20.  $\square$

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex.

- (i). Ein  $n$ -Simplex  $\sigma$  von  $\mathcal{K}$  hat eine freie Seite  $\tau : \Leftrightarrow \tau$  ist  $(n-1)$ -Seite von  $\sigma$  und  $\tau$  ist nicht Seite eines anderen  $n$ -Simplexes von  $\mathcal{K}$ .
- (ii). Sei  $\sigma$  ein  $n$ -Komplex mit freier Seite  $\tau$ . Der Übergang von  $\mathcal{K}$  zu  $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$  heißt ein elementarer Kollaps.
- (iii).  $\mathcal{K}$  kollabiert zu  $\mathcal{L}$ , falls  $\mathcal{L}$  ein Unterkomplex ist, der aus  $\mathcal{K}$  durch eine Folge elementarer Kollapse entsteht. Notation:  $\mathcal{K} \searrow \mathcal{L}$ .
- (iv).  $\mathcal{K}$  heißt kollabierbar, falls  $\mathcal{K}$  auf einen einpunktigen simplizialen Komplex kollabiert.

**Bemerkung** Falls  $\sigma$  eine freie Seite hat, dann ist  $\sigma$  in keinem Simplex von  $\mathcal{K}$  als eigentliche Seite enthalten, also ist  $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ .

**Beispiel**


**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex.

- (i). Ein Kantenweg in  $\mathcal{K}$  von der Ecke  $a_0$  zur Ecke  $a_n$  ist eine Folge von Ecken  $a_0, \dots, a_n$ , sodass  $\text{co}(a_{k-1}, a_k) \in \mathcal{K}$  für  $k = 1, \dots, n$ . Falls  $a_0 = a_n$ , dann heißt der Weg Kantenschleife mit Basispunkt  $a_0$ .
- (ii). Seien  $\alpha = a_0 \dots a_n$  und  $\beta = a_n \dots a_{n+m}$  Kantenwege in  $\mathcal{K}$ . Dann ist  $\alpha\beta := a_0 \dots a_n \dots a_{n+m}$  das Produkt und  $\alpha^{-1} := a_n \dots a_0$  der inverse Kantenweg.

**Bemerkung** Offensichtlich gilt  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$  und  $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ .

**Definition** Zwei Kantenwege  $\alpha, \beta$  heißen äquivalent  $:\Leftrightarrow$  Die Wege  $\alpha, \beta$  können durch eine (endliche) Folge von Operationen

- (O1) Ersetze  $\alpha_1 a \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a a \alpha_2$ .
- (O1') Ersetze  $\alpha_1 a a \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a \alpha_2$ .
- (O2) Falls  $\text{co}(a, b, c) \in \mathcal{K}$ : Ersetze  $\alpha_1 a b c \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a c \alpha_2$ .
- (O2') Falls  $\text{co}(a, b, c) \in \mathcal{K}$ : Ersetze  $\alpha_1 a c \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a b c \alpha_2$ .

wobei  $a, b, c$  Ecken von  $\mathcal{K}$  und  $\alpha_1, \alpha_2$  Kantenwege in  $\mathcal{K}$ , ineinander überführt werden. Notation:  $\alpha \sim \beta$ .

**Bemerkung**  $\sim$  ist (nach Konstruktion) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kantenwege in  $\mathcal{K}$ .

#### 4.10 Proposition

Seien  $\alpha_1, \beta_1$  Kantenwege von  $a_0$  nach  $a_n$  und  $\alpha_2, \beta_2$  Kantenwege von  $a_n$  nach  $a_{n+m}$ . Es gelte  $\alpha_1 \sim \beta_1$  und  $\alpha_2 \sim \beta_2$ . Dann gilt

- (i).  $\alpha_1\alpha_2 \sim \beta_1\beta_2$
- (ii).  $\alpha_1^{-1} \sim \beta_1^{-1}$
- (iii).  $a_0\alpha_1 \sim \alpha_1 \sim \alpha_1 a_n$
- (iv).  $\alpha_1\alpha_1^{-1} \sim a_0$  und  $\alpha_1^{-1}\alpha_1 \sim a_n$

#### 4.11 Folgerung

Die Menge der Äquivalenzklassen (bzgl.  $\sim$ ) von Kantenschleifen in  $\mathcal{K}$  mit Basispunkt  $a_0$  mit der Operation

$$[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$$

bildet eine Gruppe mit  $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$  und neutralem Element  $[a_0]$ , die Kantengruppe. Sie wird mit  $\tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  bezeichnet.

Beweis: Klar, vgl. Definition der Fundamentalgruppe. □

#### 4.12 Satz

$$\tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \cong \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$$

Beweis: Definiere

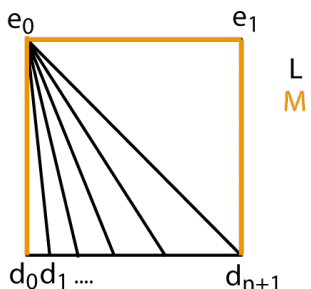
$$\varphi: \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0), \varphi([a_0 \dots a_n]) := [\overline{a_0 a_1 a_2} \dots \overline{a_{n-1} a_n}]$$

wobei  $a_n = a_0$  und  $\overline{a_{k-1} a_k}(t) := (1-t) \cdot a_{k-1} + t \cdot a_k$  der Weg von  $a_{k-1}$  nach  $a_k$ , also  $\overline{a_0 a_1}(\overline{a_1 a_2}(\dots(\overline{a_{n-1} a_n})))$  Weg von  $a_0$  nach  $a_n = a_0$ .

- (i).  $\varphi$  wohldefiniert: Die Operationen (O1), (O1') bedeuten das Einfügen bzw. Entfernen eines konstanten Weges. Die Wege  $\overline{abb}$  und  $\overline{ac}$  in (O2), (O2') sind offenbar homotop in  $|\mathcal{K}|$  (Lemma 2.3), falls  $\text{co}(a, b, c) \in \mathcal{K}$ .
- (ii).  $\varphi$  ist Gruppenhomomorphismus: Klar nach Definition.
- (iii).  $\varphi$  surjektiv: Sei  $w \in \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ . Sei  $\mathcal{I}$  der zu  $[0, 1]$  gehörende simpliziale Komplex, d.h.  $\mathcal{I} := \{[0, 1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$ . Nach Satz 4.7 gibt es  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{w}: |\mathcal{I}^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{K}|$  simplizial mit  $w \sim \tilde{w} \text{ rel } \{0, 1\}$ , d.h.  $[\tilde{w}] = [w]$ . Sei  $n := 2^r$  und  $a_k := \tilde{w}(\frac{k}{n})$ . Dann ist

$$\varphi([a_0 \dots a_n]) = [\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n}] = [\tilde{w}] = [w]$$

- (iv).  $\varphi$  injektiv, d.h. zu zeigen  $\varphi([\alpha]) = e \in \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \Rightarrow \alpha \sim a_0$ : Sei  $\alpha = [a_0 \dots a_n a_0]$  und  $u := \overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_n a_0}$ .  $u$  ist eine simpliziale Abbildung von einer Triangulierung von  $[0, 1]$  mit Ecken  $0 = c_0 < \dots < c_{n+1} = 1$  mit  $u(c_k) := a_k$  für  $0 \leq k \leq n$ ,  $u(c_{n+1}) := a_0$ .



Gilt  $\varphi([\alpha]) = e \in \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ , dann gibt es eine Homotopie  $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow |\mathcal{K}|$  mit  $F(t, 0) = u(t)$ ,  $F(t, 1) = F(0, t) = F(1, t) = a_0$ . Betrachte den simplizialen Komplex  $\mathcal{L}$  mit Unterkomplex  $\mathcal{M}$  wobei  $d_i := (c_i, 0)^T$ .  $F|_{|\mathcal{M}|}$  ist simplizial, also gibt es nach Satz 4.9 eine simpliziale Abbildung  $\tilde{F}: |(\mathcal{L}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{K}|$ , sodass

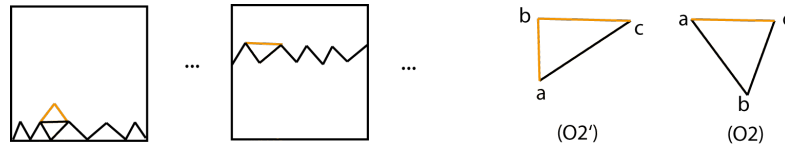
$$\tilde{F}|_{|\mathcal{M}|} = F|_{|\mathcal{M}|} \quad \tilde{F} \simeq F \text{ rel } \{0, 1\}$$

Dies bedeutet

$$\alpha = a_0 \dots a_n a_0 = F(d_0) \dots F(d_{n+1}) \sim \tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1})$$

$$\stackrel{(*)}{\sim} \tilde{F}(d_0) \tilde{F}(e_0) \tilde{F}(e_1) \tilde{F}(d_{n+1}) = a_0 a_0 a_0 a_0 \sim a_0$$

Zu (\*): Starte mit  $\tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1})$ . Hänge nacheinander Dreiecke in  $\mathcal{L}^{(r)}$  ein. Dies entspricht einem Elementarschritt (O2) bzw. (O2') in der Definition von  $\sim$  für das Bildsimplex unter  $\tilde{F}$ .



□

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Ein eindimensionaler Unterkomplex  $\mathcal{L}$  heißt ein Baum  $\Leftrightarrow \mathcal{L}$  ist kontrahierbar.  $\mathcal{L}$  heißt aufgespannter Baum, falls  $\mathcal{L}$  ein Baum ist, der alle Ecken von  $\mathcal{K}$  enthält.

**Bemerkung**  $\mathcal{L}$  ist ein Baum  $\Leftrightarrow \mathcal{L}$  zusammenhängend und enthält keine Zyklen.

**4.13 Proposition**

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Falls  $|\mathcal{K}|$  zusammenhängend ist, dann enthält  $\mathcal{K}$  einen aufspannenden Baum.

Beweis: Aufgabe 35 (1 Punkt)

□

**4.14 Satz**

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex und  $\mathcal{L}$  ein Unterkomplex. Sei  $|\mathcal{K}|$  zusammenhängend und  $|\mathcal{L}|$  kontrahierbar.  $\mathcal{L}$  enthalte alle Ecken von  $\mathcal{K}$  (z.B.  $\mathcal{L}$  aufspannender Baum in  $\mathcal{K}$ ). Ordne die Ecken von  $\mathcal{K}$   $a_0, \dots, a_n$ . Sei

$$M := \{g_{ij}; i < j : \text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}\}$$

( $g_{ij}$ : Symbole). Definiere in  $F(M)$ :

$$g_{ij} := \begin{cases} \epsilon & \text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{L} \\ g_{ji}^{-1} & i > j, \text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \end{cases}$$

wobei  $\epsilon$  das neutrale Element in  $F(M)$ . Sei

$$R := \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}; i < j < k, \text{co}(a_i, a_j, a_k) \in \mathcal{K}\}$$

und  $G := F(M)/\langle R \rangle$ . Dann gilt

$$G \cong \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$$

Beweis: Nach Satz 4.12 ist  $\Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ . Wir konstruieren zwei Homomorphismen  $\Theta : G \rightarrow \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ ,  $\Phi : \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow G$  und zeigen dann, dass  $\Theta \circ \Phi = \text{id}$ ,  $\Phi \circ \Theta = \text{id}$ .

- (i). Definition von  $\Theta$ : Wähle für jede Ecke  $a_r$  einen (festen) Kantenzug  $\beta_r$  in  $\mathcal{L}$  von  $a_0$  nach  $a_r$  (möglich, da  $\mathcal{L}$  wegzusammenhängend ist und alle Ecken von  $\mathcal{K}$  enthält). Definiere

$$\tilde{\Theta} : M \rightarrow \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0), g_{ij} \mapsto \tilde{\Theta}(g_{ij}) := [\beta_i(a_i a_j) \beta_j^{-1}]$$

$\bar{\Theta} : F(M) \rightarrow \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  sei der eindeutig bestimmte Homomorphismus, der  $\tilde{\Theta}$  fortsetzt (universelle Eigenschaft von  $F(M)$ ), d.h.  $\bar{\Theta}\varphi = \tilde{\Theta}$ . Zu zeigen:  $R \subseteq \ker \bar{\Theta}$ . Sei  $i < j < k$  mit  $\text{co}(a_i, a_j, a_k) \in \mathcal{K}$ , dann gilt

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & F(M) \\ \downarrow \tilde{\Theta} & \swarrow \exists! \bar{\Theta} & \downarrow \text{nat} \\ \tilde{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0) & \xleftarrow{\exists! \Theta} & G = F(M)/R \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}) &= [\beta_i a_i a_j \beta_j] \cdot [\beta_j a_j a_k \beta_k] \cdot [\beta_k a_k a_i \beta_i^{-1}] \\ &= [\beta_i a_i a_j a_k \beta_i^{-1}] = [a_0] \end{aligned}$$

Für (\*): Falls  $g_{ij} \in M$ , dann ist  $\overline{\Theta}(g_{ij}) = \tilde{\Theta}(g_{ij})$ . Falls  $\text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{L}$ , also  $g_{ij} = \epsilon$ , dann gilt

$$\overline{\Theta}(g_{ij}) = \overline{\Theta}(\epsilon) = [a_0] = [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}]$$

denn in  $\mathcal{L}$  sind nach Satz 4.12 alle Kantenwege äquivalent zu  $[a_0]$  (da  $\mathcal{L}$  kontrahierbar ist).

Also  $\langle R \rangle = \ker \text{nat} \subseteq \ker \overline{\Theta}$  und somit existiert ein eindeutiger Homomorphismus  $\Theta : G \rightarrow \overline{\Pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  mit  $\Theta \circ \text{nat} = \overline{\Theta}$ .

(ii). Definition von  $\Phi$ :

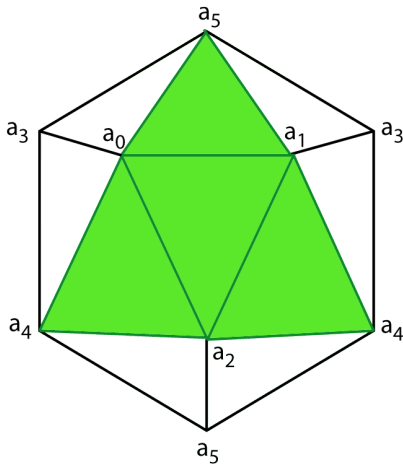
$$\Phi([a_0 a_{i_1} \dots a_{i_k} a_0]) := g_{0i_1} g_{i_1 i_2} \dots g_{i_k 0}$$

mit  $g_{ii} := \epsilon$ . Aufgabe 36:

- (1)  $\Phi$  ist wohldefiniert.
- (2)  $\Phi$  ist Gruppenhomomorphismus.
- (3)  $\Phi \circ \Theta = \text{id}$ ,  $\Theta \circ \Phi = \text{id}$

□

**Beispiel** (Reelle projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2$ )



Nach Definition ist  $M = \{g_{03}, g_{14}, g_{25}, g_{35}, g_{45}, g_{34}\}$  (Symbole zu Kanten in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ ),

$$\begin{aligned} R &= \{g_{03}g_{34} \underbrace{g_{04}^{-1}}_{\epsilon}, g_{03}g_{35} \underbrace{g_{05}^{-1}}_{\epsilon}, \underbrace{g_{13} g_{34} g_{14}^{-1}}_{\epsilon}, \\ &\quad g_{14}g_{45} \underbrace{g_{15}^{-1}}_{\epsilon}, \underbrace{g_{23} g_{35} g_{25}^{-1}}_{\epsilon}, \underbrace{g_{24} g_{45} g_{25}^{-1}}_{\epsilon}\} \\ &= \{g_{03}g_{34}, g_{03}g_{35}, g_{34}g_{14}^{-1}, g_{14}g_{45}, g_{35}g_{25}^{-1}, g_{45}g_{25}^{-1}\} \end{aligned}$$

(Dreiecke in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ ). Idee: Gilt  $e = uvv \in R$  für  $u, v \in F(M) \setminus \{x\}$ ,  $x \in M \cup M^{-1}$ , dann folgt  $x = u^{-1}v^{-1}$ . Nutze dies zur Verkleinerung des Erzeugendensystems:

$$\begin{aligned} g_{34} &= g_{03}^{-1} & g_{35} &= g_{03}^{-1} & g_{14} &= g_{34} = g_{03}^{-1} \\ g_{45} &= g_{14}^{-1} = g_{03} & g_{25} &= g_{35} = g_{03}^{-1} \end{aligned}$$

also bleibt nur ein erzeugendes Element übrig und die „Relation“  $g_{45}g_{25}^{-1} = g_{03}g_{03} = g_{03}^2$ . Damit  $G \cong F(g_{03}) / \langle g_{03}^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ , also  $\mathbb{Z}_2 \cong \Pi_1(\mathcal{K})$  nach Satz 4.14.

**Bemerkung** Für das Coprodukt (freies Produkt) von Gruppen schreiben wir auch  $G * H$  statt  $G \amalg H$  und fassen  $G, H$  als Untergruppen von  $G * H$  auf.

**4.15 Satz** (Seifert/van Kampen)

Seien  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  wegzusammenhängende simpliziale Komplexe und  $\mathcal{K} := \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N} := \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ . Sei  $a_0$  eine Ecke von  $\mathcal{N}$ . Seien  $\lambda : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ,  $\mu : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{M}|$  die Inklusionsabbildungen. Dann gilt

$$\Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong (\Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \Pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)) / \langle (\lambda_{\sharp} c) (\mu_{\sharp} c)^{-1}; c \in \Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \rangle$$

Beweis: Sei  $T_{\mathcal{N}}$  ein aufspannender Baum in  $\mathcal{N}$  und  $T_{\mathcal{M}} \supseteq T_{\mathcal{N}}$  ein aufspannender Baum in  $\mathcal{M}$  (analog für  $\mathcal{L}$ ). Dann ist  $T_{\mathcal{K}} := T_{\mathcal{M}} \cup T_{\mathcal{L}}$  ein aufspannender Baum in  $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  (wegen  $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$  können keine Zyklen entstehen) und

$$T_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{M} = T_{\mathcal{M}} \quad T_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{L} = T_{\mathcal{L}} \quad T_{\mathcal{L}} \cap T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{N}}$$

Ordne die Ecken von  $\mathcal{K}$ , dies induziert eine Ordnung der Ecken in  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ . Nach Satz 4.14:

$$\Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle$$



mit

$$M_{\mathcal{K}} := \{g_{ij}; i < j, \text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

$$R_{\mathcal{K}} := \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}; i < j < k, \text{co}(a_i, a_j, a_k) \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

(Analoge Definition für  $\mathcal{L}$  (Symbole  $f_{ij}$ ) und für  $\mathcal{M}$  (Symbole  $h_{ij}$ ).) Es gilt

$$\mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}} = (\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cup (M \setminus T_{\mathcal{M}}) \quad \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}} = (\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cap (M \setminus T_{\mathcal{M}})$$

und folglich

$$F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle \stackrel{(1)}{\cong} F(M_{\mathcal{L}} \cup M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \cup R_{\mathcal{M}} \cup D \rangle$$

$$\stackrel{(2)}{\cong} (\Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \Pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)) / \langle \tilde{D} \rangle$$

wobei

$$D := \{f_{ij}h_{ij}^{-1}; i < j, \text{co}(a_i, a_j) \in \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}\}$$

$$\tilde{D} := \{(\lambda_{\#}\Theta(g_{ij}))(\mu_{\#}\Theta(g_{ij}))^{-1}; g_{ij} \in M_{\mathcal{N}}\}$$

Begründung:

- (1) Es gilt  $M_{\mathcal{L}} \cap M_{\mathcal{M}} = \emptyset$  (verschiedene Symbole!).
- (2) Es gilt nach Satz 4.14:

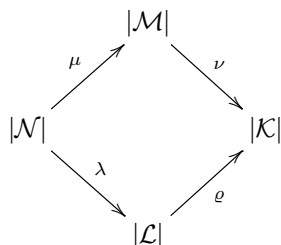
$$\Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{L}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \rangle \quad \Pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{M}} \rangle$$

und daher existiert  $\Theta : M_{\mathcal{N}} \rightarrow \Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$  wie in 4.14. Es gilt

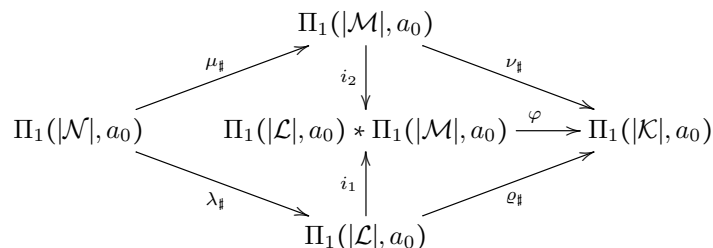
$$\langle \tilde{D} \rangle = \{(\lambda_{\#}c)(\mu_{\#}c)^{-1}; c \in \Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\}$$

□

**Bemerkung** (i). Situation in 4.15:



Dieses Diagramm induziert ein entsprechendes Diagramm von Gruppenhomomorphismen wobei  $\varphi$  der von  $\rho_{\#}, \nu_{\#}$  induzierte Gruppenhomomorphismus in das Coprodukt ist (in der



Formulierung des Satzes werden  $\Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0)$  und  $\Pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$  als Untergruppen des Coprodukts aufgefasst). Satz 4.15 sagt, dass  $\varphi$  surjektiv ist und

$$\ker \varphi = \{(\lambda_{\#}c)(\mu_{\#}c)^{-1}; c \in \Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\}$$

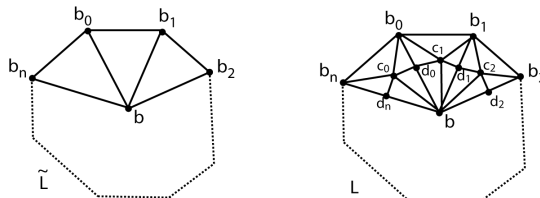
(ii). Es genügt in Satz 4.15 ein Erzeugendensystem  $E \subseteq \Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$  zu betrachten.

(iii). Spezialfall: Falls  $\mathcal{N}$  einfach zusammenhängend ist, dann gilt

$$\Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) = \Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \Pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$$

Ziel: Wir wollen 4.15 auf die Situation anwenden, dass eine Kreisscheibe entlang des Randes in einen topologischen Raum „eingeklebt“ wird.

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex und  $\alpha = a_0 \dots a_n a_0$  ( $n \geq 2$ ) eine Kantenschleife in  $\mathcal{K}$  mit  $a_i \neq a_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ),  $a_n \neq a_0$ .  $\alpha$  induziert eine simpliziale Abbildung der triangulierten Kreislinie in  $\mathcal{K}$ ,  $b_i \mapsto a_i$ . Dies ist der Rand eines  $(n+1)$ -Ecks.



Sei  $\mathcal{M}$  der „Rand“ von  $\tilde{\mathcal{L}}$  und  $\mathcal{L} := (\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{M})'$ . Sei  $\mathcal{N}$  der Komplex, der aus  $\mathcal{K} \cup \mathcal{L}$  durch Identifikation von  $b_i$  mit  $a_i$  entsteht. Damit werden die Kanten  $b_i b_{i+1}$  mit  $a_i a_{i+1}$  identifiziert (und  $b_n b_0$  mit  $a_n a_0$ ). Wie man sich überlegen kann, entstehen keine weiteren Identifikationen von Simplizes (da  $a_i \neq a_{i+1}$ ). Damit  $|\mathcal{N}| \cong |\mathcal{K}| \cup_f |\mathcal{L}|$  wobei  $f$  simpliziale Abbildung von  $|\mathcal{M}|$  nach  $|\mathcal{K}|$ .

#### 4.16 Satz

$$\Pi_1(|\mathcal{K} \cup_f \mathcal{L}|) \cong \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta([\alpha]) \rangle$$

Beweis: Wähle in  $\mathcal{L}$  ein Simplex  $\sigma = \text{co}(b_0, d_0, c_1)$ . Sei  $Y := |\mathcal{N}| \setminus \{\sigma\}$ . Nach Satz 4.15 erhält man

$$\Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \Pi_1(Y, a_0) * \Pi_1(|\sigma|, a_0) / \langle \tilde{D} \rangle$$

mit

$$\tilde{D} := \{(\lambda_{\#}(d))(\mu_{\#}(d))^{-1}; d \in \Pi_1(|\partial\sigma|, a_0)\}$$

wobei  $\lambda : |\partial\sigma| \rightarrow Y$ ,  $\mu : |\partial\sigma| \rightarrow |\sigma|$  Einbettungen sind und  $\partial\sigma$  der Randkomplex von  $\sigma$ . Wegen  $\Pi_1(|\sigma|, a_0) \cong \{e\}$  (triviale Gruppe) gilt  $\mu_{\#}(d) = e$  für alle  $d \in \Pi_1(|\partial\sigma|, a_0)$ ,

$$\Pi_1(|\partial\sigma|, a_0) \cong \mathbb{Z}$$

mit  $\Theta([\beta])$ ,  $\beta = b_0 c_0 d_1 b_0$  als erzeugendes Element ( $a_0 = b_0$  nach Identifikation), also

$$\Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \Pi_1(Y, a_0) / \langle \Theta([\beta]) \rangle$$

$\mathcal{L}$  ist konvex und damit ist die Zentralprojektion vom Schwerpunkt von  $\sigma$  auf  $|\mathcal{M}|$  eine (starke) Deformationsretraktion von  $|\mathcal{L}| \setminus \{\sigma\}$  auf  $|\mathcal{M}|$ . Diese kann zu einer Deformationsretraktion  $\varrho : Y \rightarrow |\mathcal{K}|$  fortgesetzt werden. Damit ist  $\varrho_{\#} : \Pi_1(Y, a_0) \rightarrow \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$  ein Isomorphismus und  $\varrho_{\#}(\Theta([\beta])) = \Theta([\alpha])$ . Also:

$$\Pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta([\alpha]) \rangle \quad \square$$

#### 4.17 Satz

Zu jeder endlich repräsentierten Gruppe  $G$ ,  $G \cong F(M) / \langle A \rangle$  gibt es einen 2-dimensionalen wegzusammenhängenden simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$  mit  $\Pi_1(|\mathcal{K}|) \cong G$ .

Beweis: Sei  $M = \{b_1, \dots, b_m\}$  und  $A = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq F(M)$ . Sei  $b_i = [uc_i d_i u]$ , dann ist

$$\Pi_1(|Y|) \cong \tilde{\Pi}_1(Y, u) \cong F(b_1, \dots, b_m)$$

Für jedes  $\beta_i$  klebe wie in Satz 4.16 ein Polygon (topologische Kreisscheibe) ein.  $\beta_i$  entspricht ein geschlossener Kantenzug, dessen aufeinanderfolgende Ecken verschieden sind. Dies ergibt einen simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$ . Nach Satz 4.16 ( $n$  mal angewendet) erhält man  $\Pi_1(|\mathcal{K}|, u) \cong G$ .  $\square$

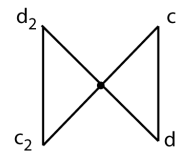
#### Beispiel

$G := F(a, b) / \langle a^3, b^4, (ab^2) \rangle$ , dann Kantenwege

$$a^3 \hat{=} \underbrace{uc_1d_1uc_1d_1uc_1d_1u}_a$$

$$b^4 \hat{=} \underbrace{uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2u}_b$$

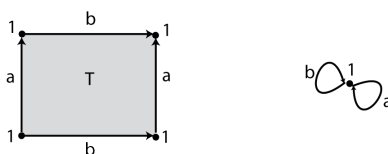
$$(ab)^2 \hat{=} uc_1d_1uc_2d_2uc_1d_1uc_2d_2u$$



#### 4.18 Folgerung

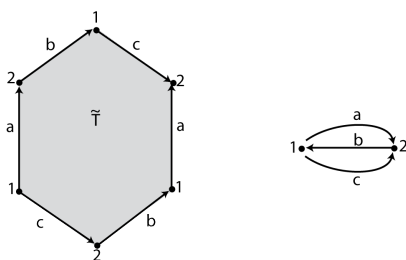
Nach Satz 4.12 hängt die Fundamentalgruppe eines simplizialen Komplexes nur von dessen 2-dimensionalen Skelett ab, d.h. gilt  $sk_2(\mathcal{K}) = sk_2(\mathcal{L})$  für simpliziale Komplexe  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ , dann ist  $\Pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \Pi_1(|\mathcal{L}|, a_0)$ .

**Beispiel** (i). Torus:



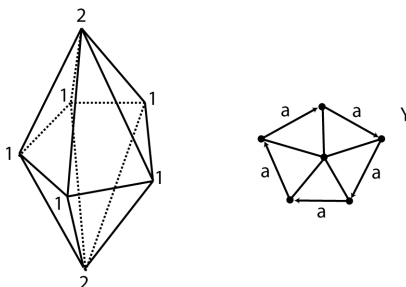
Es gilt  $\Pi_1(T) \cong F(a, b) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(ii). Mit natürlicher Eckenidentifikation:



dann  $\Pi_1(\tilde{T}) \cong F(a, b) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

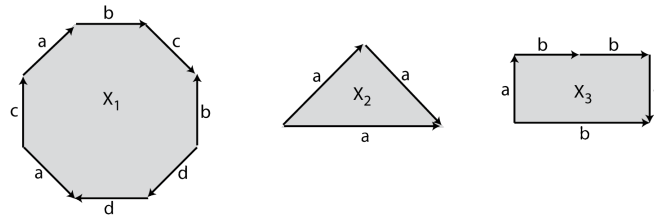
(iii). Linsenraum  $L(p, q)$ : Sei  $1 \leq q < p$ ,  $p \geq 3$  mit  $p, q$  teilerfremd. Sei  $X$  der topologische Raum, der aus einer Doppelpyramide (als Vollkörper) über dem regulären  $p$ -Eck entsteht durch Identifikation von jedem Dreieck auf der „Oberseite“ mit dem entsprechenden Dreieck auf der „Unterseite“ nach einer Drehung um  $2\pi \cdot \frac{q}{p}$  zusammen mit der induzierten Identifikation der Kanten und Ecken. Zum Beispiel  $L(5, 2)$ :



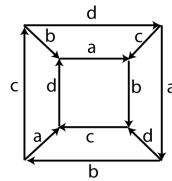
Betrachte eine Triangulierung  $\mathcal{K}$  von  $L(p, q)$ , die ein Simplex  $\sigma$  im Inneren der Doppelpyramide hat und  $x_0$  im Inneren von  $\sigma$ . Dann ist die Zentralprojektion von  $x_0$  auf den „Rand“ eine Deformationsretraktion. Sei  $Y$  die Oberfläche der Doppelpyramide nach der Identifikation. Also Deformationsretraktion  $L(p, q) \setminus \text{int } \sigma \rightarrow Y$ , also  $\Pi_1(L(p, q) \setminus \text{int } \sigma) \cong \Pi_1(Y)$  und

$$\Pi_1(L(p, q) \setminus \text{int } \sigma) \cong \Pi_1(Y) \cong F(a) / \langle a^p \rangle \cong \mathbb{Z}_p$$

**Beispiel** (Aufgabe 37, 4P) Bestimmen Sie  $\Pi_i(X_i)$  jeweils mit der natürlichen Identifikation der Ecken, wobei



**Beispiel** (Aufgabe 38) Sei  $X$  der Raum, der entsteht, wenn man beim 3-dimensionalen Würfel Paare gegenüberliegender Seiten nach einer Drehung um  $90^\circ$  miteinander identifiziert, mit der induzierten Identifikation der Ecken und Kanten:



- (i). Bestimmen Sie  $\Pi_1(X)$  als Gruppe durch Erzeugende und Relationen (möglichst vereinfachen mit weniger Erzeugenden). (3 Punkte)
- (ii). Zeichnen Sie das Cayley-Diagramm der Gruppe. Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe.

# 5

## Klassifikation der 2-dim. Mannigfaltigkeiten

### 5.0 Satz

Jede 2-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

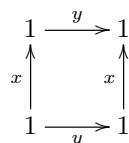
### 5.1 Lemma

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex so, dass  $|\mathcal{K}|$  eine zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit ist. Dann ist  $|\mathcal{K}|$  homöomorph zu einem Polygon in  $\mathbb{R}^2$  mit  $2n$  Kanten (für ein  $n \geq 2$ ), dessen Kanten in Paaren identifiziert werden (mit der induzierten Identifikation der Ecken). Umgekehrt ist ein Polygon mit paarweise identifizierten Kanten und induzierter Identifikation der Ecken eine 2-Mannigfaltigkeit.

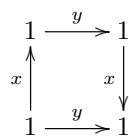
Beweis: Übung. □

Ordne jedem solchen  $2n$ -Eck mit paarweise identifizierten Kanten ein Wort zu wobei die Buchstaben die Kantenwege und formale Inversen sind (Element der freien Gruppe mit  $n$  Erzeugenden). Durchlauf des Randes in festem Umlaufsinn.

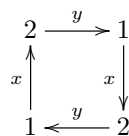
**Beispiel** (i). Torus ( $xyx^{-1}y^{-1}$ )



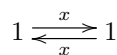
(ii). kleinsche Fläche ( $xyxy^{-1}$ )



(iii). projektive Ebene ( $xyxy$ )



(iv).  $\mathbb{R}P^2$  ( $xx$ )



Auch zugelassen:  $xx^{-1}$

$$1 \stackrel{x}{\longleftarrow} \stackrel{x}{\longrightarrow} 1$$

(Kugeloberfläche  $S^2$ ).

Solche Worte sollen zulässig heißen.

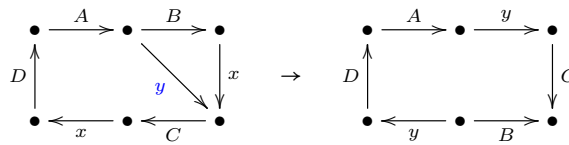
Ziel: Durch Zerschneiden und Zusammensetzen des Polygons soll gezeigt werden, dass man stets zu einem Wort in einer der beiden folgenden Normalformen kommen kann:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \quad (n \geq 1)$$

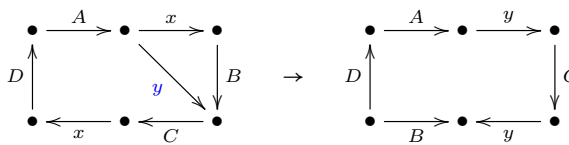
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} \quad (m \geq 1)$$

Regeln:

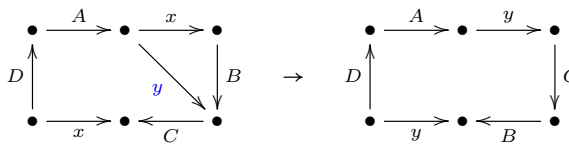
(1a)  $AB \overset{\downarrow}{x} CxD \rightarrow AxCB^{-1}xD$



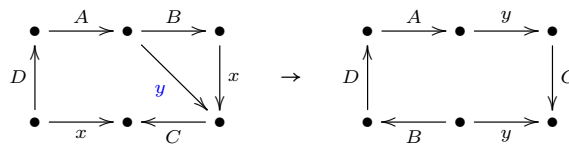
(1b)  $A \overset{\downarrow}{x} BCxD \rightarrow AxCB^{-1}D$



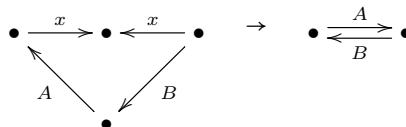
(2a)  $A \overset{\downarrow}{x} BCx^{-1}D \rightarrow AxCBx^{-1}D$



(2b)  $AB \overset{\downarrow}{x} Cx^{-1}D \rightarrow AxCx^{-1}BD$



(3) Für  $AB \neq \square : Ax x^{-1} B \rightarrow AB$



Schritte zum Erzeugen der Normalform:

- (1) Bringe das Wort auf die Form  $RS$  wobei  $R$  von der Form  $x_1x_1x_2x_2\dots x_kx_k$  ist und  $S$  nur inverse Paare enthält (d.h. jeder Buchstabe in  $S$  kommt 1 Mal als  $x$  und 1 Mal als  $x^{-1}$  vor). Dazu rekursiv Regel 1 anwenden: Annahme  $A$  ist von der Form  $x_1x_1\dots x_kx_k$  und maximal. Dann

$$AB \overset{\downarrow}{x} CxD \xrightarrow{1a} A \overset{\downarrow}{x} CB^{-1}xD \xrightarrow{1b} Axx(CB^{-1})^{-1}D$$

Damit ein weiteres gleichartiges Paar „nach vorn“ gebracht.

- (2) Bringe  $R, S$  auf die Form  $RTU$  wobei  $T$  von der Form  $y_1z_1^{-1}y_1^{-1}z_1^{-1}\dots y_mz_my_m^{-1}z_m^{-1}$  ist (also nur verschlungene inverse Paare enthält) und  $U$  nur unverschlungene inverse Paare enthält. Sei  $A$  schon von der gewünschten Form (wie  $RT$ ) und maximal. Dann

$$\begin{aligned} AB \overset{\downarrow}{a} CbDa^{-1}Eb^{-1}F &\xrightarrow{2b} AaC \overset{\downarrow}{b} Da^{-1}BEb^{-1}F \\ &\xrightarrow{2a} A \overset{\downarrow}{a} CbBEDa^{-1}b^{-1}F \\ &\xrightarrow{2a} AaBEDC \overset{\downarrow}{b} a^{-1}b^{-1}F \\ &\xrightarrow{2b} Aaba^{-1}b^{-1}BEDCF \end{aligned}$$

Damit ein weiteres verschlungenes inverses Paar „nach vorn“ gebracht. Rekursiv fortfahren, bis es hinten keine verschlungenen inversen Paare mehr gibt. Beachte, dass keine gleichartigen Paare entstehen können.

- (3) Falls  $RT = \square$  bringe das Wort auf die Form  $xx^{-1}$ , anderenfalls kann  $U$  weggelassen werden.  $U$  besteht aus unverschlungenen inversen Paaren. Sei  $\dots x \dots x^{-1} \dots$  ein solches Paar, welches am engsten zusammen ist (Abstand: Anzahl der Buchstaben dazwischen). Dann kann kein Buchstabe dazwischen stehen, denn: Falls  $y, y^{-1}$  dazwischen sind, wären  $\dots y \dots y^{-1}$  enger zusammen; falls von  $y, y^{-1}$  nur ein Buchstabe dazwischen steht, bildet dies ein verschlungenes Paar. Also von der Form

$$U_1xx^{-1}U_2 \xrightarrow{3} U_1U_2$$

für  $U_1U_2 \neq \square$ . Iterieren bis  $U$  verschwunden ist (falls  $RT \neq \square$ ) bzw.  $U = xx^{-1}$  (falls  $RT = \square$ ).

- (4) Falls  $R = \square$  ist  $T$  von der gewünschten Form. Falls  $R \neq \square$  bringe  $RT$  auf die Form  $x_1x_2\dots x_\ell x_\ell$ , d.h. führe die verschlungenen inversen Paare in gleichwertige Paare über.

$$\begin{aligned} Ax \overset{\downarrow}{x} aba^{-1}b^{-1}B &\xrightarrow{1b} Axb^{-1}a^{-1}xa^{-1} \overset{\downarrow}{b} b^{-1}B \\ &\xrightarrow{1a} Axxa^{-1} \overset{\downarrow}{a} b^{-1}b^{-1}B \\ &\xrightarrow{1a} Axxaab^{-1}b^{-1}B \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit homöomorph zu eine der folgenden Normalformen ist:

- (i).  $N_h$  beschrieben durch  $a_1a_1a_2a_2\dots a_ha_h$  mit  $h \geq 1$ .
- (ii).  $M_g$  beschrieben durch  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$  mit  $g \geq 1$
- (iii).  $M_0$

**Definition** Sei  $G$  ein Gruppe. Dann bezeichne  $K(G) := \langle \{aba^{-1}b^{-1}; a, b \in G\} \rangle$ . Offensichtlich ist  $K(G)$  der kleinste Normalteiler, sodass  $G/K(G)$  abelsch ist.  $G/K(G)$  heißt Kommutatorfaktorgruppe von  $G$ .

Fundamentalgruppen der Normalformen:

- (i).  $\Pi_1(M_0) \cong \Pi_1(S^2) \cong \{e\}$  triviale Gruppe. (Tetraeder ist kontrahierbarer Unterkomplex, der alle Kanten enthält, also 0 Erzeugende, also Fundamentalgruppe trivial.)

- (ii).  $\Pi_1(N_h) \cong F(a_1, \dots, a_h) / \langle a_1 a_1 \dots a_k a_k \rangle$ . Weiterhin  $\Pi_1(N_h) / K(\Pi_1(N_h)) \cong \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$ , denn in der freien abelschen Gruppe mit Basis  $a_1, \dots, a_h$  können wir auch die Basis  $a_1, \dots, a_{h-1}, a_1 + \dots + a_h =: \tilde{a}_h$  wählen (fasse Gruppenoperation additiv auf). Die Relation  $0 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_h = 2\tilde{a}_h$  zeigt, dass wir  $\mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$  erhalten.
- (iii).  $\Pi_1(M_g) \cong F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ . Damit  $\Pi_1(M_g) / K(\Pi_1(M_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ , da  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e$  in einer abelschen Gruppe stets gilt.

### Folgerung

Die 2-Mannigfaltigkeiten  $M_g$  für  $g \geq 0$  und  $N_h$  für  $h \geq 1$  haben paarweise nicht isomorphe Fundamentalgruppen und sind somit nicht homotopieäquivalent, insbesondere nicht paarweise homöomorph.

### 5.2 Satz

Jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu genau einer der 2-Mannigfaltigkeiten  $M_g$  ( $g \geq 0$ ) oder  $N_h$  ( $h \geq 1$ ). Diese sind paarweise nicht homotopieäquivalent.

### Folgerung

Seien  $M, N$  zwei geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:

$$\Pi_1(M) \cong \Pi_1(N) \Leftrightarrow M \simeq N \Leftrightarrow M \cong N$$

**Bemerkung** Bezeichne  $f_0$  die Anzahl der Ecken,  $f_1$  die Anzahl der Kanten und  $f_2$  die Anzahl der Flächen (Polygone) nach der Identifikation. Dann gilt

$$\chi(X) := f_0 - f_1 + f_2$$

ist nur vom Raum abhängig, aber nicht von der Zerlegung.  $\chi$  heißt Euler-Charakteristik von  $X$ .

Beweisskizze: Die folgenden Operationen und ihre Inversen verändern nichts an der Euler-Charakteristik:

- (1) Einfügen einer Ecke auf einer Kante ( $f_0 \rightarrow f_0 + 1, f_1 \rightarrow f_1 + 1$ )
- (2) Unterteilen eines Polygons durch Einfügen einer Kante zwischen zwei Ecken ( $f_1 \rightarrow f_1 + 1, f_2 \rightarrow f_2 + 1$ )

Verallgemeinerung: Endliche CW-Räume.

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

- (i). Ein in Zellen zerlegter Raum  $X$  ist ein topologischer Raum zusammen mit einer Menge  $\mathcal{Z}$  von Unterräumen, sodass gilt
  - (1) Jedes Element aus  $\mathcal{Z}$  ist homöomorph zu einer offenen Kugel (beliebiger Dimension).
  - (2)  $X = \bigcup \mathcal{Z}$
- (ii). Das  $n$ -dimensionale Gerüst von  $X$  ist  $X^n := \bigcup \{e \in \mathcal{Z}; \dim e \leq n\}$ .
- (iii).  $e \subseteq X$  heißt  $n$ -Zelle  $:\Leftrightarrow e \cong B^n$
- (iv). Sei  $X$  ein in Zellen zerlegter Raum und  $e \subseteq X$  eine  $n$ -Zelle. Eine stetige Abbildung  $F : B[0, 1]^n \rightarrow X$  heißt eine charakteristische Abbildung von  $e : \Leftrightarrow F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}, F|_{B^n}^e$  ist ein Homöomorphismus.  $F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  nennt man Klebeabbildung von  $e$ .

**Bemerkung** Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum. Dann gilt  $\bar{e} = F(B[0, 1]^n) \subseteq X^{n-1} \cup e$  und  $\bar{e} \setminus e = F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ .  $F : B[0, 1]^n \rightarrow \bar{e}$  ist identifizierend ( $\bar{e}$  trägt die finale Topologie bzgl.  $F$ ).

**Definition** (i). Ein CW-Raum ist ein in Zellen zerlegter Hausdorff-Raum  $X$ , sodass jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  eine charakteristische Abbildung besitzt und

- (c) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  gilt:  $\bar{e}$  trifft nur endlich viele Zellen.



(w) Wenn  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen in  $\bar{e}$  für alle  $e \in \mathcal{Z}$ , dann ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ .

(ii). Sei  $X$  ein CW-Raum. Falls  $X = X^n$ ,  $X \neq X^{n-1}$ , dann heißt  $X$   $n$ -dimensional (Notation:  $\dim X = n$ ).  $\dim X := \infty$ , falls es kein solches  $n$  gibt.

(iii).  $X$  heißt endlicher CW-Raum, falls  $\mathcal{Z}$  endlich ist.

**Bemerkung** Falls  $X$  ein endlicher CW-Raum ist, dann sind (c), (w) automatisch erfüllt.

### 5.3 Satz

Seien  $X, Y$  endliche CW-Räume. Dann bezeichne  $f_i(X)$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Zellen von  $X$ ,

$$\chi(X) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot f_i(X)$$

die Euler-Charakteristik von  $X$ . Dann gilt

$$|X| \simeq |Y| \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y)$$

d.h. die Euler-Charakteristik ist eine Invariante bzgl. der Homotopieäquivalenz.

Beweis: Ohne Beweis, schwer. □

Ziel: Klassifikation der kompakten zusammenhängenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten:  
Jede solche Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu genau eine der folgenden Typen

$$M_{g,r}$$

$$N_{h,r}$$

Dabei ist  $M_{g,r}$  homöomorph zu  $M_g$  aus dem  $r$  2-Zellen  $e_1, \dots, e_r$ ,  $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , entfernt worden sind. Analog für  $N_{h,r}$ . Diese sind paarweise nicht homöomorph. Es gilt:

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= 1 - 2g + 1 = 2 - 2g & \Rightarrow \chi(M_{g,r}) &= 2 - 2g - r \\ \chi(N_h) &= 1 - h + 1 = 2 - h & \Rightarrow \chi(N_{h,r}) &= 2 - h - r \end{aligned}$$

Orientierbarkeit: Sei  $M$  eine 2-Mannigfaltigkeit, die über ein Polygon mit Kantenidentifikation gegeben ist. Dann gilt: Falls mindestens eine Kanten zwei Mal als  $x$  auftritt (also in derselben Orientierung), dann gilt  $M \cong N_{h,r}$  für ein  $h, r$ , anderenfalls  $M \cong M_{g,r}$  für ein  $g, r$ .  $r$  ist dabei die Anzahl der Komponenten des Mannigfaltigkeitenrandes (betrachte alle Knoten, die nicht 2 Mal auftreten und beachte Eckenidentifikation).

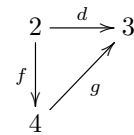
### Beispiel

$${}_1 a_1 b_2 a_1^{-1} c_2^{-1} d_3 e_1 b_2 f_4 g_3 e_1$$

(Die Zahlen sind bereits die identifizierten Ecken.) Da  $e$  2 Mal in derselben Orientierung auftaucht, ist die Mannigfaltigkeit nicht orientierbar, d.h.  $M \cong N_{h,r}$ . Es gilt

$$\chi = 4 - 7 + 1 = -2 \stackrel{!}{=} 2 - h - r$$

Wegen  $r = 1$  folgt  $h = 3$ , also  $M \cong N_{3,1}$ .



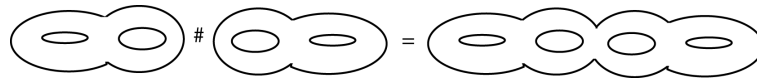
### 5.4 Folgerung

Zwei (möglicherweise berandete) zusammenhängende kompakte 2-Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn beide

- (i). orientierbar oder nicht orientierbar sind
- (ii). dieselbe Euler-Charakteristik und Anzahl von Randkomponenten haben.

**Definition** Seien  $A_1, A_2$  zwei zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten. Dann bezeichne  $A_1 \# A_2$  die Mannigfaltigkeit, die entsteht, indem aus  $A_1$  und  $A_2$  eine offene 2-Zelle entfernt wird und anschließend  $A_1, A_2$  durch einen Homöomorphismus der entstehenden Ränder verklebt werden.

**Beispiel**

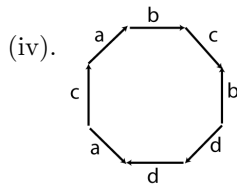


**Beispiel (Aufgabe 40 (2 Punkte))** Bestimmen Sie, um welche geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten es sich handelt:

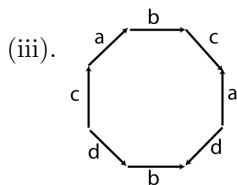
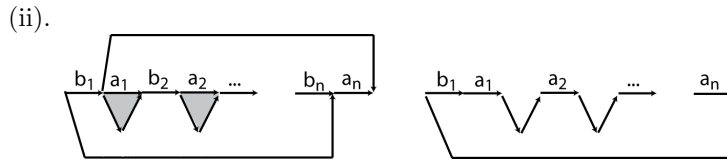
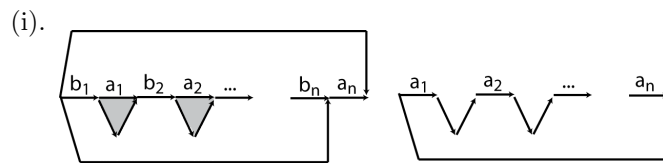
(i).  $M_{g_1} \# M_{g_2}$

(ii).  $M_g \# N_h$

(iii).  $N_{h_1} \# N_{h_2}$



**Beispiel (Aufgabe 41 (4 Punkte))** Bestimmen Sie, von welchem Typ die folgenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten sind (dabei werden unbezeichnete Kanten nicht identifiziert, die grauen Flächen sind Löcher):



# 6

## Homologiegruppen

- Definition** (i). Für  $n \geq 0$  bezeichne  $\Delta_n := \text{co}(a_0, \dots, a_n)$  den „Standardsimplex“ wobei  $a_0 := 0$  und  $a_i := e_i$  für  $i \geq 1$  ( $i$ -ter Standardbasisvektor des  $\mathbb{R}^n$ ). Für  $m > n$  wird  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$  aufgefasst.
- (ii). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein singuläres  $n$ -Simplex ist eine stetige Abbildung  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$ .
- (iii). Sei  $M$  eine Menge und  $Z^{(M)} := \text{FAb}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in M\} \subseteq \mathbb{Z}^M$ . Sie heißt die freie abelsche Gruppe. Wir fassen  $M$  als Teilmenge von  $\text{FAb}(M)$  auf, in dem wir  $x \in M$  mit

$$f_x : M \rightarrow \mathbb{Z}, y \mapsto \begin{cases} 0 & y \neq x \\ 1 & y = x \end{cases} = \delta_{xy}$$

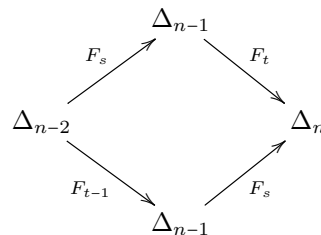
identifizieren.

- (iv). Die  $n$ -te singuläre Kettengruppe von  $X$  ist definiert durch  $S_n(X) := \text{FAb}(\{\lambda : \Delta_n \rightarrow X; \lambda \text{ stetig}\})$  für  $n \geq 0$ ,  $S_n := 0$  für  $n < 0$ .
- (v). Die  $r$ -te Seitenabbildung  $F^r : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  ist eine simpliziale Abbildung wobei

$$F^r(a_i) := \begin{cases} a_i & i \leq r-1 \\ a_{i+1} & i \geq r \end{cases}$$

$F^r$  ist ein singuläres  $(n-1)$ -Simplex in  $\Delta_n$ . Bezeichnung: Falls  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex ist, dann bezeichne  $(x_0, \dots, x_n)$  die eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung  $\varphi : \Delta_n \rightarrow \mathcal{K}$ ,  $\varphi(a_i) := x_i$ . Also  $F^r = (a_0, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_n) =: (a_0, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n)$ .

**Bemerkung** Für  $s < t$  gilt  $F^t F^s = F^s F^{t-1} = (a_0, \dots, \hat{a}_s, \dots, \hat{a}_t, \dots, a_n)$ ,



**Definition** Sei  $n \geq 1$  und  $X$  ein topologischer Raum. Dann bezeichne  $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus mit

$$\partial_n(\lambda) := \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot \lambda \circ F^r$$

für alle singulären  $n$ -Simplizes  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$ .  $\partial$  heißt Randabbildung.

### 6.1 Proposition

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $\partial^2 = 0$ , genauer  $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ .

Beweis: Für  $n < 2$  ist die Aussage trivial. Für  $n \geq 2$ : Es genügt die Behauptung für die singulären  $n$ -Simplizes zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial^2(\lambda) &= \partial \left( \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot \lambda \circ F^r \right) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^n (-1)^{r+s} \lambda \circ F^r \circ F^s \\ &= \sum_{0 \leq s < r \leq n} (-1)^{r+s} \cdot \lambda \circ F^s \circ F^{r-1} + \sum_{0 \leq r \leq s \leq n-1} (-1)^{r+s} \cdot \lambda \circ F^r \circ F^s \end{aligned}$$

Für  $0 \leq i < j \leq n$  kommt der Term  $\lambda \circ F^i \circ F^j$  in der 1. Summe mit Koeffizient  $(-1)^{i+j+1}$  vor und in der 2. Summe mit  $(-1)^{i+j}$ , also „=“ 0.  $\square$

**Definition** (i). Sei  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von abelschen Gruppen. Dann ist die direkte Summe  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  definiert als

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} A_i &:= \left\{ \varphi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i; \forall i \in I : \varphi(i) \in A_i, \varphi(i) = 0 \text{ bis auf endlich viele } i \in I \right\} \\ &\subseteq \prod_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

(ii). Ein Kettenkomplex  $C$  ist eine Familie  $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von abelschen Gruppen zusammen mit Homomorphismen  $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$  mit  $\partial_{i-1}\partial_i = 0$ .

**Bemerkung** Wir betrachten  $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$  und  $\partial : C \rightarrow C$  Homomorphismus mit  $\partial(x_i) := \partial_i(x_i)$  für  $x_i \in C_i$ , also  $\partial \circ \partial = 0$  und  $\partial(C_n) \subseteq C_{n-1}$  wobei  $C_n$  als Untergruppe von  $C$  aufgefasst wird.

**Definition** Sei  $C$  ein Kettenkomplex. Dann heißt  $B_n(C) := \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n$  Gruppe der  $n$ -Ränder,  $Z_n(C) := \ker(\partial_n) \subseteq C_n$  Gruppe der  $n$ -Zyklen. Sei  $H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$  die  $n$ -te Homologiegruppe von  $C$ .

**Bemerkung** (i). Offenbar gilt  $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$ .

(ii). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X) \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \rightarrow \dots$  Kettenkomplex  $S(X)$ . Sei  $H_n(X) := H_n(S(X))$  die  $n$ -te Homologiegruppe von  $C$ .

**Definition** Sei  $(X, Y)$  ein Paar von topologischen Räumen, d.h.  $Y \subseteq X$  ist ein Unterraum. Dann ist der relative singuläre Kettenkomplex  $S(X, Y)$  definiert durch  $S_n(X, Y) := S_n(X)/S_n(Y)$  wobei  $S_n(X) \supseteq S_n(Y)$  in natürlicher Weise aufgefasst wird: Fasse jedes singuläre  $n$ -Simplex von  $Y$  als singuläres  $n$ -Simplex in  $X$  auf,  $\lambda : \Delta_n \rightarrow Y$  wird  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$  zugeordnet (Komposition mit Inklusionsabbildung  $Y \hookrightarrow X$ ).

$\partial_n : S_n(X, Y) \rightarrow S_{n-1}(X, Y)$  ist der durch  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  induzierte Homomorphismus, der wegen  $\partial(S_n(Y)) \subseteq S_{n-1}(Y)$  existiert.

**Bemerkung** Nach Definition gilt:  $\partial^2 : S_n(X, Y) \rightarrow S_{n-2}(X, Y)$  ist die Nullabbildung.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & S_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-2}(Y) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & S_n(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-2}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & S_n(X, Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X, Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-2}(X, Y) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Beispiel** Sei  $X \neq \emptyset$  ein topologischer Raum mit  $m$  Wegzusammenhangskomponenten. Wegen  $S_{-1}(X) = 0$  ist

$$Z_0(X) = \ker(\partial_0 : S_0(X) \rightarrow S_{-1}(X)) = S_0(X)$$

Als Erzeugendensystem von  $S_0(X)$  können wir die Punkte in  $X$  nehmen (identifizieren  $\lambda : \Delta_0 = \{0\} \rightarrow X$  mit  $\lambda(0)$ ). In  $S_1(X)$  sind das Erzeugendensystem die Wege  $\lambda : \Delta_1 \rightarrow X$ ,

$$\partial(\lambda) : \Delta_0 \rightarrow X, \partial(\lambda)(0) = \lambda \cdot F^0(0) - \lambda \cdot F^1(0) = \lambda(1) - \lambda(0)$$

daher

$$\begin{aligned} B_0(X) &= \partial(S_1(X)) = \langle \{b - a; a, b \in X, \exists \text{Weg von } a \text{ nach } b\} \rangle \\ Z_0(X) &= S_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x\} \\ \Rightarrow B_0(X) &= \{f : X \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \\ &\quad \sum_{x \in K_i} f(x) = 0 \text{ für jede Wegkomponente } K_i \text{ von } X\} \end{aligned}$$

also  $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \cong \mathbb{Z}^m$ .

**Beispiel** Sei  $P = \{p\}$  einpunktiger Raum. Dann gilt  $S_n(P) \cong \mathbb{Z}$  für  $n \geq 0$ , wird erzeugt von der einzigen Abbildung  $\lambda_n : \Delta_n \rightarrow \{p\}$ . Für  $\partial : S_n(P) \rightarrow S_{n-1}(P)$  gilt

$$\partial(\lambda_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \lambda_n \circ F^i = \lambda_{n-1} \cdot \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) = \begin{cases} \lambda_{n-1} & n = 1 \pmod{2} \\ 0 & n = 0 \pmod{2} \end{cases}$$

also für

- (i).  $n \geq 2$  gerade:  $Z_n(P) = 0 \Rightarrow H_n(P) = 0$
- (ii).  $n \geq 1$  ungerade:  $B_n(P) = Z_n(P) = S_n(p) = \mathbb{Z} \Rightarrow H_n(P) = 0$
- (iii).  $n = 0$ :  $Z_0(P) \cong \mathbb{Z}, B_0(P) = 0; H_0(P) \cong \mathbb{Z}$
- (iv).  $n < 1$ :  $Z_n(P) = 0 \Rightarrow H_n(P) = 0$

damit  $H_n(P) \cong 0$  für  $n \neq 0, H_0(P) \cong \mathbb{Z}$ .

**Definition** Seien  $C, D$  Kettenkomplexe. Eine Kettenabbildung  $\varphi : C \rightarrow D$  ist ein Homomorphismus  $\varphi : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} D_n$  mit  $\varphi(C_n) \subseteq D_n$  und  $\varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi$ , d.h.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\ & & \varphi_{n+1} \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \varphi_{n-1} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \end{array}$$

## 6.2 Proposition

Eine Kettenabbildung  $\varphi : C \rightarrow D$  induziert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Homomorphismus  $\varphi_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ . Es gilt:

- (i).  $(id_C)_* : H_n(C) \rightarrow H_n(C)$  ist die Identität.
- (ii).  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$  für eine Kettenabbildung  $\psi : D \rightarrow E$

Beweis: Wegen  $\varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi$  ist klar, dass

$$\varphi(B_n(C)) = \varphi(\partial(C_{n+1})) = \partial(\varphi(C_{n+1})) \subseteq \partial(D_{n+1}) = B_n(D)$$

Für  $x \in Z_n(C)$  ist  $\partial x = 0$ , also  $(\partial \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \partial)(x) = 0$  und somit  $\varphi(x) = 0$ , also  $\varphi(x) \in Z_n(D)$ , d.h.  $\varphi(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$ . Homomorphiesatz:  $\varphi$  induziert einen Homomorphismus  $\varphi_* : Z_n(C)/B_n(C) \rightarrow Z_n(D)/B_n(D)$ . Rest ist klar.  $\square$

### 6.3 Proposition

Sei  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  eine stetige Abbildung von Paaren. Dann induziert  $f$  eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X, Y) \rightarrow S(A, B)$  mit Homomorphismen  $(f_\bullet)_* =: f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(A, B)$ . Es gilt:

- (i).  $\text{id}_\bullet = \text{id}$ ,  $\text{id}_* = \text{id}$
- (ii).  $(f \circ g)_\bullet = f_\bullet \circ g_\bullet$ ,  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  für  $g : (U, V) \rightarrow (X, Y)$  stetige Abbildung von Raumpaaren.

Beweis: Sei  $f_\bullet : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  definiert durch  $f_\bullet(\lambda) := f \circ \lambda$  für  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$  stetig. Dies definiert eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X) \rightarrow S(Y)$  mit  $f_\bullet(S(Y)) \subseteq S(B)$ , also auch eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X, Y) \rightarrow S(A, B)$ . Rest ist klar. (Eigenschaften von  $*$  folgen aus Proposition 6.2.)  $\square$

**Definition** Seien  $C, D$  Kettenkomplexe und  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  eine Kettenabbildungen. Eine Kettenhomotopie  $h$  zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  ist ein Homomorphismus  $h : C \rightarrow D$ , sodass

$$h(C_n) \subseteq D_{n+1} \quad \forall c \in C : \varphi(c) - \psi(c) = \partial h(c) + h\partial(c)$$

$\varphi$  und  $\psi$  heißen kettenhomotop genau dann, wenn eine Kettenhomotopie zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  existiert. Notation:  $\varphi \simeq \psi$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
 & & \uparrow \psi & \searrow h & \uparrow \psi & \searrow h & \uparrow \psi & \searrow h & \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \\
 \dots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots
 \end{array}$$

### 6.4 Proposition

Seien  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  Kettenabbildungen.

- (i).  $\varphi \simeq \psi \Rightarrow \varphi_* \simeq \psi_*$
- (ii). Falls  $\beta : D \rightarrow E$ ,  $\alpha : B \rightarrow C$  Kettenabbildungen sind und  $h$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\varphi$  und  $\psi$ , dann ist  $h \circ \alpha$  ( $h \circ \beta$ ) eine Kettenhomotopie zwischen  $\varphi \circ \alpha$  und  $\psi \circ \alpha$  ( $\beta \circ \varphi$  und  $\beta \circ \psi$ ).

Beweis: (i). Sei  $[z] \in H_n(C)$  wobei  $z \in Z_n(C)$  und  $\varphi_*([z]) = [\varphi(z)]$ , also

$$\varphi(z) - \psi(z) - \partial h(z) + h \underbrace{\partial(z)}_{0 (z \in Z_n(C))} = \partial h(z)$$

und somit  $[\varphi(z)] - [\psi(z)] = [\partial h(z)] = 0$ .

(ii). Es gilt

$$\varphi \circ \alpha(c) - \psi \circ \alpha(c) = \partial h\alpha(c) - h\partial\alpha(c) = \partial h\alpha(c) + h\alpha\partial(c)$$

und  $h\alpha(B_n) \subseteq D_{n+1}$ . Rest ist klar.  $\square$

### 6.5 Lemma

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $i_0 : X \rightarrow X \times [0, 1]$ ,  $i_1 : X \rightarrow X \times [0, 1]$  mit  $i_0(x) := (x, 0)$ ,  $i_1(x) := (x, 1)$ . Dann gibt es eine Kettenhomotopie  $h : S(X) \rightarrow h(X \times [0, 1])$  zwischen  $(i_0)_\bullet$  und  $(i_1)_\bullet$ , sodass für alle stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  gilt:

$$(h \circ f)_\bullet = (f \times \text{id})_\bullet \circ h$$

Ohne Beweis.

### 6.6 Satz (Homotopieinvarianz)

Seien  $f, g : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  stetig mit  $f \simeq g$ . dann  $f_* = g_*$ .

Beweis: Die Kettenhomotopie  $h : S(X) \rightarrow S(X \times [0, 1])$  aus Lemma 6.5 induziert eine Kettenhomotopie  $\bar{h} : S(X, Y) \rightarrow S(X \times [0, 1], Y \times [0, 1])$ , da  $h(S(Y)) \subseteq S(Y \times [0, 1])$  (Wähle in 6.5 für  $f$  die Einbettung  $Y \hookrightarrow X$ ). Sei  $G : (X \times [0, 1], Y \times [0, 1]) \rightarrow (A, B)$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Es folgt, dass  $G \circ \bar{h}$  eine Kettenhomotopie zwischen  $G_\bullet \circ (i_0)_\bullet = f_\bullet$  und  $G_\bullet \circ (i_1)_\bullet = g_\bullet$  ist, also  $f_* = g_*$  nach Proposition 6.4.  $\square$

### 6.7 Korollar

$$(X, Y) \simeq (A, B) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : H_n(X, Y) \simeq H_n(A, B)$$

Beweis: Wegen  $(X, Y) \simeq (A, B)$  gibt es  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$ ,  $g : (A, B) \rightarrow (X, Y)$ , sodass  $f \circ g \simeq \text{id}$ ,  $g \circ f \simeq \text{id}$ . Nach Satz 6.6 gilt

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id} \qquad f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{id}$$

**Definition** (i). Zwei Ketten  $\alpha, \beta \in C_n$  heißen homolog  $:\Leftrightarrow \alpha - \beta \in \partial_{n+1}(C_{n+1})$ .

(ii). Zwei Zyklen  $c_1, c_2 \in Z_n(C)$  heißen homolog  $:\Leftrightarrow [c_1] = [c_2]$  in  $H_n(C)$ .

(iii). Eine Sequenz von abelschen Gruppen ist eine Folge von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Sie heißt exakt an der Stelle  $C_n$ , falls  $f_{n+1}(C_{n+1}) = \ker f_n$ . Sie heißt exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

(iv). Eine kurze exakte Sequenz ist eine der Form  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , d.h.  $g$  ist surjektiv und  $f$  injektiv.

### 6.8 Satz (Fünferlemma)

Es sei ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen gegeben. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & A_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

(i). Falls  $f_1$  surjektiv und  $f_2, f_4$  injektiv sind, ist  $f_3$  injektiv.

(ii). Falls  $f_5$  injektiv und  $f_2, f_4$  surjektiv sind, ist  $f_3$  surjektiv.

Insbesondere: Sind  $f_1, f_2, f_4, f_5$  Isomorphismen, dann ist  $f_3$  ein Isomorphismus.

Beweis: („Diagrammjagd“)

(i). Zu zeigen:  $\ker f_3 = 0$ . Aus  $f_3(a_3) = 0$  folgt  $0 = \psi_3 f_3(a_3) = f_4 \varphi_3(a_3)$ , also  $\varphi_3(a_3) = 0$ , da  $f_4$  injektiv ist. Es gibt  $a_2 \in A_2$  mit  $a_3 = \varphi_3(a_2)$  wegen  $\varphi_2(A_2) = \ker \varphi_3$ . Also  $0 = f_3(a_3) = f_3 \varphi_2(a_2) = \psi_2 f_2(a_2)$  und somit  $f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$  für ein  $b_1 \in B_1$  wegen  $\psi_1(B_1) = \ker \psi_2$ . Damit für  $b_1 = f_1(a_1)$  (da  $f_1$  surjektiv)  $f_2(a_2) = \psi_1 f_1(a_1) = f_2 \varphi_1(a_1)$  und somit folgt aus der Injektivität von  $f_2$ , dass  $a_2 = \varphi_1(a_1)$ . Also  $a_3 = \varphi_2(a_2) = \varphi_2(\varphi_1(a_1)) = 0$  (kurze Sequenz!).

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ b_1 & \xrightarrow{\psi_1} & f_2(a_2) & \xrightarrow{\psi_2} & 0 & \xrightarrow{\psi_3} & 0 \end{array}$$

(ii). Analog.

(iii). Klar.

□

**Bemerkung** Es sei folgendes kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 \end{array}$$

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \ker f_1 & \hookrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{\text{nat}} & \text{koker } f_1 \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \bar{\psi} \downarrow \\ \ker f_2 & \hookrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{\text{nat}} & \text{koker } f_2 \end{array}$$

Es gilt

$$a_1 \in \ker f_1 \Rightarrow f_1(a_1) = 0 \Rightarrow 0 = \psi f_1(a_1) = f_2 \varphi(a_1)$$

also  $\varphi(a_1) \in \ker f_2$ , d.h.  $\varphi(\ker f_1) \subseteq \ker f_2$ . Sei  $\text{koker } f_i := B_i / f_i(A_i)$  und definiere  $\bar{\psi}([b_1]) := [\psi(b_1)]$  (also  $\text{nat} \circ \psi = \bar{\psi} \circ \text{nat}$ ). Für  $a_1 \in A_1$  gilt

$$\text{nat } \psi f_1(a_1) = \underbrace{\text{nat } f_2}_{0} \varphi(a_1) = 0$$

daher  $\ker(\text{nat} : B_1 \rightarrow \text{koker } f_1) = f_1(A_1) \subseteq \ker(\text{nat} \circ \psi)$ , also ist  $\bar{\psi}$  wohldefiniert.

**6.9 Lemma** (Schlangenlemma)

Es sei ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 \end{array}$$

Dann gilt im induzierten Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f_1 & \xrightarrow{\varphi_1|} & \ker f_2 & \xrightarrow{\varphi_2|} & \ker f_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 \\ \text{nat} \downarrow & & \downarrow \text{nat} & & \downarrow \text{nat} \\ \text{koker } f_1 & \xrightarrow{\bar{\psi}_1} & \text{koker } f_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & \text{koker } f_3 \end{array}$$

(i). Falls  $\psi_1$  injektiv ist, dann ist die 1. Zeile exakt.

(ii). Ist  $\varphi_2$  surjektiv, dann ist die 4. Zeile exakt.



- (iii). Sind  $\psi_1$  injektiv und  $\varphi_2$  surjektiv, dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\partial : \ker f_3 \rightarrow \ker f_1$  mit

$$\forall a_3 \in \ker f_3, b_1 \in B_1 : \text{nat}(b_1) = \partial(a_3) \Leftrightarrow \exists a_2 \in A_2 : \varphi_2(a_2) = a_3, f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$$

Es gilt dann, dass die Sequenz

$$\ker f_1 \xrightarrow{\varphi_1|} \ker f_2 \xrightarrow{\varphi_2|} \ker f_3 \xrightarrow{\partial} \ker f_1 \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \ker f_2 \xrightarrow{\bar{\psi}_2} \ker f_3$$

exakt ist.  $\partial$  heißt Verbindungshomomorphismus.

Ohne Beweis (elementar)

**Definition** Eine Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen  $\dots \rightarrow C^i \xrightarrow{f^i} C^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} C^{i+2} \rightarrow \dots$  heißt exakt, falls  $\dots \rightarrow C_n^i \xrightarrow{f_n^i} C_n^{i+1} \xrightarrow{f_n^{i+1}} C_n^{i+2} \rightarrow \dots$  exakt ist ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**6.10 Satz** (Lange exakte Homologiesequenz)

Sei  $0 \rightarrow C^1 \xrightarrow{\varphi} C^2 \xrightarrow{\psi} C^3 \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen. Dann gibt es für  $n \in \mathbb{N}$  genau einen Homomorphismus  $\partial_* : H_n(C^3) \rightarrow H_{n-1}(C^1)$ , sodass

$$\forall z_1 \in Z_{n-1}^1, z_3 \in Z_n^3 : [z_1] = \partial_*([z_3]) \Leftrightarrow \exists c_2 \in C_n^2 : \psi(c_2) = z_3, \partial(c_2) = \varphi(z_1)$$

Die Sequenz

$$H_n(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(C^2) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} \dots$$

ist eine exakte Sequenz.

Beweis: mit Schlangenlemma □

**6.11 Satz** (Homologiesequenz eines Raumpaars)

Sei  $(X, Y)$  ein Raumpaar. Die zugehörige Homologiesequenz

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \rightarrow \dots$$

ist exakt, wobei  $i_*$ ,  $j_*$  von den Inklusionsabbildungen  $i : Y \rightarrow X$ ,  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$  induziert werden und  $\partial_*$  der Randoperator ist,  $\partial_*([z]_{\ulcorner(X, Y)\urcorner}) = [\partial z]_Y$ . Ferner hat man für eine stetige Abbildung  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  die „Homologiesequenz“, d.h. das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X, Y) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, Y) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow (f)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(A, B) \end{array}$$

**Bemerkung** Analog kann man von einem Raumtripel  $Z \subseteq Y \subseteq X$  ausgehen. Dann erhält man die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S(Y, Z) \xrightarrow{i_*} S(X, Z) \xrightarrow{j_*} S(X, Y) \rightarrow 0$$

mit  $i : (Y, Z) \rightarrow (X, Z)$ ,  $j : (X, Z) \rightarrow (X, Y)$  Inklusionsabbildungen. Dann erhalten wir die exakte Homologiesequenz des Tripels,

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y, Z) \xrightarrow{i_*} H_n(X, Z) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

**6.12 Satz**

Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  stetig. Dann gilt

$$\partial_* f_* = (f|_A)_* \partial_*$$

Zugehöriges Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B) \\
\downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* \\
H_{n-1}(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*} & H_{n-1}(B)
\end{array}$$

**6.13 Satz** (Ausschneidungssatz)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  ein Teilraum. Sei  $U \subseteq X$  offen mit  $\bar{U} \subseteq \circ A$ . Dann induziert die Inklusionsabbildung  $(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i} (X, A)$  einen Isomorphismus  $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i_*} H_n(X, A)$ .

**6.14 Satz** (i). Sei  $X$  ein topologischer wegzusammenhängender Raum. Dann gilt  $H_1(X) \cong \Pi_1(X)/K(\Pi_1(X))$ .

(ii). Für  $n \geq 1$  gilt

$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n, m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$